510.76
T527T

BAN TỔ CHỨC KÌ THI

TUYỂN TẬP 20 NĂM ĐỀ THI OLYMPIC 30 THÁNG 4

TOÁN

DVL.013477

11

ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

510.76
T527T

BAN TỔ CHỨC KỲ THI

TUYỂN TẬP
20 NĂM ĐỀ THI
OLYMPIC 30 THÁNG 4

TOÁN
11

THU [illegible] NI [illegible] UẬN
DVL / 15477 / 14

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Kì thi Olympic 30 tháng 4 do Sở Giáo dục và Đào tạo, Trường Trung học phổ thông Chuyên Lê Hồng Phong Thành phố Hồ Chí Minh tổ chức đã diễn ra được 19 kì (1995 – 2013). Kì thi đã nhận được sự tin cậy và hợp tác của các trường Trung học phổ thông chuyên ở các tỉnh phía Nam cũng như các trường Trung học phổ thông của Thành phố Hồ Chí Minh.

Nhằm giúp giáo viên có thêm tài liệu tham khảo trong việc bồi dưỡng, rèn luyện năng khiếu cho học sinh giỏi và giúp các em học sinh có tài liệu tự nâng cao kiến thức, trong những năm qua, Ban Tổ chức kì thi đã phối hợp với Nhà xuất bản Giáo dục và Nhà xuất bản Đại học Sư Phạm xuất bản bộ sách "**Tuyển tập đề thi Olympic 30 tháng 4**" hàng năm. Bộ sách đã được sự ủng hộ của các thầy giáo, cô giáo và các em học sinh.

Để nâng cao chất lượng của bộ sách, năm học 2014, các giáo viên của Trường Trung học phổ thông Chuyên Lê Hồng Phong Thành phố Hồ Chí Minh đã tuyển chọn các đề thi chính thức và các đề thi đề nghị của các trường tham gia 19 kì thi Olympic vừa qua thành bộ "**Tuyển tập 20 năm đề thi Olympic 30 tháng 4**". Bộ sách này gồm 15 cuốn liên quan đến 8 môn học: Toán, Vật lí, Hoá học, Sinh học, Văn học, Lịch sử, Địa lí, Tiếng Anh.

Giới thiệu bộ sách này, chúng tôi tôn trọng nội dung, kết cấu và đáp án hoặc hướng dẫn giải của các trường đề nghị.

Chúng tôi mong nhận được sự đóng góp của quý thầy cô và các em học sinh để bộ sách sẽ hoàn chỉnh hơn, cho lần tái bản sau.

TM. BAN TỔ CHỨC KÌ THI
HIỆU TRƯỞNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TP. HỒ CHÍ MINH
VÕ ANH DŨNG

PHẦN 1. ĐỀ THI CHÍNH THỨC

NĂM 1998

Câu 1

Với những giá trị nào của a > 0, thì miền giá trị của hàm số:

$$y = \frac{a^{x-1} + 5}{a^x + 3} \text{ không chứa một số nguyên lẻ nào?}$$

Câu 2

Cho $x > 0$ và $\alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \alpha \neq \beta$

Chứng minh rằng: $\left(\frac{x + \sin\alpha}{x + \sin\beta}\right)^{x + \sin\beta} > \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^{\sin\beta}$

Câu 3

Tìm điều kiện cần và đủ đối với a và b để hệ

$$\begin{cases} \sin x + \sin 2x = a \\ \cos x + \cos 2x = b \end{cases}$$

có nghiệm.

Câu 4

Cho hình chóp OABC có góc tam diện đỉnh O là tam diện vuông. M là một điểm thuộc mặt đáy ABC.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{AM^2}{AO^2} + \frac{BM^2}{BO^2} + \frac{CM^2}{CO^2}$.

NĂM 1999

Câu 1

Giải phương trình: $\left(\frac{1 + a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1 - a^2}{2a}\right)^x = 1$ với tham số $a \in (0; 1)$.

Câu 2

Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh: $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x$

Câu 3

Cho dãy (x_k) được xác định bởi: $x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{k}{(k+1)!}$.

Tính: $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{199}^n}$.

Câu 4

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC cố định và AB = AC = a, $\widehat{ACB} = 20^0$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A, B lên SC và thoả mãn ở giữa C và N. Khi S biến thiên, tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện ABMN.

Câu 5

Tìm bậc cao nhất của k của 1999 để 1999^k là ước số của số:

$$L = 1998^{1999^{2000}} \cdot 2000^{1999^{1998}}$$

NĂM 2000

Câu 1

Định m để phương trình sau có nghiệm:

$$(4m-3)\sqrt{x+3} + (3m-4)\sqrt{1-x} + m - 1 = 0$$

Câu 2

Cho dãy (u_n) được xác định như sau;

$$\begin{cases} u_0 = 2000 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}; n = 0,1,2... \end{cases}$$

Tìm giới hạn $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n^3}{n}$,

Câu 3

Xác định mọi hàm số f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn:

(i) $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

(ii) $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

(iii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$ với mọi $x \neq 0$.

Câu 4

Cho tứ diện ABCD có độ dài các cặp cạnh đối lần lượt là a, a', b, b', c, c'. Gọi V và R là thể tích và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Chứng minh rằng:

a) Có một tam giác có độ dài 3 cạnh là: $a.a'$; $b.b'$; $c.c'$.

b) Gọi S là diện tích tam giác đó. Chứng minh rằng: $S = 6.V.R$.

NĂM 2001

Câu 1

Cho phương trình $ax^3 + 27x^2 + 12x + 2001 = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm thực:

$$4(ax^3 + 27x^2 + 12x + 2001)(3ax + 27)$$
$$= (3ax^2 + 54x + 12)^2 \ (a \in \mathbb{R},\ a \neq 0).$$

Câu 2

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $BC \le CA \le AB$. Các điểm M, N, P lần lượt di động trên các đoạn AA', BB', CC', thoả mãn: $AM \ge BN \ge CP$ và tỉ số diện tích xung quanh của lăng trụ cụt A'B'C'.MNP và ABC.MNP bằng 2001.

Tính giá trị lớn nhất của tỉ số thể tích 2 lăng trụ cụt A'B'C'.MNP và ABC.MNP.

Câu 3

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có:

$$(1 + \sin A)(1 + \sin B(1 + \sin C) < e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}.$$

Câu 4

Cho $S = (-1; +\infty)$.

Tìm tất cả các hàm $f: S \to S$ thoả mãn:

* $\forall x, y \in S$: $f[x + f(y) + xf(y)] = y + f(x) + yf(x)$

* $\dfrac{f(x)}{x}$ đơn điệu tăng trên $(-1; 0)$ và tên $(0; +\infty)$.

NĂM 2002

Câu 1

Xét các tứ diện SABC có SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và các mặt bên (SBC), (SCA0, (SAB) theo thứ tự hợp với mặt (ABC) các góc α, β, γ. Tìm giá trị nhỏ nhất của.

$$M = tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma + cotg^2\alpha + cotg^2\beta + cotg^2\gamma$$

Câu 2

Cho hàm số f xác định và lấy giá trị trong tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ sao cho với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$ ta đều có:

$$f(1975x) = f(\sin(30x + 4y)) + f(\sin(30x - 4y))$$

Hãy xác định giá trị của $d(\sqrt{13} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[5]{2002})$

Câu 3

Cho phương trình $x^n + x^{n-1} + ... + x - 1 = 0$. Chứng tỏ rằng với mỗi n nguyên dương thì phương trình có duy nhất một nghiệm dương x_n và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Câu 4

Cho tứ diện ABCD có các đường cao AA′, BB′, CC′, DD′ đồng quy tại một điểm thuộc miền trong của tứ diện. Các đường thẳng AA′, BB′, CC′, DD′ lại cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD theo thứ tự tại A_1, B_1, C_1, D_1.

Chứng minh: $\dfrac{AA¢}{AA_1} + \dfrac{BB¢}{BB_1} + \dfrac{CC¢}{CC_1} + \dfrac{DD¢}{DD_1} \geqslant \dfrac{8}{3}$

NĂM 2003

Câu 1

Giải phương trình $\log_{2003} \dfrac{4x^2 + 2}{x^6 + x^2 + 1} = x^6 - 3x^2 - 1$

Câu 2

Cho dãy số (u_n) định bởi: $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 + (1 - \sqrt{2}).u_n}, n = 1, 2... \end{cases}$

Tính u_{2003}.

Câu 3

Cho trước hai số dương a, b. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{x^2}{(ay + bz)(az + by)} + \frac{y^2}{(az + bx)(ax + bz)} + \frac{z^2}{(ax + by)(ay + bx)}$$

trong đó: x, y, z là ba số dương tuỳ ý.

Câu 4

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và tiếp xúc với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ABD) cắt mặt phẳng (P) lần lượt theo các giao tuyến d, b, x. Biết d, b, c tạo với nhau thành 6 góc bằng nhau.

Chứng minh rằng: AB.CD = AC.BD = AD.BC.

Câu 5

Tìm tất cả các hàm số f: Q → Q thoả mãn

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(xy + y) = f(x).f(y) - f(x + 1) + 2 \quad x, y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

NĂM 2004

Câu 1

Cho a, b dương và x, y, z dương với x + y + z = 1. Chứng minh:

$$\left(a + \frac{b}{x}\right)^4 + \left(a + \frac{b}{y}\right)^4 + \left(a + \frac{b}{z}\right)^4 \geqslant 3(a + 3b)^4$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 2

Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn: $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$.

Câu 3

Cho phương trình: $x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 5x^2 + x^2 + 4x - 1 = 0$

a) Chứng tỏ phương trình (1) có đúng 5 nghiệm.

b) Với $x_i(I = \overline{1,5})$ là nghiệm của phương trình (1).

Tính tổng $S = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i + 1}{2x_i^5 - x_i^4 - 2}$.

Câu 4

Cho tứ diện ABCD có hình chiếu của một đỉnh tứ diện trên mặt đối diện là trực tâm mặt đó. Chứng minh rằng tất cả các trung điểm của các cạnh tứ diện cùng thuộc một mặt cầu.

NĂM 2005

Câu 1

Tính tổng $S = \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{2^{2005}}{3}\right]$

Trong đó [x] là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Câu 2

Cho A, B, C là các góc của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau

$$P = \sqrt{3}.\frac{\cot^{2005}\frac{A}{2} + \cot^{2005}\frac{B}{2} + \cot^{2005}\frac{C}{2}}{\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2} + \cot g\frac{C}{2}}$$

Câu 3

Cho hai dãy số (a_n),(b_n) được xác định như sau:

$$a_1 = \frac{2005 + 2006}{2}, \qquad b_1 = \sqrt{2006.a_1}$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad b_2 = \sqrt{a_2.b_1}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \qquad b_n = \sqrt{a_n.b_{n-1}}$$

a) Tìm $\lim\limits_{x \to \infty} b_n$.

b) Tìm $\lim\limits_{x \to \infty} a_n$.

Câu 4

Tìm mọi hàm số f: $(-1; +\infty) \to (-1; +\infty)$ thoả mãn hai điều kiện sau

(1) $f(x = f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x);\ \forall x, y \in (-1; +\infty)$

(2) $\frac{f(x)}{x}$ là hàm số tăng nghiêm ngặt trong các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.

NĂM 2007

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THỪA THIÊN HUẾ
TRƯỜNG THPT QUỐC HỌC HUẾ

Câu 1. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} e^{y^2-x^2} = \dfrac{x^2+1}{y^2+1} & (1) \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2)+1 & (2) \end{cases}$$

Câu 2. Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng d và số đo của nhị diện [B, SC, D] bằng 150^0. Tính thể tích của hình chóp đều S.ABCD theo d.

Câu 3. Cho dãy số dương (a_n).

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k:

$$\sqrt[k]{a_1.a_2...a_k} \le \frac{1}{k(k+1)}\left(2a_1 + \frac{3^2}{2}a_2 + \frac{4^3}{3^2}a_3 + ... + \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}a_k\right)$$

b) Biết $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a \in R$.

Đặt $b_n = a_1 + \sqrt{a_1a_2} + \sqrt[3]{a_1a_2a_3} + ... + \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$ với $n \ge 1$

Chứng minh rằng dãy (b_n) có giới hạn.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = 2x - \sin x$.

Chứng minh rằng tồn tại hằng số b và các hàm số g, h thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

1. $g(x) = bx + h(x)$ với mọi số thực x.
2. $h(x)$ là hàm số tuần hoàn.
3. $f(g(x)) = x$ với mọi số thực x.

Câu 5. Tìm tất cả các số tự nhiên m, n sao cho đẳng thức sau đúng:

$$8^m = 2^m + n(2n-1)(2n-2)$$

NĂM 2008

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NINH THUẬN
TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN

Câu 1. Cho dãy số (xn) được xác định bởi công thức

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \\ x_{n+1} = x_n^3 + 6x_{n-1} + 3.2^{2008} \end{cases}$$

Chứng minh rằng x_n không thể biểu diễn được dưới dạng tổng của lũy thừa bậc 6 của ba số nguyên dương.

Câu 2. Cho hàm số f: IN* → IN* thỏa: $f_{17}(x)+503\,f(x)=504x+1560$

Với ký hiệu $f_{17}(x)=\underbrace{f(f(f(\dots(x))))}_{17 \text{ lần } f}$. Xác định f(x).

Câu 3. Cho 2008 số tự nhiên bất kì. Chứng minh rằng trong số các số đó, có một số chia hết cho 2008 hoặc có một số số mà tổng chia hết cho 2008.

Câu 4. Giải phương trình $(\log_2 x)^2+x.\log_7(x+3)=\log_2 x\left[\dfrac{x}{2}+2\log_7(x+3)\right]$

Câu 5. Cho một tứ diện ABCD có thể tích V. Một mặt phẳng α qua trọng tâm G của tứ diện cắt AB, AC, AD lần lượt tại B', C', D'.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=V_{BB'C'D'}+V_{CB'C'D'}+V_{DB'C'D'}$

NĂM 2009

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG

Câu 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2x^3+3x^2-18=y^3+y\\2y^3+3y^2-18=z^3+z\\2z^3+3z^2-18=x^3+x\end{cases}$

Câu 2: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ABD là các tam giác nhọn. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng BD, BC. Chứng minh rằng các điểm C, D, E, F ở trên một đường tròn khi và chỉ khi các đường thẳng AB và CD vuông góc nhau.

Câu 3: Xét dãy số thực (x_n), $n\in N$, xác định bởi:

$$\begin{cases}x_0=2009\\x_n=\sqrt[3]{6x_{n-1}-6\sin(x_{n-1})},\ \forall n\ge 1\end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim x_n$.

Câu 4: Tìm tất cả các hàm số f(x;y) thỏa mãn hệ điều kiện:

$$\begin{cases}f(x;y)+f(y;z)+f(z;x)=x^2+y^2+z^2,\forall x,y,z\in R\\f(x^2+y-f(0;x);0)=x+f^2(y;0)-f(0;y^2-f(0;y)),\forall x,y\in R\end{cases}$$

Câu 5: Giả sử hàm số f: N* → N* thỏa: $(f(m)+f(n)) \mid (m+n)^{2009}$, $\forall m,n\in N^*$. Chứng minh f(1), f(2), f(3), …. là cấp số cộng có công sai dương.

NĂM 2010

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG

Câu 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$

Câu 2: Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{1^3+5^3+9^3+\ldots+(4n-3)^3}{\left[1+5+9+\ldots+(4n-3)\right]^2}$.

Câu 3: Cho n và k là các số nguyên với $n,\ k \geq 2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{1+\frac{n}{k}} \leq \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n}{k-1}\right)+1$$

(với ln là kí hiệu logarit Nê-pe).

Câu 4: Hãy tìm bên trong một tứ giác lồi một điểm sao cho các đoạn thẳng nối điểm đó với các trung điểm của các cạnh chia tứ giác này thành 4 phần có diện tích bằng nhau.

Câu 5: Cho hàm số $f:[0;2010] \to R$ liên tục và thỏa $f(0)=f(2010)$. Chứng minh rằng tồn tại 2010 cặp số $(a_i;b_i), i=1,2,3,\ldots,2010$, với a_i, b_i thuộc đoạn [0;2010] sao cho b_i-a_i là số nguyên dương và $f(a_i)=f(b_i)$ với mọi $i=1,2,3,\ldots,2010$.

NĂM 2011

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. CẦN THƠ
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG

Câu 1: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2}.$$

Câu 2: Cho p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn hệ thức: $x^p+y^p=p\left[(p-1)!\right]^p$.

Câu 3: Qua điểm S bất kì thuộc mặt cầu bán kính R ta dựng các đường thẳng đôi một hợp với nhau một góc α, cắt mặt cầu tại các điểm A, B, C (khác S) sao cho SA = SB = SC. Xác định α để thể tích khối chóp S.ABC lớn nhất.

Câu 4: Cho tam giác ABC không tù nội tiếp đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và A_0, B_0, C_0 lần lượt là hình chiếu của G lên BC, CA, AB. Các đường thẳng qua A, B, C lần lượt vuông góc với GA, GB, GC và đôi một cắt nhau tại A_1, B_1, C_1 ($A \in B_1C_1$, $B \in A_1C_1$, $C \in A_1B_1$). Gọi S_0, S_1 lần lượt là diện tích các tam giác $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$.

Chứng minh $\frac{32}{27} \le S_0.S_1 \le \frac{27}{16}$.

Câu 5: Cho dãy số (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} \\ x_n = \frac{x_1 + 4x_2 + 9x_3 + ... + (n-1)^2 x_{n-1}}{n^2(n-1)} \end{cases}$

với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}(30n^2 - 4n + 2011)x_n$.

Câu 6: Tìm tất cả các hàm số $f:[1;+\infty)\to[1;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(xf(y)) = yf(x)\ \forall x,y \in [1;+\infty)$$

NĂM 2012

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN BÀ RỊA-VŨNG TÀU

Câu 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases}$.

Câu 2. Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $x_1 = 4$, $x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng $\lim x_n = +\infty$.

Với mỗi số nguyên dương *n*, đặt $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^3 + 3}$. Tính $\lim y_n$.

Câu 3.

Cho tam giác *ABC* đều cạnh *a*, tâm *G*. Một đường thẳng *d* thay đổi luôn đi qua *G* và cắt các đường thẳng *BC, CA, AB* lần lượt tại *M, N, P*.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = GM.GN.GP$.

Câu 4.

Tìm tất cả các cặp hàm số $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$f(0) = g(0) = 1,\ g(1) = 2$.

$f(x) - f(y) = (x-y)g(x+y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Câu 5.

Một số nguyên dương $n > 1$ được gọi là hoàn toàn không chính phương nếu *n* không có ước chính phương khác 1. Chứng minh rằng nếu *n* là một hợp số và $n-1$ chia hết cho $\varphi(n)$ thì *n* hoàn toàn không chính phương và *n* có ít nhất 3 ước nguyên tố (trong đó $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương không vượt quá *n* và nguyên tố cùng nhau với *n*).

Câu 6.

Trên mỗi ô của một bảng 4×4 ô vuông, người ta điền một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hàng và trong mỗi cột đều bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách điền như trên?

NĂM 2013

Câu 1.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+3y^2-2y=0 \\ 36(x\sqrt{x}+3y^3)-27(4y^2-y)+(2\sqrt{3}-9)\sqrt{x}-1=0 \end{cases}$.

Câu 2.

Cho dãy số (x_n) : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \dfrac{-14x_{n-1}-51}{5x_{n-1}+18} \ (\forall n \geq 2) \end{cases}$

a. Tính x_{2013}

b. Tính $\lim x_n$

Câu 3.

Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là AB = 3; BC = 5; CA = 7. Một đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, cắt cạnh AB, AC theo thứ tự tại M và N. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{BM.CN}{AM.AN}$.

Câu 4.

Tìm tất cả các cặp hàm số $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i. $f(x-1)+g(2x+1)=2x$

ii. $f(2x+2)+2g(4x+7)=x-1, \forall x\in\mathbb{R}$

Câu 5.

Cho *x* là một số thực. Chứng minh rằng nếu $\{x\}=\{x^2\}=\{x^{2013}\}$ thì *x* là một số nguyên, trong đó kí hiệu $\{t\}$ để chỉ phần lẻ của số thực *t*.

Câu 6.

Có hai đống đá, một đống có n hòn và đống kia có k hòn. Cứ mỗi phút, một máy tự động lại chọn một đống có số hòn đá là chẵn và chuyển một nửa số hòn đá của đống đá được chọn sang đống kia. Nếu cả hai đống đều có số hòn đá là chẵn thì máy sẽ chọn ngẫu nhiên một đống. Nếu trong hai đống số hòn đá đều là lẻ thì máy sẽ ngừng làm việc. Hỏi tồn tại bao nhiêu cặp sắp thứ tự (n, k), với n và k là các số nguyên dương không vượt quá 2013, để máy tự động sau một khoảng thời gian hữu hạn sẽ dừng?

ĐÁP ÁN

NĂM 1998

Câu 1

Gọi T là miền giá trị hàm số. Ta có: $\forall y \in T \Leftrightarrow$ phương trình:

$y = \dfrac{a^{x-1}+5}{a^x+3a}$ có nghiệm x (với $a > 0$) $\Leftrightarrow a^x(ya-1) = 5a - 3a^2y$ có nghiệm.

* Khi đó ta có: $a^x = \dfrac{5a-3a^2y}{ya-1}$ (1)

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{5a-3a^2y}{ya-1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} < y < \dfrac{5}{3a}$ (vì $a > 0$).

Vậy $T = \left(\dfrac{1}{a};\ \dfrac{5}{3a}\right)$.

T không chứa số nguyên lẻ nào $\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{a};\ \dfrac{5}{3a}\right) \subset [2k-1; 2k+1],\ \forall k \in \mathbb{Z}^+$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a} \geqslant 2k-1 \\ \dfrac{5}{3a} \leqslant 2k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a} \geqslant 2k-1 \\ \dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{6k+3}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2k-1 \leq \frac{1}{a} \leqslant \frac{6k+3}{5} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} k \leqslant 2 \\ 2k-1 \leqslant \dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{6k+3}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 1,\ k = 2 \\ 2k-1 \leqslant \dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{6k+3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5}{9} \leqslant a \leqslant 1 \end{cases}$$

Câu 2

Xét hàm $f(x) = \left(\dfrac{x+\sin\alpha}{x+\sin\beta}\right)^{x+\sin\beta}$ với $x \geq 0$.

Ta có $\ln(f(x)) = (x + \sin\beta)\ln\left(\dfrac{x+\sin\alpha}{x+\sin\beta}\right)$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\frac{(x+\sin\alpha)}{(x+\sin\beta)} + \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{x+\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left[\ln\left(\frac{x+\sin\alpha}{x+\sin\beta}\right) + \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{x+\sin\alpha}\right] f(x)$$

Đặt $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+\sin\alpha}{x+\sin\beta}\right) + \dfrac{\sin\beta-\sin\alpha}{x+\sin\alpha}$

Ta có $g'(x) = \dfrac{-(\sin\beta - \sin\alpha)^2}{(x+\sin\alpha)^2(x+\sin\beta)} < 0$

x	0		+∞
g′(x)		−	
g(x)		↘	0

Vậy $g(x) > 0, \forall x \geq 0.$

$\Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \geq 0$

$\Rightarrow$ f là hàm tăng trên $[9; +\infty)$

$\Rightarrow f(x) > f(0)$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+\sin\alpha}{x+\sin\beta}\right)^{x+\sin\beta} > \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^{\sin\beta}$$

Câu 3

Giả sử hệ có nghiệm x. Viết hai phương trình dưới dạng

$$\sin x(1 + 2\cos x) = a$$
$$\cos x(1 + 2\cos x) = b + 1$$

Từ đây suy ra $\text{tg}x = \dfrac{a}{b+1}$ và

$$\sin 2x = \frac{2a(b+1)}{a^2+(b+1)^2}, \cos 2x = \frac{(b+1)^2 - a^2}{a^2+(b+1)^2} \qquad (*)$$

Kết hợp hai phương trình, ta suy ra

$$(a - \sin 2x)^2 + (b - \cos 2x)^2 = 1$$

Thay các giá trị vừa tìm được ở trên vào ta được

$$\left[\frac{a(a^2+b^2-1)}{a^2+(b+1)^2}\right]^2 + \left[\frac{(b+1)(a^2+b^2-1)}{a^2+(b+1)^2}\right]^2 = 1$$

Do đó $(a^2 + b^2 - 1)^2 = a^2 + (b+1)^2 \qquad (**)$

Ngược lại, nếu (**) được thoả mãn, ta chọn được góc x sao cho

$$\sin x = \frac{a(a^2+b^2-1)}{a^2+(b+1)^2}, \cos = \frac{(b+1)(a^2+b^2-1)}{a^2+(b+1)^2}$$

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
DVL / 13477 / 14

khi đó $\text{tg}x = \dfrac{a}{b+1}$ và sin2x, cos2x tính được bằng công thức (*) và hệ phương trình sẽ được thoả mãn.

Vậy điều kiện cần và đủ để hệ có nghiệm là

$$(a^2 + b^2 - 1)^2 = a^2 + (b+1)^2$$

Câu 4

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ là các véc tơ cơ sở.

Ta có: $\overrightarrow{OM} = x.\vec{a} + u.\vec{b} + z.\vec{c}$ với $x + y + z = 1$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (x-1).\vec{a} + y.\vec{b} + z.\vec{c}$$

suy ra $AM^2 = (x-1)^2\vec{a}^2 + y^2.\vec{b}^2 + z^2.\vec{c}^2$

do đó $\dfrac{AM^2}{a^2} = (x-1)^2 + y^2\dfrac{b^2}{a^2} + z^2\dfrac{c^2}{a^2}$

Tương tự:

$$\frac{BM^2}{b^2} = x^2\frac{a^2}{b^2} + (y-1)^2 + z^2\frac{c^2}{b^2} \text{ và } \frac{CM^2}{c^2} = x^2\frac{a^2}{c^2} + y^2\frac{b^2}{c^2} + (z-1)^2$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế ta có:

$$\frac{AM^2}{AO^2} + \frac{BM^2}{BO^2} + \frac{CM^2}{CO^2} =$$

$$= x^2a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + y^2b^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + z^2c^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$+ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)(x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2) - (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$+ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)(x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2) - 2(x+y+z) + 3$$

Để ý trong tứ diện OABC nếu gọi OH là đường cao thì

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{OH^2} \text{ và } x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2 = OM^2$$

Do đó $\dfrac{AM^2}{AO^2} + \dfrac{BM^2}{BO^2} + \dfrac{CM^2}{CO^2} = \dfrac{OM^2}{OH^2} + 1 \geqslant 2$

Dấu đẳng thức xảy ra khi OM = OH hay M ≡ H và giá trị nhỏ nhất cần tìm là 2.

NĂM 1999

Câu 1

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x = 1 - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x$$

Chia hai vế phương trình trên cho $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x$, ta được:

$$1 = \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x$$

Vì $x \in (0; 1)$ nên tồn tại $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ để cho $\text{tg}\frac{\varphi}{2} = a$. Như thế, phương trình có thể được viết lại:

$$1 = \left(\frac{2\text{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\varphi}{2}}\right)^x + \left(\frac{1-\text{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{\varphi}{2}}\right)^x \Leftrightarrow 1 = (\sin\varphi)^x + (\cos\varphi)^x.$$

Hàm số $f(x) = (\sin\varphi)^x + (\cos\varphi)^x$ là hàm nghịch biến và ta có $f(2) = (\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$.

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 2

Xét hàm số: $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta suy ra được, $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Từ đó, với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216} \qquad (1)$$

Mà $x^2 < 9$ nên $\frac{x^2}{36} < \frac{1}{4}$, hay $\frac{x^4}{2400 > x^6 216}$

Như vậy $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{216}$ (2)

Mặt khác: $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ (3)

Cuối cùng, từ (1), (2) và (3) ta suy ra:

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x.$$

Câu 3

Vì $x_{k+1} - x_k = \frac{(k+1)}{(k+2)} > 0 \Rightarrow x_{k+1} > x_k$, $\forall k$, do đó (x_k) là dãy tăng $\Rightarrow 0 < x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{1999}$, từ đó:

$$x_{1999}^n < x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{1999}^n < 1999x_{1999}^n, \text{ hay}$$

$$x_{1999} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{1999}^n} < 1999^{\frac{1}{n}} x_{1999} \qquad (*)$$

Mặt khác, ta có:

$$\frac{k}{(k+1)} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}, \text{ suy ra:}$$

$$x_k = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{(k+1)!}. \text{ Như vậy, } x_{1999} = 1 - \frac{1}{2000!}$$

Đến đây, thay x_{1999} vào (*) ta có được:

$$1 - \frac{1}{2000!} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{1999}^n} < 1999^{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{1}{2000!}\right).$$

Nhưng vì:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2000!}\right) = \lim_{n\to\infty} 1999^{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{1}{2000!}\right) = 1 - \frac{1}{2000!}$$

nên ta suy ra:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \ldots + x_{1999}^n} = 1 - \frac{1}{2000!}$$

Câu 4

- Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M, N trên (ABC).

  Khi đó: $V_{ABMN} = V_{NABC} - V_{MABC}$

  $$= \frac{1}{3}S_{ABC}(NK - MH)$$

  $$= \frac{1}{3}S_{ABC}.NT \text{ (T là hình chiếu của M trên NK)}$$

- $S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2\sin^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \text{const}$

  Suy ra V_{ABMN} lớn nhất khi và chỉ khi NT lớn nhất.

- Đặt $\varphi = \widehat{MCH}$, α = góc (BA, CK).

Khi đó: NT = MN.sinφ/

Dựng ME // NB và NF // AM ($E \in BC$, $F \in AC$).

Khi đó mp (AME) // mp (FNB) và SC ⊥ mp(AME), mp(FNB).

Nếu gọi I, J lần lượt là giao điểm của đường thẳng CK với AE và BF, P là hình chiếu của I trên NJ thì MNPI là hình chữ nhật và:

MN = PI = IJ.cosφ = AB.cosα.cosφ.

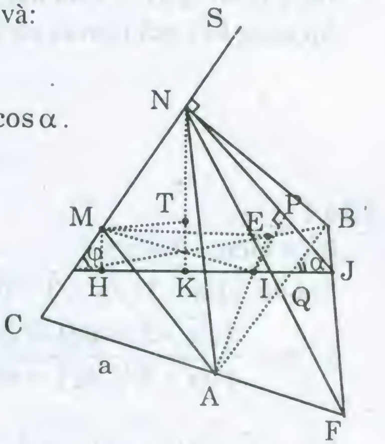
Từ đó $NT = AB.\sin\varphi\cos\varphi.\cos\alpha = \dfrac{a}{2}\sin 2\varphi.\cos\alpha$.

Suy ra rằng NT lớn nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\varphi = 1 \\ \cos\alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 45^0 \\ \alpha = 0^0 \end{cases}$$

Khi đó: $\max NT = \dfrac{a}{2}$

và $\max V_{ABMN} = \dfrac{1}{24}a\sqrt[3]{3}$.



Cách dựng: Để dựng khối tứ diện này, ta dựng hai điểm M, N thuộc tia phân giác của góc xCy với Cx vuông góc với mặt phẳng (ABC) và Cy song song với BC.

Câu 5

Trước hết ta chứng minh rằng với mọi số lẻ $a \geq 3$, mọi số n nguyên dương và không chia hết cho a, ta có:

$$(1 + a)^{a^n} = 1 + S_n.a^{n+1},$$

trong đó S_n là số nguyên dương và không chia hết cho a.

Với n = 1, ta có:

$$(1 + a)^a = (1 + C_a^1 a + V_a^2 a^2 + \ldots + C_a^a a^a$$

$$= 1 + a^2(1 + C_a^2 + C_a^3 a + \ldots) = 1 + S_1 a^2.$$

Vì a là số lẻ nên $C_a^2 \vdots a$ và vì thế a không là ước số của S_1 với $S_1 = 1 + C_a^2 + C_a^2 a + \ldots$

Giả sử rằng khẳng định đúng cho tới n, khi đó với n + 1 ta có:

$$(1 + a)^{a^{n+1}} = (1 + S_n.a^{n+1})^a$$

$$= 1 + C_a^1 S_n a^{n+1} + C_a^2 S_n^2 a^{2n+2} + \ldots 1$$

$$= 1 + a^{n+2}[S_n + C_a^2 S_n^a a^n + \ldots]$$

$$= 1 + S_{a+1} a^{n+2}.$$

Vì $S_n \not\vdots\, a$ nên $S_{n+1} \not\vdots\, a$. Như vậy mệnh đề trên đã được chứng minh theo nguyên lí quy nạp.

Lập luận tương tự ta cũng chứng minh được.

Với mọi số lẻ $b \geq 3$ và mọi số nguyên dương n ta có:

$$(b-1)b^n = -1 + t_n b^{n+1}$$

với t_n là số nguyên chia hết cho b.

Áp dụng kết quả trên ta có bậc lớn nhất k cần tìm là 1999.

NĂM 2000

Câu 1

Điều kiện: $-3 \leq x \leq 1$.

Khi đó: $(4m-3)\sqrt{x+3} + (3m-4)\sqrt{1-x} + m - 1 = 0 \qquad (1)$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1} \qquad (2)$$

Do: $(\sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{1-x})^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x+3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1-x}}{2}\right)^2 = 1$

Nên ta đặt:

$$\sqrt{x+3} = 2\sin\varphi = 2\frac{2t}{1+t^2}; \quad \sqrt{1-x} = 2\cos\varphi = 2\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

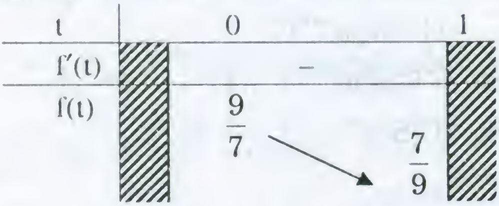
$$\text{với: } \begin{cases} t = \tan\dfrac{\varphi}{2} \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ t \in [0;1] \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow m = \frac{-7t^2 + 12t + 9}{-5t^2 + 16t + 7} \qquad (3)$$

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{-7t^2 + 12t + 9}{-5t^2 + 16t + 7} \qquad t \in [0;1]$

$$f'(t) = \frac{-52t^2 - 8t - 60}{(-5t^2 + 16t + 7)^2} < 0 \qquad \forall t \in [0;1]$$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta suy ra:

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có $t \in [0; 1]$

$\Leftrightarrow \frac{7}{9} \leqslant m \leqslant \frac{9}{7}$

Giá trị m cần tìm là: $\left[\frac{7}{9}; \frac{9}{7}\right]$.

Câu 2

Từ cách xác định dãy có $\forall n = 0, 1, 2...$

$$u_{n+1}^3 = u_n^3 + 3 + \frac{3}{u_n^3} + \frac{1}{u_n^6} \qquad (1)$$

Do $u_n > 0$; $\forall n = 0, 1, 2...$ nên từ (1) suy ra:

$$u_{n+1}^3 > u_n^3 + 3 \qquad (2)$$

Trong (2) cho lần lượt $n = 0, 1, 2..., k - 1$ rồi cộng lại được:

$$u_k^3 > u_0^3 + 3k \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra $\forall k \in \mathbb{N}$ có:

$$u_{k+1}^3 < u_k^3 + 3 + \frac{3}{u_0^3 + 3k} + \frac{1}{(u_0^3 + 3k)^2} < u_k^3 + 3 + \frac{1}{k} + \frac{1}{9k^2}$$

$$\Rightarrow u_{k+1}^3 < u_k^3 + 3 + \frac{1}{k} + \frac{1}{9k^2} \qquad (4)$$

Trong (4) lần lượt thay k bằng 1, 2, ..., n − 1 rồi cộng lại được:

$$u_n^3 < u_1^3 + 3(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow u_n^3 < u_1^3 + 3n + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} \qquad (5)$$

Mặt khác có:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n-1)} =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2 \qquad (6)$$

Theo bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki có:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^2 \leqslant n.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < 2n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\sqrt{2n} \qquad (7)$$

Từ (3), (5), (6) và (7) có:

$$3+\frac{u_0^3}{k}<\frac{u_1^3}{k}<\frac{u_1^3}{k}+2+\sqrt{\frac{2}{k}}+\frac{2}{9k} \qquad (8)$$

Vì $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{u_0^3}{k}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{u_1^3}{k}+3+\sqrt{\frac{2}{k}}+\frac{2}{9k}\right)=3$

nên từ (8) suy ra: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{u_k^3}{k}\right)=3$

Câu 3

Trước hết với mọi số thực $x \neq 0$ ta có:

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=f\left(1+\frac{1}{x}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)+1=\frac{f(x)}{x^2}+1 \qquad (1)$$

Mặt khác với mọi x khác 0 và – 1.

$$f\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{f\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}=\left(\frac{x+1)^2}{x}\right).f\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.f\left(1-\frac{1}{x+1}\right)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.\left(f\left(-\frac{1}{x+1}\right)+1\right)$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.\left(1-f\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.\left(1+\frac{-f(x+1)}{(x+1)^2}\right)$$

$$=\left(\frac{x+1}{x}\right)^2.\frac{-f(x)-1+(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{-f(x)-1+x^2+2x+1}{x^2}$$

Từ (1) và (2) với mọi x khác 0 và – 1 ta có:

$$\frac{f(x)}{x^2}+1=\frac{-f(x)+x^2+2x}{x^2}$$

Vậy với mọi x khác 0 và – 1 ta có: $f(x)+x^2=-f(x)+x^2+2x$

Suy ra $f(x)=x$ với mọi x khác 0 và – 1.

Khi $x=0$ theo tính chất (i) ta có $f(0)=0$.

Mặt khác $f(-1)=-f(1)=-1$.

Vậy f(x) = x với mọi x là số thức. Đảo lại khi f(x) = x với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta dễ dàng chứng minh (i), (ii) và (iii) đều thoả mãn. Vậy hàm số phải tìm là f(x) = x với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 4

a) Giả sử $AB = a$, $CD = a'$, $AC = b$, $BD = b'$, $AD = c$, $BC = c'$.

Đặt $K = a.b.c$.

Trên AB, AC, AD ta lấy lần lượt các điểm B_1, C_1, D_1 thoả mãn

$AB_1.AB = AC_1.AC = AD_1.AD = K$

ΔAB_1C_1 đồng dạng ΔABC

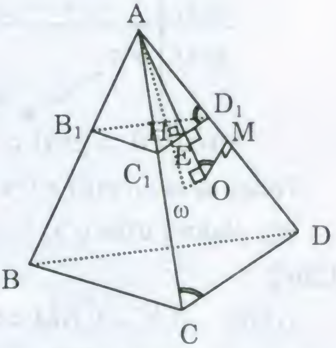
$$\Leftrightarrow B_1C_1 = \frac{K}{AB.AC}BC = \frac{a.b.c.c'}{ab} = cc'$$

Vậy $B_1C_1 = cc'$.

Tương tự $C_1D_1 = aa'$;

$B_1D_1 = bb'$.

Ta có $A_1B_1C_1$ là tam giác cần tìm.



b) Gọi ω là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD. M là trung điểm CD.

Ta có $\widehat{AOM} = \widehat{ACD} = \widehat{AD_1C_1} \Rightarrow$ Tứ giác OED_1M nội tiếp

$\Rightarrow OA \perp C_1D_1 \Rightarrow A\omega \perp C_1D_1$

Tương tự: $A\omega \perp B_1C_1 \Rightarrow A\omega \perp (B_1C_1D_1)$.

$\Rightarrow A\omega$ cắt $(B_1C_1D_1)$ tại H.

$$\text{Ta có } AH.A\omega = AE.AO = AD_1.AM = \frac{1}{2}AD_1.AD = \frac{1}{2}abc$$

$$\Rightarrow AH = \frac{abc}{2R}$$

Gọi V_1 là thể tích tứ diện $AB_1C_1D_1$. Ta có:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{AB_1.AC_1.AD_1}{AB.AC.AD} = \frac{(abc)^3}{(abc)^2} = abc$$

$$V_1 = V.abc = \frac{1}{3}S.AH = \frac{1}{3}S.\frac{abc}{2R} \Rightarrow S = 6VR.$$

NĂM 2001

Câu 1

Đặt $d(x) = ax^3 + 27x^2 + 12x + 2001$.

Theo giả thiết ta có: $2f(x).f''(x) = [f'(x)]^2$

$$\Leftrightarrow 2f(x).f''(x) - [f'(x)]^2 = 0$$

Đặt $d(x) = 2f(x).f''(x) - [d'(x)]^2$

Ta có $g'(x) = 2f(x).f^{(3)}(x)$

Gọi 3 nghiệm của f(x) là α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$, ta có:

$$g'(x) = 12a^2(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

Ta có bảng biến thiên của g(x)

x	$-\infty$		α		β		γ		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(\alpha)$	↗	$g(\beta)$	↘	$g(\gamma)$	↗	$+\infty$

$$f(\alpha) \neq 0 \Rightarrow g(\alpha) = -[f'(\alpha)]^2 < 0$$

Tương tự ta có $g(\beta) < 0$ và $g(\gamma) < 0$.

Vậy phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm thực (điều phải chứng minh).

Câu 2

a) Đặt $AA' = l$, $AM = x$, $BN = y$, $CP = z$ $(l \geq x \geq y \geq z \geq 0)$

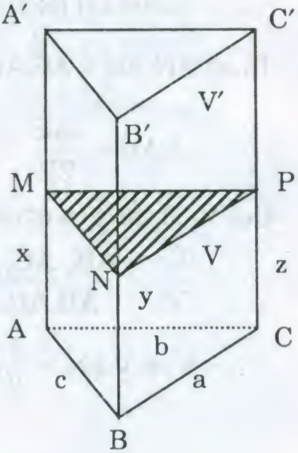
$AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ $(0 < a \leq b \leq c)$

Diện tích xung quanh của 2 lăng trụ cụt là:

$$\begin{cases} S' = (a + b + c)l - S \\ S = \dfrac{x + y}{2}.c + \dfrac{y + z}{2}.b \end{cases}$$

Thể tích 2 lăng trụ cụt là:

$$\begin{cases} V' = l - S_{ABC} - V \\ V = \dfrac{x + y + z}{3}.S_{ABC} \end{cases}$$



b) Ta chứng minh:

$$\frac{V'}{V} \leqslant \frac{3003(b + c)}{a + b + c} - 1 \quad (1)$$

Ta có: $\dfrac{S'}{S} - 2001$

$$\Leftrightarrow \frac{S'}{S} + 1 = 2002$$

$$\Leftrightarrow \frac{S' + S}{S} = 2002$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)l = 2002.S$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)l$$

$$= 1001.[a(y + z) + b(x + z) + c(x + y)]$$

Ta lại có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3l}{x + y + z} \leqslant \frac{3003(b + c)}{a + b + c}$$

$$\Leftrightarrow 3(a + b + c) \leq 3003(b + c)(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow 3003[a(y + z) + b(x + z) + c(x + y) + c(x + y)$$

$$\leq 3003(b + c)(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow a(z + y) + b(x + z) + c(x + y) \leq (b + c)(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow a(y + z) \leq by + cz$$

$$\Leftrightarrow y(b - a) + z(c - a) \geq 0 \qquad (2)$$

(2) đúng suy ra (1) đúng.

Vậy $\frac{V'}{V}$ đạt giá trị lớn nhất

$$\Leftrightarrow \frac{V'}{V} = \frac{3003(b + c)}{a + b + c} - 1 \Leftrightarrow y = 0 \wedge z = 0 \wedge x = \frac{(a + b + c)l}{1001(b + c)}$$

Câu 3

Ta có: $\ln(1 + x) < x, \forall x \geq 0$

Thật vậy: xét hàm số $f(x) = \ln(1 + x) - x, (x \geq 0)$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 = \frac{-x}{1 + x} \leqslant 0\, , (x \geq 0)$$

$\Rightarrow f(x)$ giảm trong khoảng $(0; +\infty)$

$\Rightarrow f(x) \leq f(0) = 0$

$\Rightarrow \ln(1 + x) < x, \forall x > 0.$

Vì A, B, C là ba góc của tam giác, nên:

$$\sin A > 0, \sin B > 0, \sin C > 0$$

Áp dụng (2), ta có:

$$\ln(1 + \sin A) < \sin A \qquad (3)$$

$$\ln(1 + \sin B) < \sin B \qquad (4)$$

$$\ln(1 + \sin C) < \sin C \qquad (5)$$

Cộng vế theo vế của (3), (4), (5) ta được:

$$\ln(1 + \sin A) + \ln(1 + \sin B) + \ln(1 + \sin C) < \sin A + \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \ln[(1 + \sin A)(1 + \sin B)(1 + \sin C)] < \sin A + \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin A)(1 + \sin B)(1 + \sin C) < e^{(\sin A + \sin B + \sin C)} \qquad (6)$$

Ngoài ra, trong tam giác ABC ta có:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad (7)$$

Dấu "=" xảy ra khi tam giác ABC đều.

Từ (6), (7) suy ra: $(1 + \sin A)(1 + \sin B)(1 + \sin C) < e^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$.

Câu 4

Giả sử tồn tại a để $f(a) = a$ ta chứng minh $a = 0$.

Trong (1) cho $x = y = a$, ta có:

$$f[a + f(a) + af(a)] = a + f(a) + af(a)$$

$$\Rightarrow f(a^2 + 2a) = a^2 + 2a \text{ (vì } f(a) = a)$$

Đặt $b = a^2 + 2a$. Xét 3 trường hợp:

* $b = a \Rightarrow a^2 + 2a = a \Rightarrow a = 0 \vee a = -1 \Rightarrow a = 0$ (vì $a > -1$)

* $b > a \Rightarrow a^2 + 2a > a \Rightarrow a > 0 \vee a < -1 \Rightarrow a > 0$ (vi2 $a > -1$)

Khi đó $\dfrac{f(b)}{b} = \dfrac{f(a)}{a} = 1$, vô lí vì $\dfrac{f(x)}{x}$ đơn điệu tăng trên $(0; +\infty)$.

* $b < a \Rightarrow a^2 + 2a < a \Rightarrow -1 < a < 0$

Với $a \in (-1; 0)$ dễ thấy $b = a^2 + 2a \in (-1; 0)$.

Vậy $-1 < b < a < 0$.

Khi đó $\dfrac{f(b)}{b} = \dfrac{f(a)}{a} = 1$ vô lí vì $\dfrac{f(x)}{x}$ đơn điệu tăng trên $(-1; 0)$.

Từ trên suy ra nếu $3a \in S$ để $f(a) = a$ thì $a = 0$.

Trong (1) cho $y = x$ ta được:

$$f[x + f(x) + xf(x)] = x + f(x) + xf(x)$$

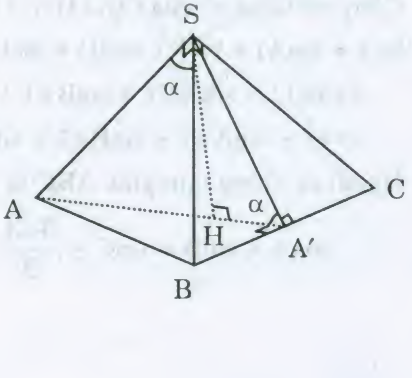
$$\Rightarrow x \quad f(x) + xf(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-x}{x + 1}$$

Thử lại $f(x) = \dfrac{-x}{x + 1}$ thoả mãn các điều kiện của đề bài.

NĂM 2002

Câu 1



Gọi H là hình chiếu của S lên mp(ABC).

AH cắt BC tại A′.

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} BC \perp AA' \\ BC \perp SA' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \widehat{SA'H} = \widehat{HSA} = \alpha$$

Ta có H là trực tâm ΔABC:

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SA'^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$$

Ta có: $\cos^2\alpha = \dfrac{SH^2}{SA^2}$. Tương tự $\cos^2\beta = \dfrac{SH^2}{SB^2}$, $\cos^2\gamma = \dfrac{SH^2}{SC^2}$

Suy ra $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Đặt $\cos^2\alpha = a$, $\cos^2\beta = b$, $\cos^2\gamma = c$.

Ta có $tg^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{b+c}{a}$

Tương tự $tg^2\beta = \dfrac{a+c}{b}$, $tg^2\gamma = \dfrac{a+b}{c}$

Theo Cô–si $\dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} + \dfrac{a+b}{c} \geqslant 6$

Theo Nét–bit $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$

Suy ra $M = tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma + cotg^2\alpha + cotg^2\beta + cotg^2\gamma \geq \dfrac{15}{2}$.

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M = \dfrac{15}{2}$.

$\Leftrightarrow a = b = c$

$\Leftrightarrow SA = SB = SC.$

Câu 2

Trong (*) lấy $x = \dfrac{\pi}{60}$; $y \in \mathbb{R}$ và đặt $d = f\left(\dfrac{1975\pi}{60}\right)$.

Ta có $f(\cos 4y) = \dfrac{1}{2}d$, $\forall y \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t) = \dfrac{1}{2}d$, $\forall t = [-1; 1]$ (1)

Do $\sin(30x \pm 4y) \in [-1; 1]$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ nên từ (*) và (1) có:

$f(1975x) = d, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra có $f(x) = d, \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{1}{2}d = f(0) = d \Rightarrow d = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy $f(\sqrt{13} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[5]{2002}) = 0$

Câu 3

Đặt $f_n(x0 = x^n + x^{n-1} + ... + x - 1$ thì $f_n(x)$ là hàm số liên tục trên toàn trục số. Xét

$$f_n(x_1) - f_n(x_2) = \left(x_1^n - x_2^n\right) + (x_1^{n-1} - x_2^{n-}) + ... + (x_1 - x_2).$$

Nếu $0 < x_2 < x_1$ thì $f_n(x_1) - f_n(x_2) > 0$, hay $f_n(x_1) > f_n(x_2)$.

Do đó hàm số $f_n(x)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

(Có thể dùng đạo hàm để chứng minh).

Hơn nữa $f_n(0) = -1 < 0$, $f_n(1) = n - 1 > 0$, với $n \geq 2$ nên phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm dương duy nhất x_n.

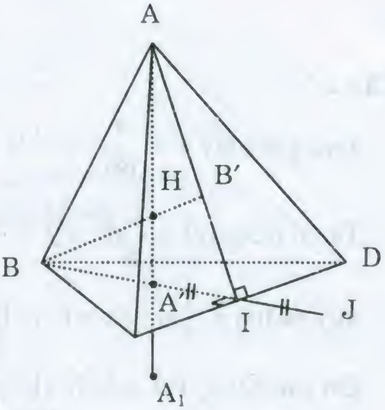
Vì $1 = x_n + x_n^2 + ... + x_n^n$ nên khi n tăng thì x_n giảm, tức là {xn} là dãy giảm và bị chặn dưới.

Do đó $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ tồn tại.

Mặt khác, $1 = \dfrac{1 - x_n^n}{1 - x_n} x_n$ và $0 < x_n < 1$ nên cho qua giới hạn ta có $\dfrac{x_0}{1 - x_0} = 1$, hay $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

Câu 4



Gọi H là giao điểm của ba đường cao của tứ diện. Hiển nhiên ba đường thẳng AB′, BA′, CD đồng quy tại I.

ABCD là tứ diện trực giao nên A′ là trực tâm tam giác BCD. Gọi J là giao điểm của BI với mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD thì A′I = IJ.

Do H là trực tâm tam giác ABI nên:

$$A'H.A'A = A'B.A'I =$$
$$= \frac{1}{2}A'B.A'J = \frac{1}{2}A'A_1.A'A \Rightarrow A'H = \frac{1}{2}A'A_1$$

Tương tự: $B'H = \dfrac{1}{2}B'B_1$; $C'H = \dfrac{1}{2}C'C_1$; $D'H = \dfrac{1}{2}D'D_1$

Từ $\quad V_{HBCD} + V_{HCDA} + V_{HDAB} + V_{HABC} = V_{ABCD}$

$$\Rightarrow \frac{V_{HBCD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{HCDA}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{HDAB}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{HABC}}{V_{ABCD}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} + \frac{HD'}{DD'} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{A'A_1}{AA'} + \frac{B'B_1}{BB'} + \frac{C'C_1}{CC'} + \frac{D'D_1}{DD'} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{AA_1}{AA'} + \frac{BB_1}{BB'} + \frac{CC_1}{CC'} + \frac{DD_1}{DD'} = 6$$

Theo bất đẳng thức Cô–si:

$$\left(\frac{AA'}{AA_1} + \frac{BB'}{BB_1} + \frac{CC'}{CC_1} + \frac{DD'}{DD_1}\right)\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{BB_1}{BB'} + \frac{CC_1}{CC'} + \frac{DD_1}{DD'}\right) \geq 16$$

$$\Rightarrow \frac{AA'}{AA_1} + \frac{BB'}{BB_1} + \frac{CC'}{CC_1} + \frac{DD'}{DD_1} \geqslant \frac{8}{3}$$

NĂM 2003

Câu 1

Đặt $a = 4x^2 + 2 > 0$, $b = x^6 + x^2 + 1 > 0$. Phương trình có dạng:

$$\log_{2003}\frac{a}{b} = b - a \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{2003^b}{2003^a} \Leftrightarrow a = b$$

(Hàm số $f(x) = x.2003^x$ tăng trong $\mathbb{R}^+$).

Giải phương trình $x^6 - 3x^2 - 1 = 0$.

Đặt $u = x^2$ phương trình thành: $u^3 - 3u - 1 = 0$.

Với $f(u) = u^3 - 3u - 1$, ta thấy $f(-2) = -3$; $f(-1) = 1$; $f(0) = -1$; $f(2) = 1$ và $u \geq 0$ nên phương trình này chỉ có nghiệm u trong khoảng (0; 2) nên đặt $u = 2\cos t$, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, ta được phương trình: $\cos 3t = \frac{1}{2}$.

Phương trình có nghiệm là $x = \pm\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}$.

Câu 2

Ta có: $\begin{cases} u_1 = \sqrt{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + \sqrt{2} - 1}{1 + (1 - \sqrt{2}).u_n}, n = 1, 2... \quad (*) \end{cases}$

+ Tính đúng $\text{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

$$1 = \text{tg}\frac{\pi}{4} = \text{tg}\left(2.\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\text{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{8}\right)} \Rightarrow \text{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

+ Từ (*) ta viết được $u_{n+1} = \dfrac{u_n + \text{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - u_n.\text{tg}\frac{\pi}{8}}$ (1)

+ Theo nguyên lí quy nạp, từ (1) và $u_1 = \sqrt{3}$ suy ra

$$u_n = \text{tg}\left[\frac{\pi}{3} + (n - 1)\frac{\pi}{8}\right]$$

+ Vậy $u_{2003} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3} + 2002.\frac{\pi}{8}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}\right) = -(2 + \sqrt{3})$

Câu 3

Ta có $(ax + by)(ay + bx) = ab(x^2 + y^2) + (a^2 + b^2)xy \leq$

$$\leq ab(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(a + b)^2(x^2 + y^2)$$

Vậy $A \geq \dfrac{2}{(a + b)^2}\left(\dfrac{x^2}{y^2 + z^2} + \dfrac{y^2}{z^2 + x^2} + \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Nét–bit (Nesbit) $\dfrac{a}{b + c} + \dfrac{b}{c + a} + \dfrac{c}{a + b} \geqslant \dfrac{3}{2}$ với a, b, c > 0 ta được $A \geq \dfrac{3}{(a + b)^2}$

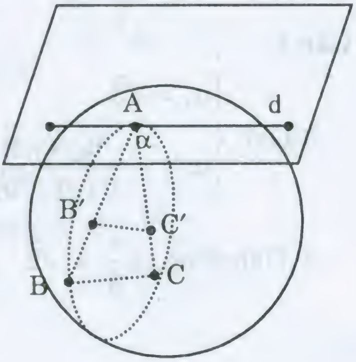
$\text{Min}A = \dfrac{3}{(a + b)^2}$ khi $x = y = z$.

Câu 4

Trên AB, AC, AD ta lấy lần lượt các điểm B′, C′, D′ thoả mãn:

$$AB' = AC.AD$$
$$AC' = AB.AD$$
$$AD' = AB.AC$$

Ta có: $\dfrac{AB'}{AC} = \dfrac{AC'}{AB} = AD$



Suy ra 2 tam giác (ABC) và (AC′B′) đồng dạng.

d là tiếp tuyến của đường tròn (ABC).

Suy ra $\widehat{dAC} = \widehat{ABC}$ (chắn cung $\overset{\frown}{AC}$).

Suy ra $\widehat{dAC} = \widehat{AC'B'}$ suy ra d // B′C′.

Tương tự b // C′D′, c // B′D′.

b, c, d tạo thành các góc bằng nhau, suy ra tam giác B′C′D′ đều.

Ta lại có: $\frac{B'C'}{BC} = AD$ suy ra B′C′ = BC.AD.

Tương tự C′D′ = CD.AB, D′B′ = DB.AC

Từ B′C′ = C′D′ = D′B′.

Suy ra BC.AD = CD.AB = DB.AC.

Câu 5

+ Từ giả thiết, cho y = 1 ta có:

$$f(x + 1) = 2f(x + 1) + 2 \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow f(x + 1) = f(x) + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được:

$$f(x + n) = f(x) + n \ \forall x \in \mathbb{Q}, \ \ \forall x \in \mathbb{Z} \qquad (a)$$

+ Từ giả thiết cho y = x ta có:

$$f(x^2 + x) = f^2(x) - f(x + 1) + 2 \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow f(x^2 + x) = f+2(x) - f(x) + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{Q} \qquad (b)$$

+ $\forall x \in \mathbb{Q}$, d9a85t $x = \frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Áp dụng (b) ta có:

$$f\left[\left(\frac{p}{q} + q\right)^2 + \left(\frac{p}{q} + q\right)\right] = f^2\left(\frac{p}{q} + q\right) - f\left(\frac{p}{q} + q\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow f\left[\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} + q^2 + 2p + q\right] = \left[f\left(\frac{p}{q}\right) + q\right]^2 - f\left(\frac{p}{q}\right) - q + 1 \text{ (Do (a))}$$

$$\Leftrightarrow f\left[\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q}\right] + q^2 + 2p + q = f^2\left(\frac{p}{q}\right) + 2qf\left(\frac{p}{q}\right) + q^2 - f\left(\frac{p}{q}\right) - q + 1$$

$$\Leftrightarrow f^2\left(\frac{p}{q}\right) - f\left(\frac{p}{q}\right) + 1 + q^2 + 2p + q =$$

$$= f^2\left(\frac{p}{q}\right) + 2qf\left(\frac{p}{q}\right) + q^2 - f\left(\frac{p}{q}\right) - q + 1 \text{ (Do (b))}$$

$$\Leftrightarrow qf\left(\frac{p}{q}\right) = p + q$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} + 1 \text{ (Do } q \neq 0).$$

Vậy $f(x) = x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{Q}$ thoả mãn đề bài.

NĂM 2004

Câu 1

Chứng minh bổ đề sau: $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$

$$\Rightarrow \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 \geq \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \qquad (1)$$

+ Áp dụng bất đẳng thức Cô–si ta có:

$$\alpha^4 +^4 \geqslant 2\alpha^2\beta^2,\ \beta^4 + \gamma^4 \geqslant 2\beta^2\gamma^2,\ \gamma^4 + \alpha^4 \geqslant 2\gamma^2\alpha^2 \text{ và}$$

$$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 \geq 2\alpha\beta^2\gamma,\ \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 \geq 2\beta\gamma^2\alpha,\ \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 \geqslant \alpha^2.\beta^2 \geqslant 2\alpha^2\beta\gamma$$

+ Từ đó suy ra: $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 \geq \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$.

Áp dụng ('1) ta có: $\left(a + \frac{b}{x}\right)^4 + \left(a + \frac{b}{y}\right)^4 + \left(a + \frac{b}{z}\right)^4$

$$\geq \left(a + \frac{b}{x}\right)\left(a + \frac{b}{z}\right)\left[3a + b\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\right] \qquad (2)$$

Ta lại có: $\left(a + \frac{b}{x}\right)\left(a + \frac{b}{y}\right)\left(a + \frac{b}{z}\right) =$

$$= A^3 + A^2.B\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + ab^2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) + b^3\frac{1}{xyz} \qquad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si: $1 = x + y + z \geq 3.\sqrt[3]{\sqrt{xyz}}$ (4)

$$\Rightarrow \frac{1}{xyz} \geqslant 27 \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{x + y + z}{xyz} = \frac{1}{xyz} \geqslant 27 \qquad (6)$$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant 3.\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}}$ và kết hợp với (4) ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant 9$

$$\Rightarrow 3a + b\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 2(a + 3b) \qquad (7)$$

Từ (3), (5), (6), (7) ta suy ra được:

$$\left(a+\frac{b}{x}\right)^4+\left(a+\frac{b}{y}\right)^4+\left(a\frac{b}{z}\right)^4 \geqslant 3.(a+3b)^4$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Câu 2

- Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{2}{b}$, $z = \frac{3}{c}$. Bài toán trở thành

  Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ 2x + 4y + 7z \leqslant 2xyz \end{cases}$ (1)

  Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = x + y + z$.

- Từ (1) suy ra $z(2xy - 7) \geq 2x + 4y$ hay $z \geq \dfrac{2x+4y}{2xy-7}$

  Thay vào S ta có

- $$S \geq x + y + \frac{2x+4y}{2xy-7} \geqslant x + y + \frac{2x - 4y - \frac{14}{x} + \frac{14}{x}}{x\left(2y - \frac{7}{x}\right)}$$

  $$\geq x + y + \frac{2}{x} + \frac{2x + \frac{14}{x}}{2xy-7} \geq x + \frac{2}{x} + \frac{2xy-7}{2x} + \frac{7}{2x} + \frac{2x+\frac{14}{x}}{2xy-7}$$

  $$\geq x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}$$ (áp dụng bất đẳng thức Cô–si)

- Đặt: $f(x) = x + \dfrac{11}{2x} + 2\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}$

  $$f'(x) = 1 - \frac{11}{2x^2} - \frac{14}{x^3\sqrt{1+\frac{7}{x^2}}}$$

- Ta thấy $f'(x)$ tăng $(x > 0)$ và

  $$f'(3) = 1 - \frac{11}{18} - \frac{14}{36} = 0$$

- Ta có bảng biến thiên của f(x)

x	0		3	
f′(x)		−	0	+
f(x)		↘	$\frac{15}{2}$	↗

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất khi $S = \frac{15}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{2xy - 7}{2x} = \frac{2x + \frac{14}{x}}{2xy - 7} \\ z = \frac{2x + 4y}{2xy - 7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 3

a) Xét hàm số $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x - 1$

f(x) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-2) = -5 < 0$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 > 0$$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} > 0$$

$$f(1) = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f(3) = \frac{175}{2} > 0$$

Phương trình f(x) = 0 có các nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sao cho

$$-2 < x_1 < -\frac{3}{2} < x_2 < 0 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4 < 1 < x_5 < 3$$

Mặt khác vì f(x) = 0 là phương trình bậc năm nên có không quá 5 nghiệm.

Vậy phương trình trên có đúng 5 nghiệm.

b) Tổng $S = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i + 1}{2x_1^5 - x_1^4 - 2}$, x_i là nghiệm của (1)

Ta có x_i là nghiệm của phương trình (1) nên:

$$x_i^5 - \frac{1}{2}x_i^4 - 5x_i^3 + x_i^2 + 4x_i - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_i^5 - x_i^4 - 2 = 2(5x_i^3 - x_i^2 - 4x_i)$$

Do đó $S = \sum_{i=1}^{5} \frac{x_i + 1}{2(5x_i^3 - x_i^2 - 4x_i)}$

Xét biểu thức $g(x) = \dfrac{x+1}{5x^3 - x^2 - 4x} = \dfrac{x+1}{x(x-1)(5x+4)}$

Đồng nhất hai vế ta được: $A = -\dfrac{1}{4}$; $B = \dfrac{2}{9}$; $C = \dfrac{5}{36}$

Nên $\dfrac{x+1}{x(x-1)(5x+4)} = -\dfrac{1}{4x} + \dfrac{2}{9(x-1)} + \dfrac{5}{36(5x+4)}$.

Do đó $S = -\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{5}\dfrac{1}{x_i} + \dfrac{1}{9}\sum\limits_{i=1}^{5}\dfrac{1}{x_i - 1} + \dfrac{1}{72}\sum\limits_{i=1}^{5}\dfrac{1}{x_i + \dfrac{4}{5}}$

Mặt khác hàm f(x) được viết lại là:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

Đạo hàm $f'(x) = (x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5) +$

$+ (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$

$+ \dots + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

Với $x \neq x_i (i = \overline{1,5}$ ta được $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \sum\limits_{i=1}^{5}\left(\dfrac{1}{x - x_1}\right)$

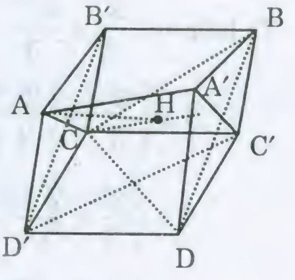
và $f'(x) = 5x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 2x + 4$

- $\dfrac{f'(1)}{f(1)} = \sum\limits_{i=1}^{5}\dfrac{1}{1 - x_i} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{5}\dfrac{1}{x_i - 1} = -\dfrac{f'(1)}{f(1)} = -12$ v
- $\dfrac{f'(0)}{f(0)} = \sum\limits_{i=1}^{5}\dfrac{1}{x_i} = -\dfrac{f'(0)}{f(0)} = 4$
- $\dfrac{f'\left(-\dfrac{4}{5}\right)}{f\left(-\dfrac{4}{5}\right)} = \sum\limits_{i=1}^{5}\dfrac{1}{x_i + \dfrac{4}{5}} = -\dfrac{f'\left(-\dfrac{4}{5}\right)}{f\left(-\dfrac{4}{5}\right)} = \dfrac{12900}{4789}$

Vậy $S = -\dfrac{8959}{4789}$.

Câu 4

Chứng minh rằng một tứ diện có một đường cao đi qua trực tâm của một mặt đối diện thì tất cả các trung điểm của các cạnh cùng nằm trên một mặt cầu.



Tứ diện ABCD có đường cao xuất phát từ A đi qua trực tâm H của ΔBCD.

AH ⊥ mp(BCD) ⇒ BD ⊥ AH (1)

H là trực tâm ΔBCD ⇒ BD ⊥ CH (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BD \perp (ACH) \Rightarrow BD \perp AC$

Chứng minh tương tự: $AB \perp CD$

$BC \perp AD$

Vẽ qua mỗi cạnh của tứ diện một mặt phẳng song song với cạnh đối diện.

Ta nhận được ba cặp mặt phẳng song song tạo thành hình hộp $AB'CD.A'BC'D$.

$$\left.\begin{array}{l} AC \,//\, A'C' \\ B'D' \,//\, BD \\ ACBD \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} ACB'D' \\ BDA'C' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB'CD' \text{ là hình thoi} \\ A'BC'D \text{ là hình thoi} \end{cases}$$

Tương tự: $AA'DD'$ và $BC'CB'$ cũng là hình thoi.

Do đó tất cả các cạnh của hình hộp bằng nhau.

Vậy khoảng cách từ tâm O của hình hộp $AB'CD'.A'BC'D$ đến trung điểm cạnh bất kì của tứ diện bằng một nửa cạnh của hình hộp. Chẳng hạn khoảng cách từ O đến trung điểm cạnh AB bằng khoảng cách từ tâm đối xứng hình bình hành $ABC'D'$ đến trung điểm cạnh AB nghĩa là bằng một nửa cạnh AD'.

Kết luận: Tất cả các trung điểm của các cạnh tứ diện nằm trên một mặt cầu tâm O.

NĂM 2005

Câu 1

Ta có bổ đề: Nếu $a > 0$, $b > 0$; a, b không là số nghuên và $a + b$ là số nguyên thì $[a] + [b] = a + b - 1$.

Thật vậy: theo giả thiết ta có $\begin{cases} a = m - x \\ b = n - y \end{cases}$ với $\begin{cases} m, n \in \mathbb{Z} \\ x, y \in (0;\ 1) \\ x + y = 1 \end{cases}$

Khi đó $[a] + [b] = [m - x] + [n - y] = n - 1 + n - 1 =$

$$= m - (x + y) + n - 1 = a + b - 1$$

Ta luôn có: $\dfrac{2^n}{3} + \dfrac{2^{n+1}}{3} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$. Áp dụng bổ đề ta được

$$S = \left[\frac{2^0}{3}\right] + \left[\frac{2^1}{3}\right] + \left[\frac{2^2}{3}\right] + \left[\frac{2^3}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{2^{2004}}{3}\right] + \left[\frac{2^{2005}}{3}\right]$$

$$= \left(\frac{2^0}{3} + \frac{2^1}{3} - 1\right) + \left(\frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{3} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{2^{2004}}{3} + \frac{2^{2005}}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2005}{3} - 1003 = \frac{2^{2006} - 1}{3} - 1003$$

Câu 2

Chứng minh được

$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2}\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=M$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho 3 số dương

$\operatorname{cotg}^{2005}\frac{A}{2};\operatorname{cotg}^{2005}\frac{B}{2};\operatorname{cotg}^{2005}\frac{C}{2}$ ta được:

$$\cot g^{2005}\frac{A}{2}+\cot g^{2005}\frac{B}{2}+\cot g^{2005}\frac{C}{2}\geqslant 3.\sqrt[3]{M^{2005}}$$

$$\Rightarrow \frac{\cot g^{2005}\frac{A}{2}+\cot g^{2005}\frac{B}{2}+\cot g^{2005}\frac{C}{2}}{M}\geqslant\frac{3.\sqrt[3]{M^{2005}}}{M}=3.\sqrt[3]{M^{2002}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho 3 số dương $\operatorname{cotg}\frac{A}{2};\operatorname{cotg}\frac{B}{2};\operatorname{cotg}\frac{C}{2}$ ta được:

$$\cot g\frac{A}{2}+\cot g\frac{B}{2}+\cot g\frac{C}{2}\geqslant 3.\sqrt[3]{\cot g\frac{A}{2}\cot g\frac{B}{2}\cot g\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow M\geq 3\sqrt[3]{M}\ \Leftrightarrow M\geq 3\sqrt{3}$$

Suy ra $P\geq(\sqrt{3})^{2005}$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi tam giác ABC đều.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $(\sqrt{3})^{2005}$.

Câu 3

a) Đặt $\begin{cases}a=2005,\ b=2006\\ \text{coa}\alpha=\dfrac{a}{b}(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}a_1=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{b\cos\alpha+b}{2}=b\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\\ b_1=\sqrt{a_1b}=\sqrt{b^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=b\cos\dfrac{\alpha}{2}\end{cases}$

$$\begin{cases}a_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}=\dfrac{b\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+b\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2}=b\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2^2}\\ b_2=\sqrt{a_2b_1}=\sqrt{b^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2^2}}=b\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2^2}\end{cases}$$

……………………………………………

$$\begin{cases} a_n = b\cos\dfrac{\alpha}{2}.\cos\dfrac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos^2.\dfrac{\alpha}{2^n} \\ b_n = b\cos\dfrac{\alpha}{2}.\cos\dfrac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos\dfrac{\alpha}{2^n} \end{cases}$$

Suy ra $b_n = \dfrac{b}{2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^n}}.\sin\alpha = \dfrac{\dfrac{\alpha}{2^n}}{\sin\dfrac{\alpha}{2^n}}\dfrac{bin\alpha}{\alpha}$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}$$

b) Ta lại có $a_n = b_n.\cos\dfrac{\alpha}{2^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}.\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{\alpha}{2^n} = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}$$

Câu 4

Thay y bởi x vào (1) ta được

$f(x + (1 + x).f(x) = x + (x + 1).f(x), \forall x \in (-1; +\infty)$ (3)

đặt $u = x + (1 + x).f(x)$ (4)

Từ (3) và (4) ta có: $f(u) = u$ (5)

Với mỗi u thoả mãn (4) ta lại thay x bởi u vào (3). Khi đó (5) cho ta

$$f(u^2 + 2u) = u^2 + 2u.$$

Vậy d(x) có hai họ điểm bất động là u và $u^2 + 2u$.

Theo giả thiết (2) ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1:

$$-1 < u \le 0 \Rightarrow u^2 + 2u \le 0$$

Ta có $\dfrac{f(x)}{x}$ tăng trên khoảng (–1; 0) suy ra phương trình $\dfrac{f(x)}{x} = 1$ có nghiệm duy nhất. Suy ra phương trình f(x) = x có nghiệm duy nhất.

Do đó $u = u^2 + 2u \Leftrightarrow u = 0 \vee u = -1$ (loại)

Trường hợp 2:

$u > 0 \Rightarrow u^2 + 2u > 0$ lập luận tương tự ta cũng có $u = 0 \vee u = -1$ (loại cả hai)

Trường hợp 3:

Khi u = 0, ta có f(0) = 0. Vậy f có điểm bất động duy nhất là 0.

Suy ra $x + (x + 1)f(x) = 0\ \forall x \in (-1; +\infty)$.

Vậy $f(x) = \dfrac{-x}{x+1}$

Thử lại f(x) thoả mãn đề bài.

NĂM 2007

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THỪA THIÊN HUẾ
TRƯỜNG THPT QUỐC HỌC HUẾ

Câu 1. ĐK: $x + 2y + 6 > 0$ và $x + y + 2 > 0$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow y^2 - x^2 = \ln(x^2 + 1) - \ln(y^2 + 1)$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) + x^2 + 1 = \ln(y^2 + 1) + y^2 + 1 \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ với $t \geqslant 1$

Phương trình (3) có dạng $f(x^2 + 1) = f(y^2 + 1)$ (4)

Ta có $f(t)$ đồng biến trên $[1 ; +\infty)$.

Do đó (4) $\Leftrightarrow x^2 + 1 = y^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm y$

* Với $x = -y$, từ (2) ta được $\log_3(6 - x) = 1$, với $x < 6$

$$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = -3 \text{ (thỏa mãn hệ)}$$

* Với $x = y$, từ (2) ta được

$$3\log_3(x + 2) = 2\log_2(x + 1) \text{ với } x > -1$$

Đặt $3\log_3(x + 2) = 2\log_2(x + 1) = 6u \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 3^{2u} \\ x + 1 = 2^{3u} \end{cases}$

$$\Rightarrow 1 + 2^{3u} = 3^{2u} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u = 1 \qquad (5)$$

Xét $g(u) = \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u$, $g(u)$ là hàm nghịch biến trên R và có $g(1) = 1$ nên

$u = 1$ là nghiệm duy nhất của (5).

Với $u = 1$ suy ra $x = y = 7$ (thỏa mãn hệ)

Vậy hệ có 2 nghiệm $(3; -3)$, $(7; 7)$.

Câu 2. Ta có: $BD \perp SC$. Dựng mặt phẳng qua BD vuông góc với SC tại P.

Ta có: $\widehat{BPD} = 150^0$

Ta có: $\cos 150^0 = \dfrac{2BP^2 - BD^2}{2BP^2} = 1 - \dfrac{BD^2}{2BP^2}$ (1)

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $SM.BC = BP.SC$.

$BC = d$, gọi h là chiều cao hình chóp S.ABCD

Ta có: $SM^2 = h^2 + \dfrac{d^2}{4}$; $SC^2 = h^2 + \dfrac{d^2}{2}$.

Suy ra: $BP^2 = \dfrac{d^2(4h^2 + d^2)}{2(2h^2 + d^2)}$

(1) trở thành: $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{d^2}{4h^2+d^2}$. Suy ra: $h = \dfrac{d}{2}\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}}$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}h.dtABCD = \frac{d^3}{6}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}}$$

Câu 3.

a) Ta có $\sqrt[k]{(a_1 2)(a_2\dfrac{3^2}{2})(a_3\dfrac{4^3}{3^2})....(a_k\dfrac{(k+1)^k}{k^{k-1}})} = \sqrt[k]{a_1a_2a_3....a_k(k+1)}$

$$\Rightarrow \sqrt[k]{a_1a_2a_3....a_k} = \frac{1}{k+1}\sqrt[k]{(a_1 2)(a_2\frac{3^2}{2})(a_3\frac{4^3}{3^2})....(a_k\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}})}$$

$$\leqslant \frac{1}{(k+1)k}\left[(a_1 2)+(a_2\frac{3^2}{2})+(a_3\frac{4^3}{3^2})+....+(a_k\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}})\right]$$

b) Từ câu a) suy ra

$$b_n \leqslant (a_1 2)(\frac{1}{1.2}+..+\frac{1}{n(n+1)})+(a_2\frac{3^2}{2})(\frac{1}{2.3}+....+\frac{1}{n(n+1)})$$

$$+..+(a_n\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}})(\frac{1}{n(n+1)})$$

Do: $\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)} = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+... +\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1} = 1-\dfrac{1}{n+1} < 1$

nên $b_n \leqslant a_1(1+\dfrac{1}{1})^1 + a_2(1+\dfrac{1}{2})^2+...+a_n(1+\dfrac{1}{n})^n < e(\sum_{i=1}^{n} a_i)$

với $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

(b_n) tăng và bị chặn trên, do đó có giới hạn.

Câu 4. Cho hàm số f(x)= 2x – sinx.

Chứng minh rằng tồn tại hằng số b và các hàm số g, h thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1. g(x) = bx + h(x) với mọi số thực x.
2. h(x) là hàm số tuần hoàn.
3. f(g(x)) = x với mọi số thực x.

Từ điều kiện (3) cho thấy để chứng tỏ tồn tại g, trước hết ta chứng tỏ f có hàm số ngược.

Chú ý: f đồng biến trên (–∞; +∞) nên có hàm số ngược g.

Ta có: f(g(x)) = x và g(f(x)) = x với mọi số thực x.

Đặt: h(x) = g(x) – bx. Ta sẽ chọn b để h(x) tuần hoàn.

Hàm sinx tuần hoàn chu kì 2π.

Ta sẽ chứng tỏ $g(x + 4\pi) = g(x) + 2\pi$ với mọi số thực x.

Thật vậy: $g(x) + 2\pi = g[f(g(x) + 2\pi)] = g[2(g(x) + 2\pi) - \sin(g(x) + 2\pi)]$

$$= g[2g(x) - \sin(g(x)) + 4\pi] = g[f(g(x)) + 4\pi] = g(x + 4\pi).$$

Từ đó: $h(x + 4\pi) = g(x + 4\pi) - b(x + 4\pi)$

$$= g(x) + 2\pi - bx - 4b\pi = h(x) + 2\pi(1 - 2b).$$

Nếu chọn $b = \frac{1}{2}$ thì $h(x + 4\pi) = h(x)$ với mọi số thực x.

Câu 5. Đặt $x = 2^m$, $y = 2n - 1$ với m, n là các số tự nhiên.

Ta có: $(x, y) = 1$ và $2(x^3 - x) = (y + 1)y(y - 1)$

$\Leftrightarrow y(y^2 - 1) = 2x(x^2 - 1)$ (1)

Do $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ nên $x \geqslant 1$ và $y \geqslant -1$.

+ *Trường hợp $x = 1$:*

Ta có $m = 0$. Lúc đó $n = 0$ hay $n = 1$.

+ *Trường hợp $x > 1$:*

Từ (1) và $(x, y) = 1$ suy ra: $y^2 - 1$ chia hết cho x và $2(x^2 - 1)$ chia hết cho y.

Do đó $2(x^2 - 1).(y^2 - 1)$ chia hết cho xy.

Nhưng: $2(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 2[x^2y^2 - 2xy - ((x - y)^2 - 1)]$ nên cũng có: $2((x - y)^2 - 1)$ chia hết cho xy (2)

Chú ý: với $x > 1$ thì từ (1) ta có $x^3 < y^3 < 2x^3$.

Thật vậy: (1) $\Leftrightarrow (y - x)(y^2 + xy + y^2 - 1) = x^3 - x$.

Với $x > 1$ ta có $x^3 - x > 0$.

Lúc này $y > 0$ và $y^2 + xy + y^2 - 1 > 0$, nên $y > x$.

Ngoài ra: $(x^2 - 1)(2x^3 - y^3) = x^2[2(x^3 - x)] - (x^2 - 1)y^3$

$$= x^2(y^3 - y) - (x^2 - 1)y^3$$

$$= y(y^2 - x^2) > 0.$$

Do đó: $2x^3 - y^3 > 0$

Từ đó: $0 < y - x = x(\frac{y}{x} - 1) < x(\sqrt[3]{2} - 1)$.

Do đó $(y - x)^2 < x^2(\sqrt[3]{2} - 1)^2 < \frac{1}{2}xy$.

Suy ra: $0 \leqslant 2((y - x)^2 - 1) < xy$.

Kết hợp với (2)

ta có: $(y - x)^2 - 1 = 0$ hay $y = x + 1$.

Thay vào (1), ta có $x = 4$ và $y = 5$.

Lúc này $m = 2$, $n = 3$.

Các cặp (m, n) thỏa bài toán là: (0, 0); (0, 1) ; (2, 3).

NĂM 2008

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NINH THUẬN
TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN

Câu 1:

Xét $A = a^6 + b^6 + c^6$

Theo định lý Fermat: $x^{13} \equiv x \pmod{13}$

$$\Leftrightarrow x(x^6-1)(x^6+1) \equiv 0 \pmod{13} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^6 \equiv 0 \\ x^6 \equiv 1 \\ x^6 \equiv -1 \end{array}\right. \pmod{13}$$

Vậy bộ thặng dư của A mod 13 là: $S = \{0, \pm1, \pm2, \pm3\}$

Ta có $2^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{2004} \equiv 1 \pmod{13}$ (do $2004 \vdots 12$)

Nên: $2^{2008} = 2^4.2^{2004} \equiv 2^4 \pmod{13} \equiv 3 \Rightarrow 3.2^{2008} \equiv 9 \pmod{13}$

Nên: $x_{n+1} \equiv x_n^3 + 6x_{n-1} + 9 \pmod{13}$

Ta có: $\begin{cases} x_3 \equiv 382 \equiv 5 \pmod{13} \\ x_4 \equiv 176 \equiv 7 \pmod{13} \end{cases} \Rightarrow$ Số dư của x_n khi chia cho 13 tuần hoàn với chu kì 2.

$$\Leftrightarrow x_n \equiv x_{n-2} \pmod{13} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{2n} \equiv x_2 \equiv 7 \pmod{13} \\ x_{2n+1} \equiv x_1 \equiv 5 \pmod{13} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_n \equiv 5 \\ x_n \equiv 7 \end{array}\right. \pmod{13}$$

mà $5, 7 \notin S$

Vậy x_n không thể biểu diễn được dưới dạng tổng của lũy thừa bậc sáu của 3 số nguyên dương.

Câu 2:

Từ $f_{17}(x) + 503f(x) = 504x + 1560$. Ta có:

$$503f(x) < 504x + 1560 \Leftrightarrow f(x) < x + \frac{x+1560}{503}$$

$$\Leftrightarrow f(x) < x + 4 : \forall x \leqslant 452 \Leftrightarrow f(x) \leqslant x + 3; \forall x < 452 \quad (*)$$

Đặt: $f(x) = x + 3 + t$

Xét $x \in [1,48]$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant x + 3 \leqslant 48 + 3 = 51 < 452 \\ f_2(x) \leqslant f(x) + 3 \leqslant 51 + 3 = 54 < 452 \\ \vdots \\ f_{17}(x) \leqslant f_{16}(x) + 3 \leqslant 99 < 452 \end{cases} \Rightarrow f_{17}(x) \leqslant x + 51; \forall x \leqslant 48$$

Ta có:

$$f_{17}(x) + 503f(x) = 504x + 1560 \leqslant 503f(x) + x + 51; \forall \leqslant 48$$

$$\Leftrightarrow 504x + 1560 \leqslant 503(x + 3 + t) + x + 51 \Leftrightarrow t \geqslant 0$$

Mà: $f(x) = x + 3 + t \leqslant x + 3; \forall x \leqslant 48 \Rightarrow f(x) = x + 3; \forall x \leqslant 48$

Ta chứng minh quy nạp: $f(x) = x + 3; \forall x \in N^*$

* $n \leqslant 48$ thì $f(n) = n + 3$ đúng chứng minh ở trên

* $n > 48$

Giả sử khẳng định đúng $\forall n < m$ ta có:

$$f_{16}(m - 48) = f_{15}(m - 45) = \ldots = f_1(m - 3) = m$$

$$\Rightarrow f(m) = f_{17}(m - 48) = 504(m - 48) + 1560 - f(m - 48).503$$

$$= 504(m - 48) + 1560 - 503(m - 45) = m + 3$$

Vậy $f(m) = m + 3$

Câu 3:

Gọi 2008 số tự nhiên đó là $a_1, a_2, \ldots, a_{2008}$

Đặt: $s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

...

$s_{2008} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2008}$

Chia tất cả các số hạng của dãy cho 2008

TH1: Nếu có một số hạng của dãy chia hết cho 2008

Bài toán được chứng minh.

TH2: Không có số hạng nào của dãy chia hết cho 2008. Có tất cả 2008 phép chia mà số dư tối đa chỉ gồm 2007 giá trị có thể có là 1, 2, 3, ..., 2007 do đó có ít nhất 2 số hạng của dãy chia hết cho 2008 có cùng số dư.

Gọi 2 số đó là s_i, s_j

$$s_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i$$

$$s_j = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_j$$

Với $i, j \in IN$ và $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2008$

$$\Rightarrow s_j - s_i \vdots 2008 \Rightarrow a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + \ldots + a_j \vdots 2008$$

Câu 4:

ĐK $x > 0$ phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2 x(\log_2 x - \frac{x}{2}) - 2\log_7(x + 3)(\log_2 x - \frac{x}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 - \frac{x}{2})(\log_2 x - 2\log_7(x+3)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_2 x - \frac{x}{2} = 0 & (1) \\ \log_2 x - 2\log_7(x+3) = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): (1) $\Leftrightarrow 2^x = x^2 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$ (3)

Ta nhận thấy $x = 2$ và $x = 4$ là nghiệm phương trình (3)

Thật vậy, xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ta có $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

Suy ra: $f'(x) > 0$ với $0 < x < e$

$f'(x) = 0$ với $x = e$

$f'(x) < 0$ với $x > e$

Nên vế trái phương trình (3) đồng biến (0; 2] và nghịch biến [2; +∞) trong khi đó vế phải là hàm hằng nên phương trình (3) có nhiều nhất 2 nghiệm.

Vậy (3) có 2 nghiệm $x = 2$ và $x = 4$

Giải (2):

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$

Phương trình (2) trở thành $t = 2\log_7(2^t + 3)$

$$\Leftrightarrow (\frac{4}{7})^t + 6(\frac{2}{7})^t + 9(\frac{1}{7})^t = 2 \qquad (4)$$

$\Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = 2$ và $x = 4$.

Câu 5:

Gọi $AB_1 = (ABG) \cap (ACD)$

$AC_1 = (ACG) \cap (ABD)$

$AD_1 = (ADG) \cap (ABC)$

$AG \cap (BCD) = \{H\} \Rightarrow H$ trọng tâm ΔBCD

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AH}$$

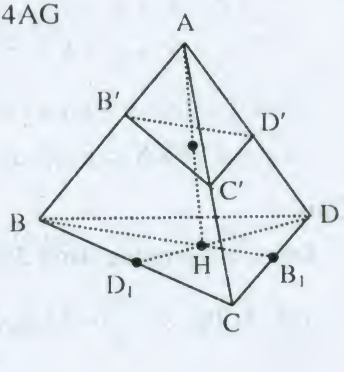
$$\Rightarrow \frac{AB}{AB'}.\overrightarrow{AB'} + \frac{AC}{AC'}.\overrightarrow{AC'} + \frac{AD}{AD'}.\overrightarrow{AD'} = 3.\frac{4}{3}\overrightarrow{AG'} = 4\overrightarrow{AG}$$

Do B', C', D' đồng phẳng nên

$$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 4$$

Mà $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{AB.AC.AD}{AB'.AC'.AD'}}$

$$\Rightarrow \frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD} \geqslant \frac{27}{64}$$



Suy ra $\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}.\frac{AD'}{AD} \geqslant \frac{27}{64}$

Mà $T = V_{BB'C'D'} + V_{C.B'C'D'} + V_{D.B'C'D'} = V_{AB'C'D'}(\frac{BB'}{AB'} + \frac{CC'}{AC'} + \frac{DD'}{AD'})$

Mặt khác: $4 = \frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = \frac{AB'+B'B}{AB'} + \frac{AC'+C'C}{AC'} + \frac{AD'+D'D}{AD'}$

$$= \frac{BB'}{AB'} + \frac{CC'}{AC'} + \frac{DD'}{AD'} + 3$$

$\Rightarrow \frac{BB'}{AB'} + \frac{CC'}{AC'} + \frac{DD'}{AD'} = 1 \Rightarrow T = V_{AB'C'D'} \geqslant \frac{27}{64} V_{ABCD} = \frac{27}{64} V$

Vậy $\min T = \frac{27}{64} V$

Điều này xảy ra khi: $\frac{BB'}{AB'} = \frac{CC'}{AC'} = \frac{DD'}{AD'} = \frac{1}{3} \Rightarrow (B'C'D') \,//\, (BCD)$.

NĂM 2009

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG

☐ **Câu 1:** Đặt $f(t) = 2t^3 + 3t^2 - 18$ và $g(t) = t^3 + t$

Khi đó hệ phương trình được viết lại: $\begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases}$

Giả sử $x = \max(x, y, z)$ thì $\begin{cases} x \geqslant y \\ x \geqslant z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant g(y) \\ g(x) \geqslant g(z) \end{cases}$ (do hàm số g đồng biến)

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant f(x) \\ g(z) \leqslant f(z) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x \geqslant 2x^3 + 3x^2 - 18 \\ z^3 + z \leqslant 2z^3 + 3z^2 - 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2 + 5x + 9) \leqslant 0 \\ (z-2)(z^2 + 5z + 9) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 2 \\ z \geqslant 2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra: $2 \leqslant z \leqslant x \leqslant 2 \Rightarrow x = z = 2$.

Thế vào hệ phương trình ta được $y = 2$

Thử lại ta thấy: $x = y = z = 2$ thoả hệ phương trình.

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = z = 2$.

❑ **Câu 2:**

+ Kẻ đường cao CH của tam giác nhọn ABC (H thuộc đoạn AB và khác A,B).

Ta có $AB\perp CH$ (1),

A, C, F, H ở trên đường tròn đường kính AC và $BH.BA = BF.BC$ (2)

+ Nếu C, D, E, F ở trên một đường tròn thì $BE.BD = BF.BC$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra: $BE.BD = BH.BA$.

Do đó A, H, E, D ở trên đường tròn với đường kính là AD.

Suy ra $AB\perp DH$ (4). Từ (1) và (4) ta có $AB\perp (CHD)$. Vì vậy $AB\perp CD$.

+ Nếu $AB\perp CD$ thì $AB\perp (CHD)$.

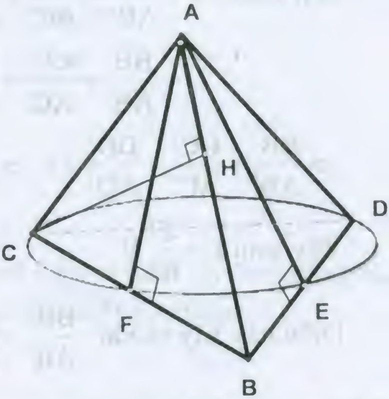
Suy ra $AB\perp DH$.

Do đó A, H, E, D ở trên đường tròn với đường kính là AD.

Ta có : $BE.BD = BH.BA$ (5).

Từ (5) và (2): $BE.BD = BF.BC$.

Suy ra C, D, E, F ở trên một đường tròn.



❑ **Câu 3:** Ta có $x-\frac{x^3}{6}\leqslant \sin x\leqslant x,\forall x\geqslant 0$; dấu = xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ (phải chứng minh bất đẳng thức trái)

$\sin x\leqslant x,\forall x\geqslant 0\ \Rightarrow x_n\geqslant 0,\forall n\in N$ (1);

$$x-\frac{x^3}{6}\leqslant \sin x,\forall x\geqslant 0\ \Rightarrow\ \sin(x_{n-1})\geqslant x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^3}{6},\forall n\geqslant 1$$

$$\Rightarrow\ 6x_{n-1}-6\sin(x_{n-1})\leqslant x_{n-1}^3,\forall n\geqslant 1$$

$$\Rightarrow\ x_n=\sqrt[3]{6x_{n-1}-6\sin(x_{n-1})}\leqslant x_{n-1},\forall n\geqslant 1\ \ (2)$$

Từ (1),(2) $\Rightarrow$ (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Gọi $\lim x_n=\alpha$, ta có $\alpha=\sqrt[3]{6\alpha-6\sin\alpha}\Leftrightarrow\alpha=0$

❑ **Câu 4:** Ta xét điều kiện đầu tiên

$$f(x;y)+f(y;z)+f(z;x)=x^2+y^2+z^2\ \ \forall x,y,z\in R$$

Cho $x=y=z=0\Rightarrow f(0;0)=0$

Cho $y=z=0\Rightarrow f(0;x)+f(x;0)=x^2\ \ \forall x\in R$ (1)

$$\text{Cho } z=0\Rightarrow f(x;y)=x^2+y^2-f(y;0)-f(0;x)$$
$$=f(x;0)+f(0;y)\ \forall x,y\in R\qquad (2)$$

Xét điều kiện thứ hai của giả thiết:

$$f\left(x^2+y-f(0;x);0\right)=x+f^2(y;0)-f\left(0;y^2-f(0;y)\right)\ \forall x,y\in R$$

Theo (1) ta thu được:

$$f\left(y+f(x;0);0\right)=x+f^2(y;0)-f\left(0;f(y;0)\right)=x+f\left(f(y;0);0\right)\ \forall x,y\in R$$

Đặt $g(x) = f(x;0)$ khi đó ta viết lại điều kiện:

$$g(y + g(x)) = x + g(g(y)), \forall x, y \in R$$

Khi đó do $g(0) = f(0;0) = 0$

Cho $y = 0 \Rightarrow g(g(x)) = x, \forall x \in R$

Cho $x = 0 \Rightarrow g(y) = g(g(y)) = y, \forall y \in R$

Ta có $f(0;x) = x^2 - f(x;0) = x^2 - x, \forall x \in R$

Do đó theo (2) ta có:

$$f(x;y) = f(x;0) + f(0;y) = x + y^2 - y, \forall x, y \in R$$

Thử lại hàm số $f(x;y) = x + y^2 - y$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

❑ **Câu 5:**

• Trước hết ta chứng minh f là đơn ánh (1). Thật vậy, giả sử f không là đơn ánh

$\Rightarrow \exists$ a, b $\in N^*$, a < b sao cho f(a) = f(b). Khi đó có

$(f(a) + f(n)) | (a + n)^{2009}$ $\forall$ n $\in N^*$ và $(f(a) + f(n)) = (f(b) + f(n)) | (b + n)^{2009}$, $\forall$ n $\in N^*$

$\Rightarrow$ f(a) + f(n) là một ước chung của $(a + n)^{2009}$ và $(b + n)^{2009}$

mà $f(a) + f(n) \geqslant 2$

$\Rightarrow ((a + n)^{2009}, (b + n)^{2009}) \neq 1, \forall$ n $\in N^*$

$\Rightarrow (a + n, b + n) \neq 1, \forall$ n $\in N^*$

$\Rightarrow (a + n, b - a) \neq 1, \forall$ n $\in N^*$ $\quad (\alpha)$

Lấy p là một số nguyên tố lớn hơn b và lấy

n = p – a ta có (a + n, b – a) = (p, b – a) =1, mâu thuẫn với (α).

Vậy f đơn ánh.

• Lấy t tùy ý thuộc N*, ta xét f(t +1) – f(t)

$\forall$ n $\in N^*$ ta có $(f(n) + f(t)) | (n + t)^{2009}$ và $(f(n) + f(t + 1)) | (n + t + 1)^{2009}$

mà $(n + t, n + t + 1) = 1 \Rightarrow ((n + t)^{2009}, (n + t + 1)^{2009}) = 1$

$\Rightarrow (f(n) + f(t), f(n) + f(t + 1)) = 1 \Rightarrow (f(n) + f(t), f(t + 1) - f(t)) = 1, \forall n \in N^*$ (β)

Từ $(\beta) \Rightarrow f(t + 1) - f(t) = \pm 1, \forall t \in N^*$ $\quad$ (2)

Thật vậy, nếu tồn tại t sao cho $f(t + 1) - f(t) \neq \pm 1$ thì tồn tại số nguyên tố q là ước của f(t + 1) –f(t).

Lấy k $\in$ N* sao cho $q^k > t$ và lấy $n = q^k - t$ ta có

$(f(n) + f(t)) | (n + t)^{2009} = q^{2009k} \Rightarrow q | (f(n) + f(t))$ mà ta đã có $q | (f(t + 1) - f(t))$

$\Rightarrow$ q là một ước chung của (f(n) + f(t)) và (f(t + 1) – f(t)), mâu thuẫn với (β).

Vậy ta có (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(t + 1) - f(t) = 1 \ \forall t \in N^*$ hoặc $f(t + 1) - f(t) = -1, \forall t \in N^*$

Mặt khác do $f(n) \in N^*, \forall n \in N^*$ nên không thể có $f(t + 1) - f(t) = -1, \forall t \in N^*$

Vậy ta có $f(t+1) - f(t) = 1, \forall t \in N^*$ tức là dãy f(1), f(2), f(3), f(4),… là một cấp số cộng công sai 1.

NĂM 2010

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG

Câu 1: $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 & (1) \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 & (2) \end{cases}$

Điều kiện để hệ có nghĩa: $\begin{cases} x \geqslant -1 \\ y \geqslant -1 \\ xy \geqslant 0 \end{cases}$

Ta có: $\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \Leftrightarrow x+1+y+1+2\sqrt{(x+1)(y+1)}=16$

$$\Leftrightarrow x+y+2\sqrt{(x+1)(y+1)}=14 \quad (3)$$

Đặt $t=\sqrt{xy} \geqslant 0$.

Từ (1) ta có: $x+y=3+t$.

Thay vào (3) ta có: $3+t+2\sqrt{t^2+t+4}=14 \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2+t+4}=11-t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant 11 \\ t=3 \text{ hay } t=-\dfrac{35}{3} (\text{loại}) \end{cases} \Leftrightarrow t=3$$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy}=3 \Leftrightarrow xy=9$.

Ta có hệ: $\begin{cases} x+y=6 \\ xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=3$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (3; 3)

Câu 2:

Ta có: $1+5+9+\ldots+(4n-3)=\dfrac{n(4n-2)}{2}=2n^2-n$;

$$1^3+5^3+9^3+\ldots+(4n-3)^3=\sum_{i=1}^{n}(4i-3)^3$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(64i^3-144i^2+108i-27\right)=64\sum_{i=1}^{n}i^3-144\sum_{i=1}^{n}i^2+108\sum_{i=1}^{n}i-27n$$

Mặt khác: $\sum_{i=1}^{n}i=\dfrac{n(n+1)}{2}; \sum_{i=1}^{n}i^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \sum_{i=1}^{n}i^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Do $P(n)=1^3+5^3+9^3+\ldots+(4n-3)^3$ là đa thức bậc 4 có hệ số bậc 4 là $\dfrac{64}{4}=16$

và $Q(n) = \left[1+5+9+...(4n-3)\right]^2$ là đa thức bậc 4 có hệ số bậc 4 là 4.

Do đó: $\lim \dfrac{1^3+5^3+9^3+...+(4n-3)^3}{\left[1+5+9+...(4n-3)\right]^2} = \dfrac{16}{4} = 4$.

Câu 3: Xét bổ đề: $\forall a > 0; \dfrac{1}{a+1} < \ln(a+1) - \ln a < \dfrac{1}{a}$.

Thật vậy, xét hàm số $f(x) = \ln x$ xác định và khả vi trên R^+, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Áp dụng định lí Lagrange trên [a, a + 1 > 0)

Ta được: $\dfrac{1}{c} = f'(c) = \dfrac{\ln(a+1) - \ln a}{a+1-a} = \ln(a+1) - \ln a$, với $c \in (a;a+1)$.

Khi đó: $\dfrac{1}{a+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a} \Rightarrow \dfrac{1}{a+1} < \ln(a+1) - \ln a < \dfrac{1}{a}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\frac{k+1}{k} + \frac{k+2}{k+1} + ... + \frac{k+n}{k+n-1} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}.\frac{k+2}{k+1}....\frac{k+n}{k+n-1}} = n\sqrt[n]{\frac{k+n}{k}}.$$

Ta cũng có

$$\frac{k+1}{k} + \frac{k+2}{k+1} + ... + \frac{k+n}{k+n-1} = 1 + \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{k+1} + ... + 1 + \frac{1}{k+n-1}$$

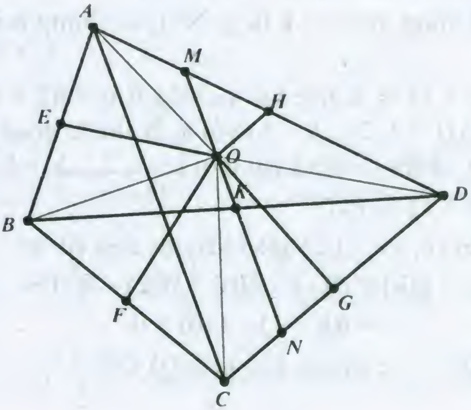
$$= n + \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + ... + \frac{1}{k+n-1}\right).$$

Áp dụng bổ đề:

$$\sqrt[n]{\frac{k+n}{k}} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{k+1}{k} + \frac{k+2}{k+1} + ... + \frac{k+n}{k+n-1}\right) = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + ... + \frac{1}{k+n-1}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left(n + \ln\left(\frac{k+n-1}{k-1}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n}\ln\left(1 + \frac{n}{k-1}\right).$$

Câu 4:



Xét tứ giác lồi ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của 4 cạnh AB, BC, CD, DA. K là trung điểm của đường chéo BD, đường thẳng qua K và song song với AC cắt 2 cạnh của tứ giác tại M, N. Không mất tổng quát, giả sử M thuộc cạnh AD, N thuộc cạnh CD.

Ta chứng minh đoạn MN trùng với tập hợp các điểm O sao cho diện tích của các tứ giác EBFO và HDGO bằng $\frac{S_{ABCD}}{4}$.

Ta có: $S_{ABO} = 2S_{EBO}$ và $S_{BCO} = 2S_{BFO}$.

Vậy $S_{ABCO} = 2S_{EBFO}$.

Tương tự $S_{AOCD} = 2S_{HOGD}$.

Giả sử O thuộc MN. Vì MN//AC nên $S_{ACO} = S_{AKC}$.

Suy ra $S_{ABCO} = S_{ABCK}$.

Mặt khác K là trung điểm BD nên $S_{ABK} = \frac{1}{2}S_{ABD}$ và $S_{BCK} = \frac{1}{2}S_{BCD}$

Do đó $S_{ABCK} = \frac{S_{ABCD}}{2}$.

Giả sử O không thuộc MN. Kí hiệu O' là giao điểm của OB và MN. Vì tính chất lồi của tứ giác ABCD nên O' thuộc đoạn thẳng MN. Theo chứng minh trên, ta chứng minh được $S_{ABCO'} = \frac{S_{ABCD}}{2}$. Do đó S_{ABCO} không thể bằng $\frac{S_{ABCD}}{2}$.

Lập luận tương tự với đường chéo AC.

Vậy điểm cần tìm là giao điểm của hai đường thẳng, mà mỗi đường đi qua trung điểm của một trong hai đường chéo và cùng phương với đường chéo còn lại. Dễ thấy giao điểm này nằm trong hình bình hành EFGH nên nằm trong ABCD.

Câu 5: Ta chứng minh bằng quy nạp theo $n \in N^*$ mệnh đề sau:

"Nếu hàm số f: $[0; n] \to R$ liên tục và thỏa $f(0) = f(n)$ thì tồn tại n cặp số $(a_i; b_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ với a_i, b_i thuộc đoạn $[0; n]$ sao cho với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ ta có $b_i - a_i$ là số nguyên dương và $f(a_i) = f(b_i)$" (Với n = 2010 ta có bài toán đã cho).

- với n = 1: Mệnh đề đúng (Lấy $a_1 = 0$, $b_1 = 1$)
- Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ $(k \in N^*)$, ta chứng minh mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Xét hàm số $f:[0; k + 1] \to R$ liên tục và thỏa $f(0) = f(k + 1)$. Ta chứng minh tồn tại k + 1 cặp số $(a_i; b_i)$ $(i = 1, 2,.., k + 1)$ với a_i, b_i thuộc đoạn $[0; k + 1]$ sao cho $b_i - a_i$ là số nguyên dương và $f(a_i) = f(b_i)$ với mọi $i = 1, 2,...,k + 1$.

Xét hàm số $g(x) = f(x + 1) - f(x)$.

Ta có f liên tục trên $[0; k + 1] \Rightarrow g(x)$ liên tục trên $[0; k]$.

$$\begin{aligned} \text{Mà } g(0) + g(1) + \ldots + g(k) &= [f(1) - f(0)] + [f(2) - f(1)] + \ldots + [f(k+1) - f(k)] \\ &= f(k + 1) - f(0) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Tồn tại $i, j \in \{0; 1; \ldots; k\}$ sao cho $g(i)g(j) \leqslant 0$

$\Rightarrow$ Tồn tại $x_0 \in [0; k]$ sao cho $g(x_0) = 0$ tức là $f(x_0 + 1) = f(x_0)$.

Lấy $a_1 = x_0$, $b_1 = x_0 + 1$ ta có $a_1, b_1 \in [0; k + 1]$, $b_1 - a_1 = 1 \in N^*$ và $f(a_1) = f(b_1)$ (a).

Xét hàm số $h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{khi } 0 \leqslant x \leqslant x_0 \\ f(x+1) & \text{khi } x_0 < x \leqslant k \end{cases}$.

Ta có f liên tục trên $[0; k + 1]$ và $f(x_0 + 1) = f(x_0) \Rightarrow h(x)$ liên tục trên $[0; k]$

Mặt khác $h(0) = f(0) = f(k + 1) = h(k)$ nên theo giả thiết quy nạp, tồn tại k cặp số $(c_i; d_i)$ $(i = 2, 3,\ldots, k + 1)$ với c_i, d_i thuộc đoạn $[0; k]$ sao cho với mọi $i = 2, 3, \ldots, k+1$, ta có $d_i - c_i$ là số nguyên dương và $h(c_i) = h(d_i)$.

Với mọi $i = 2, 3, \ldots, k + 1$, đặt

$$a_i = \begin{cases} c_i & \text{khi } 0 \leqslant c_i \leqslant x_0 \\ c_i + 1 & \text{khi } x_0 < c_i \leqslant k \end{cases} \text{ và } b_i = \begin{cases} d_i & \text{khi } 0 \leqslant d_i \leqslant x_0 \\ d_i + 1 & \text{khi } x_0 < d_i \leqslant k \end{cases},$$

Ta có $b_i - a_i = d_i - c_i$ hoặc $b_i - a_i = d_i - c_i + 1$

$\Rightarrow b_i - a_i$ là số nguyên dương $\forall\, i = 2, 3,.., k + 1$ (b)

- Nếu $c_i < d_i \leqslant x_0$: ta có $a_i = c_i$, $b_i = d_i$, $h(c_i) = h(d_i)$

  $\Rightarrow f(c_i) = f(d_i) \Rightarrow f(a_i) = f(b_i)$.

- Nếu $x_0 < c_i < d_i$: ta có $a_i = c_i + 1$, $b_i = d_i + 1$, $h(c_i) = h(d_i)$

  $\Rightarrow f\left(c_i + 1\right) = f\left(d_i + 1\right) \Rightarrow f(a_i) = f(b_i)$

- Nếu $c_i \leqslant x_0 < d_i$: ta có $a_i = c_i$, $b_i = d_i + 1$, $h(c_i) = h(d_i) \Rightarrow f\left(c_i\right) = f\left(d_i + 1\right)$

  $\Rightarrow f(a_i) = f(b_i)$.

  $\Rightarrow$ Ta luôn có $f(a_i) = f(b_i)$ với mọi $i = 2, 3, \ldots, k+1$ (c)

Từ (a), (b), (c) $\Rightarrow$ đpcm.

NĂM 2011

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO CẦN THƠ
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG

Câu 1

Điều kiện: $-1 \leqslant x \leqslant 1$

Đặt $x = \cos t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Ta được phương trình:

$$\sqrt{1 + \sin t}\left[\sqrt{(1 + \cos t)^3} - \sqrt{(1 - \cos t)^3}\right] = 2 + \sin t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right)^2}\left[\cos^3\frac{t}{2} - \sin^3\frac{t}{2}\right]2\sqrt{2} = 2 + \sin t$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}\right)\left(1 + \cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\right)2\sqrt{2} = 2 + \sin t$$

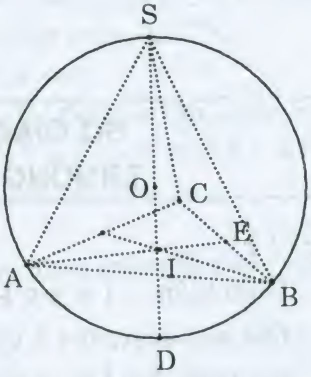
$$\Leftrightarrow \cos t(2+\sin t)\sqrt{2} = 2+\sin t \Leftrightarrow (2+\sin t)\left(\sqrt{2}\cos t - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 2

- Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.
  Giả sử tồn tại x, y nguyên sao cho $x^p + y^p = p[(p-1)!]^p$
- Từ giả thiết phản chứng, suy ra: $x^p + y^p \equiv 0 \pmod p$
  Lại theo định lý Fermat, ta có: $x^p \equiv x \pmod p$; $y^p \equiv y \pmod p$
  $\Rightarrow x^p + y^p \equiv x + y \pmod p$
  Do đó: $x + y \equiv 0 \pmod p$ hay $x \equiv -y \pmod p$ (1)
- Ngoài ra: $x^p + y^p = (x+y)(x^{p-1} - x^{p-2}.y + x^{p-3}.y^2 - ... + y^{p-1})$ (2)
  Từ (1) suy ra: $\begin{cases} x^{p-2k} \equiv -y^{p-2k} \pmod p \\ x^{p-(2k+1)} \equiv y^{p-(2k+1)} \pmod p \end{cases}$ (k nguyên dương)
  Do đó: $x^{p-1} - x^{p-2}.y + x^{p-3}.y^2 - ... + y^{p-1}$
  $\equiv y^{p-1} + y^{p-2}.y + y^{p-3}.y^2 + ... + y^{p-1} \pmod p$
  $\equiv p.y^{p-1} \pmod p \equiv 0 \pmod p$ (3)
- Từ (1), (2) và (3) suy ra: $x^p + y^p \equiv 0 \pmod{p^2}$
  Tức là: $p[(p-1)!]^p \equiv 0 \pmod{p^2}$
  $\Rightarrow [(p-1)!]^p \equiv 0 \pmod p$: Vô lý, vì: (p – 1)! không chia hết cho p

Câu 3



Gọi O là tâm mặt cầu, E là trung điểm BC.

– Chứng minh được tam giác ABC đều.

– Hạ SI vuông góc với mặt phẳng (ABC) và SI cắt mặt cầu tại D. Khi đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và S, O, I thẳng hàng.

– Đặt SA = l.

Trong tam giác vuông SAD có

$$SA^2 = SI.SD \Rightarrow SI = \frac{l^2}{2R} \qquad (1)$$

– Ta có $BC = 2BE = 2l.\sin\frac{\alpha}{2}$

– Ta có $IA = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2l.\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$

– Suy ra $SI = \sqrt{SA^2 - IA^2} = l\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ (2)

– Từ (1) và (2) ta có $l = 2R\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

– Ta có diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AE = \frac{1}{2}.2l.\sin\frac{\alpha}{2}.\frac{3}{2}AI = \sqrt{3}l^2.\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

– Vậy thể tích khối chóp S.ABC là:

$$V_{SABC} = \frac{8\sqrt{3}}{3}R^3.\sin^2\frac{\alpha}{2}.\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

– Đặt $x = \sin^2\frac{\alpha}{2}$, xét hàm số $f(x) = x\left(1 - \frac{4}{3}x\right)^2$ trên khoảng (0; 1)

– Lập bảng biến thiên thấy $f(x)$ đạt GTLN tại $x = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = 60^0$.

Câu 4

Gọi A’ là điểm đối xứng với A qua G.

Ta có $\Delta A_1B_1C_1$ đồng dạng $\Delta BA'G$, suy ra tỉ số đồng dạng là

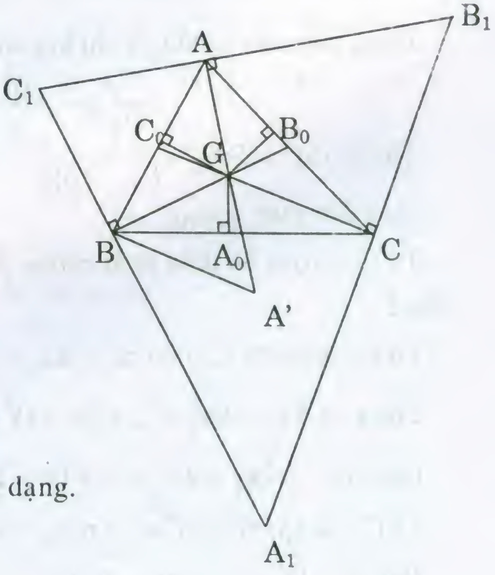
$$\frac{B_1C_1}{A'G} = \frac{B_1C_1}{AG} = \cot\widehat{AC_1G} + \cot\widehat{AB_1G}$$

Mà

$$\cot\widehat{AC_1G} = \cot\widehat{ABG}$$

$$= \frac{AB^2 + BG^2 - GA^2}{4S_{ABG}}$$

$$= \frac{3(AB^2 + BG^2 - GA^2)}{4S_{ABC}}$$



Tương tự

$$\cot\widehat{AB_1G} = \frac{3(AC^2 + CG^2 - GA^2)}{4S_{ABC}}$$

Suy ra

$$\cot\widehat{AC_1G} + \cot\widehat{AB_1G}$$

$$= \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{2S_{ABC}}$$ là tỉ số đồng dạng.

Mà

$$S_{A'BG} = \frac{S_{ABC}}{3}, \text{ ta được } \frac{3S_1}{S_{ABC}} = \left(\frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{2S_{ABC}}\right)^2$$

Ta có: $BC^2 + CA^2 + AB^2 = 9(R^2 - OG^2)$ (R là bán kính đường tròn (O))

Suy ra

$$S_{ABC}.S_1 = \frac{\left(BC^2 + CA^2 + AB^2\right)^2}{12} = \frac{81(R^2 - OG^2)^2}{12} = \frac{27}{4}(R^2 - OG^2)^2 \quad (1)$$

Mặt khác, theo định lí Euler cho tam giác Pedal $A_0B_0C_0$, ta có

$$\frac{S_{A_0B_0C_0}}{S_{ABC}} = \left|\frac{R^2 - OG^2}{4R^2}\right|$$

Do điểm G luôn nằm trong tam giác ABC nên $R \geqslant OG$

$$\Rightarrow \frac{S_{A_0B_0C_0}}{S_{ABC}} = \frac{R^2 - OG^2}{4R^2} \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có $S_0S_1 = \frac{27}{4}(R^2 - OG^2)^2 \frac{R^2 - OG^2}{4R^2} = \frac{27(R^2 - OG^2)^3}{16R^2}$ (3)

Ta có $S_1.S_0 = \frac{27(R^2 - OG^2)^3}{16R^2} \leqslant \frac{27R^4}{16} = \frac{27}{16}$ $(R = 1)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $O \equiv G$, hay ΔABC đều. (4)

Trong mọi tam giác ta luôn có $9OG^2 = R^2(1 - 8\cos A.\cos B.\cos C)$

Vì tam giác ABC không tù nên $8\cos A.\cos B.\cos C \geqslant 0 \Rightarrow OG^2 \leqslant \frac{R^2}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông (5)

Từ (3), (5) $\Rightarrow S_1S_0 \geqslant \dfrac{27\left(R^2 - \dfrac{R^2}{9}\right)^3}{16R^2} = \dfrac{32}{27}$ (do R = 1). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC vuông. (6)

Từ (4), (6) ta có điều phải chứng minh.

Câu 5

Từ (1), với n > 1, ta có $x_1 + 4x_2 + 9x_3 + ... + (n-1)^2 x_{n-1} = n^2(n-1)x_n$

Tức $x_1 + 4x_2 + 9x_3 + ... + (n-1)^2 x_{n-1} + n^2x_n = n^3x_n$ (2)

Lại có $x_1 + 4x_2 + 9x_3 + ... + (n-1)^2 x_{n-1} = (n-1)^3x_{n-1}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $n^2x_n = n^3x_n - (n-1)^3x_{n-1}$

Hay $(n-1)^3x_{n-1} = (n^3 - n^2)x_n$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{(n-1)^2}{n^2}x_{n-1} \Leftrightarrow x_n = \frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{(n-2)^2}{(n-1)^2}\cdots\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 x_1$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{1}{n^2}x_1$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(30n^2 - 4n + 2011\right)x_n =$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(30n^2 - 4n + 2011\right)\frac{x_1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(30n^2 - 4n + 2011\right)}{n^2}.\frac{1}{4} = \frac{30}{4}$$

Câu 6

Giả sử có $y_1, y_2 \in [1;+\infty) : f(y_1) = f(y_2) \Rightarrow xf(y_1) = xf(y_2) \;\; \forall x \in [1;+\infty)$

$$\Rightarrow f\left(xf(y_1)\right) = f\left(xf(y_2)\right) \Rightarrow y_1f(x) = y_2f(x) \Rightarrow y_1 = y_2$$

Vậy f đơn ánh

Từ điều kiện bài toán cho $x = y = 1$, ta được $f(f(1)) = f(1) \Rightarrow f(1) = 1$

Cũng từ điều kiện bài toán cho $x = 1$được $f(f(y)) = y \;\; \forall y \in [1;+\infty)$

Hay $f(f(x)) = x \;\; \forall x \in [1;+\infty)$

Từ điều kiện bài toán, thay y bởi f(y) ta được

$$f\left(xf(f(y))\right) = f(y)f(x) \;\; \forall x,y \in [1;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow f(xy) = f(y)f(x) \;\; \forall x,y \in [1;+\infty)$$

Mặt khác f tăng trên $[1;+\infty)$, thật vậy

$$\forall x,y \in [1;+\infty) : x > y$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} > 1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) > 1 \Rightarrow f(x) = f(\frac{x}{y}.y) = f(\frac{x}{y})f\left(y\right) > f(y)$$

Cuối cùng chứng minh $f(x) = x \;\; \forall x \in [1;+\infty)$

Nếu $f(x) > x$ thì $f(f(x)) > f(x) \Rightarrow x > f(x)$. Vô lí

Nếu $f(x) < x$ thì $f(f(x)) < f(x) \Rightarrow x < f(x)$. Vô lí

Thử lại $f(x) = x \;\; \forall x \in [1;+\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

NĂM 2012

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN
BÀ RỊA-VŨNG TÀU

Câu 1.

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 8 = y^3 + 1 \\ -6x^2 + 12x = 3y^2 + 3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^3 = (y+1)^3 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = y + 1 \\ 2x^2 + y^2 - 4x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 2(y+3)^2 + y^2 + y - 4(y+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ 3y^2 + 9y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Câu 2.

- Xét $x_{n+1} - 3 = \dfrac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6} - 3 = \dfrac{(x_n - 3)(x_n^3 + 3)}{(x_n^3 + 3) - (x_n - 3)}$ (*)

Bằng quy nạp chứng minh được $x_n > 3$, $\forall n \geqslant 1$

- Xét $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6} - x_n = \dfrac{x_n{}^2 - 6x_n + 9}{x_n^3 - x_n + 6}$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x_n = \frac{(x_n - 3)^2}{x_n^3 - x_n + 6} > 0, \quad \forall n \in N^*$$

Do đó (x_n) là dãy tăng và $4 = x_1 < x_2 < \ldots$

- Giả sử (x_n) bị chặn trên $\Rightarrow \lim x_n = a > 4$.

Do đó $a = \dfrac{a^4+9}{a^3-a+6} \Rightarrow a = 3 < 4$ (vô lí)

Suy ra (x_n) không bị chặn trên. Vậy $\lim x_n = +\infty$

- Từ (*) $\Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1}-3} = \dfrac{1}{x_n-3} - \dfrac{1}{x_n^3+3} \Rightarrow \dfrac{1}{x_n^3+3} = \dfrac{1}{x_n-3} - \dfrac{1}{x_{n+1}-3}$

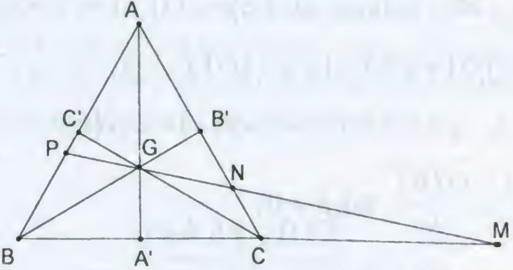
$$\Rightarrow y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^3+3} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k-3} - \frac{1}{x_{k+1}-3}\right) = \frac{1}{x_1-3} - \frac{1}{x_{n+1}-3} = 1 - \frac{1}{x_{n+1}-3}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x_{n+1}-3}\right) = 1.$$

Câu 3.

Không giảm tổng quát giả sử tam giác ABC có hướng dương.
Gọi A', B' C' lần lượt là trung điểm của BC, CA. AB

và đặt $(GA', d) = \alpha \pmod{\pi}$.



Khi đó ta có:

- $(GB', d) = (GB', GA') + (GA', d) = -\dfrac{2\pi}{3} + \alpha \pmod{\pi}$

$(GC', d) = (GC', GA') + (GA', d) = \dfrac{2\pi}{3} + \alpha \pmod{\pi}$.

- Từ đó suy ra:

$$T = GM.GN.GP = GA'.\frac{GM}{GA'}.GB'.\frac{GN}{GB'}.GC'.\frac{GP}{GC'}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^3}{\left|\cos\alpha.\cos\left(\alpha - \dfrac{2\pi}{3}\right).\cos\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right|} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18|\cos 3\alpha|} \geqslant \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$$

- Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \left|\cos 3\alpha\right| = 1 \Leftrightarrow \sin 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy d trùng với một trong 3 đường cao của tam giác.

Câu 4.

- $f(x) - f(y) = (x-y)g(x+y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

  Đặt $F(x) = f(x) - 1, F(0) = 0$.

  Khi đó (1) trở thành $F(x) - F(y) = (x-y)g(x+y)$. (2)

- Trong (2) cho $y = 0$ được $F(x) = xg(x)$.

  Khi đó (2) trở thành $xg(x) - yg(y) = (x-y)g(x+y)$. (3)

- Đặt $G(x) = g(x) - 1, G(0) = 0$.

  Ta viết lại (3): $xG(x) - yG(y) = (x-y)G(x+y)$ (4)

  Thay x bởi $-y$ được: $-yG(-y) = yG(y)$.

- Trong (4) thay y bởi $-y$ được: $xG(x) - yG(y) = (x+y)G(x-y)$.

  Do đó: $(x-y)G(x+y) = (x+y)G(x-y)$.

  Đặt $x + y = a,\ \ x - y = b$ được: $bG(a) = aG(b)$.

  Suy ra $\dfrac{G(a)}{a} = \dfrac{G(b)}{b}\ \ \forall a, b \neq 0$.

  Vậy $G(x) = mx\ \ \forall x \in R$ (m là số thực cho trước)

- $G(1) = g(1) - 1 = 1 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow G(x) = x \Rightarrow g(x) = x + 1\ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

  Từ đó có $f(x) = x^2 + x + 1\ \ \forall x \in R$

  Thử lại ta được $f(x) = x^2 + x + 1$ và $g(x) = x + 1$ là các hàm cần tìm.

Câu 5.

- Gọi p là một ước nguyên tố bất kì của n. Ta viết $n = p^r m$ với r và m là các số nguyên dương mà $(p, m) = 1$.

Ta có: $\varphi(n) = \varphi(p^r)\varphi(m) = p^{r-1}(p-1)\varphi(m)$ và $(n-1) = p^r m - 1$

Theo giả thiết: $\varphi(n) \big| (n-1) \Rightarrow p^{r-1} \big| (p^r m - 1) \Rightarrow r - 1 = 0$ (vì $(p, p^r m - 1) = 1$)

$\Rightarrow r = 1$ (và do đó $m > 1$ vì n là một hợp số).

Vậy n là một số hoàn toàn không chính phương và n có ít nhất hai ước nguyên tố.

- Giả sử $n = pq$ với p và q là hai số nguyên tố khác nhau. Khi đó:

$$(p-1)(q-1)=\varphi(p)\varphi(q)=\varphi(n)\,|\,(n-1)=pq-1$$

Suy ra $(p-1)\,|\,(pq-1)$.

Ta lại có: $(p-1)\,|\,(p-1)q \Rightarrow (p-1)\,|\,[(pq-1)-(p-1)q]=q-1$

Tương tự, $q-1\,|\,(p-1)$; vậy $p=q$, vô lí!

Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng n có ít nhất ba ước nguyên tố, điều phải chứng minh.

Câu 6.

Ta thấy mỗi hàng và mỗi cột đều chứa hai số 1 và hai số –1. Nếu 3 hàng đầu tiên đã được điền số sao cho tổng các số trong mỗi hàng bằng 0 và trong mỗi cột có không quá hai số bằng nhau thì ta có duy nhất một cách điền số vào hàng thứ tư.

Do đó ta chỉ tìm số cách điền số ba hàng đầu tiên.

Ở hàng thứ nhất và hàng thứ hai, mỗi hàng có $C_4^2=6$ cách điền số mà tổng các số bằng 0. Trong 6 cách điền số ở hàng thứ hai ta chia thành 3 trường hợp:

- Trường hợp 1: Cách điền số ở hàng thứ hai trùng với cách điền số ở hàng thứ nhất 0 vị trí: có 1 cách. Khi đó, có 6 cách điền dòng thứ ba.
- Trường hợp 2: Cách điền số ở hàng thứ hai trùng với cách điền số ở hàng thứ nhất 4 vị trí: có 1 cách. Khi đó, có 1 cách điền dòng thứ ba.
- Trường hợp 3: Cách điền số ở hàng thứ hai trùng với cách điền số ở hàng thứ nhất 2 vị trí: có 4 cách. Khi đó, mỗi cách điền dòng thứ hai, có 2 cách điền dòng thứ ba.

Vậy số cách điền số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: 6.1.6 + 6.1.1 + 6.4.2 = 90 cách.

NĂM 2013

Câu 1.

$$\begin{cases} x+3y^2-2y=0 & (1) \\ 36(x\sqrt{x}+3y^3)-27(4y^2-y)+(2\sqrt{3}-9)\sqrt{x}-1=0 \end{cases} \quad (I)$$

Điều kiện $x\ge 0$. Ta có (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{3x})^2+(3y-1)^2=1$.

Do đó ta đặt $\begin{cases} \sqrt{3x}=\sin t \\ 3y-1=\cos t \\ t\in[0;\pi] \end{cases}$.

$$(I)\Leftrightarrow\begin{cases} \sin^2 t+\cos^2 t=1 \\ 4\sqrt{3}\sin^3 t+4(1+\cos t)^3-12(1+\cos t)^2+ \\ \qquad\qquad +9(1+\cos t)+(2-3\sqrt{3})\sin t-1=0 \\ t\in[0;\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^3 t - 3\cos t + 4\sqrt{3}\sin^3 t - 3\sqrt{3}\sin t + 2\sin t = 0 \\ t \in [0;\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3t - \sqrt{3}\sin 3t + 2\sin t = 0 \\ t \in [0;\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(3t - \frac{\pi}{6}) = \sin t \\ t \in [0;\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ t = \frac{7\pi}{24} + \frac{m\pi}{2} \end{array}\right. (k, m \in \mathbb{Z}) \\ t \in [0;\pi] \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{24}; \frac{19\pi}{24}\right\}.$$

Do đó hệ (I) có ba nghiệm là:

$$* \; x = \frac{1}{3}\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{3}.\frac{1 - \cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{12} \text{ và } y = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{12}}{3} = \frac{4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{12}.$$

$$* \; x = \frac{1}{3}\sin^2\frac{7\pi}{24} = \frac{1}{3}.\frac{1 - \cos\frac{7\pi}{12}}{2} = \frac{4 - \sqrt{2} + \sqrt{6}}{24}$$

$$\text{và } y = \frac{1 + \cos\frac{7\pi}{24}}{3} = \frac{4 + \sqrt{2(4 + \sqrt{2} - \sqrt{6})}}{12}$$

$$* \; x = \frac{1}{3}\sin^2\frac{19\pi}{24} = \frac{1}{3}.\frac{1 + \cos\frac{7\pi}{12}}{2} = \frac{4 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{24}$$

$$\text{và } y = \frac{1 + \cos\frac{19\pi}{24}}{2} = \frac{4 - \sqrt{2(4 - \sqrt{2} + \sqrt{6})}}{12}.$$

Câu 2

Đặt $x_n = u_n - 3$

$$\Rightarrow u_n - 3 = \frac{-14(u_{n-1} - 3) - 51}{5(u_{n-1} - 3) + 18} \Leftrightarrow u_n = \frac{u_{n-1}}{5u_{n-1} + 3} \Rightarrow \frac{1}{u_n} = 5 + \frac{3}{u_{n-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} + \frac{5}{2} = 3\left(\frac{1}{u_{n-1}} + \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{u_n} + \frac{5}{2} = \left(\frac{1}{u_1} + \frac{5}{2}\right)3^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{11.3^{n-1} - 10}{4} \Rightarrow u_n = \frac{4}{11.3^{n-1} - 10}$$

$$\Rightarrow x_n = u_n - 3 = \frac{4}{11.3^{n-1} - 10} - 3.$$

a) $x_{2013} = \dfrac{4}{11.3^{2012} - 10} - 3$.

b) $\lim x_n = -3$.

Câu 3.

Gọi I là tâm, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Ta có: MN đi qua I $\Rightarrow S_{IAM} + S_{IAN} = \dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}}.S_{ABC}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}rAM + \frac{1}{2}rAN = \frac{AM.AN}{AB.AC}.\frac{1}{2}r\left(AB + BC + CA\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB.AC}{AN} + \frac{AB.AC}{AM} = AB + BC + CA$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB.CN}{AN} + \frac{AC.BM}{AM} = BC \Leftrightarrow \frac{AB.CN}{BC.AN} + \frac{AC.BM}{BC.AM} = 1.$$

Theo bất đẳng thức AM – GM

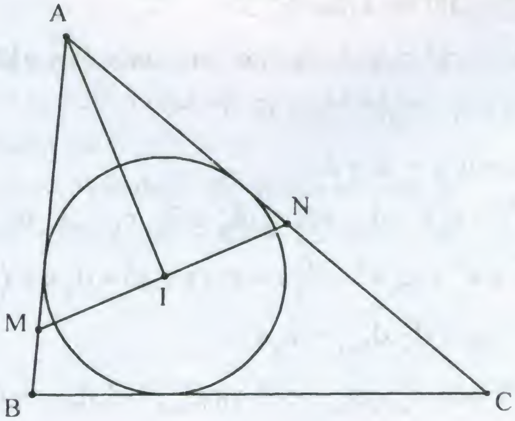
$$1 = \frac{AB.CN}{BC.AN} + \frac{AC.BM}{BC.AM} \geqslant 2\sqrt{\frac{AB.CN}{BC.AN}.\frac{AC.BM}{BC.AM}}$$

Suy ra $P = \dfrac{BM.CN}{AM.AN} \leqslant \dfrac{BC^2}{4AB.AC}$ hay $P \leqslant \dfrac{25}{84}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{AB.CN}{BC.AN} = \dfrac{AC.BM}{BC.AM} = \dfrac{1}{2}$

hay $\dfrac{AM}{BM} = 2\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{14}{5}$ và $\dfrac{AN}{CN} = 2\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{6}{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\dfrac{25}{84}$ khi $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{14}{5}$ và $\dfrac{AN}{CN} = \dfrac{6}{5}$.



Câu 4.

Đặt $2x + 2 = u - 1 \Rightarrow 4x + 7 = 2u + 1$ thay vào (ii) ta được

$$f(u-1) + 2g(2u+1) = \frac{u-5}{2} \text{ hay } f(x-1) + 2g(2x+1) = \frac{x-5}{2} \ (*)$$

Từ (*) và (i) ta được

$$g(2x+1) = \frac{x-5}{2} - 2x = -\frac{3}{4}(2x+1) - \frac{7}{4} \Rightarrow g(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}.$$

Thay $g(2x+1) = \frac{x-5}{2} - 2x$ vào (i), ta được

$$f(x-1) = 2x - \frac{x-5}{2} + 2x = \frac{7}{2}x + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}(x-1) + 6 \Rightarrow f(x) = \frac{7}{2}x + 6.$$

Vậy $f(x) = \frac{7}{2}x + 6$; $g(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$.

Câu 5.

Kí hiệu $[x]$ để chỉ phần nguyên của số thực x.

Ta có: $\{x\} = x - [x], \{x^2\} = x^2 - [x^2], \{x^{2013}\} = x^{2013} - [x^{2013}]$.

Theo đề bài ta có: $\{x\} = \{x^2\} = \{x^{2013}\}$.

Suy ra: $x^2 = x + a$ (1) và $x^{2013} = x + b$ (2), trong đó

$$a = [x^2] - [x], b = [x^{2013}] - [x].$$

Từ (1) ta có: $\Delta = 1 + 4a \geqslant 0 \Rightarrow a \geqslant 0$ (do $a \in \mathbb{Z}$), do đó $a \in N$

+ Nếu a = 0 thì $x^2 = x \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$ đều là số nguyên.

+ Nếu a > 0 thì khi đó tồn tại 2 số nguyên $c_n > 1$ và $d_n > 0$ sao cho:

$$x^n = c_n x + d_n, \forall n \geqslant 3. \ (*).$$

Thật vậy, với n = 3 thì từ (1) ta có:

$$x^2 = x + a \Rightarrow x^3 = x^2 + ax = x + a + ax = (1+a)x + a.$$

Ta chọn: $c_3 = 1 + a > 1, d_3 = a > 0$.

Giả sử (*) đúng với $n = k \geqslant 3$.

Tức là ta có: $x^k = c_k x + d_k$, với $c_k, d_k \in \mathbb{Z}$, $c_k > 1$, $d_k > 0$. (3)

Suy ra: $x^{k+1} = x.x^k = c_k x^2 + d_k x = c_k(x+a) + d_k x = (c_k + d_k)x + c_k a$.

Ta chọn: $c_{k+1} = c_k + d_k, d_{k+1} = c_k a$.

Do (3) và $a \in N^*$ nên $c_{k+1}, d_{k+1} \in \mathbb{Z}$ và $c_{k+1} > 1, d_{k+1} > 0$.

Vậy theo nguyên lí quy nạp ta có (*) là mệnh đề đúng.

Nói riêng, với $n = 2013$, tồn tại hai số nguyên $c_{2013} > 1$ và $d_{2013} > 0$ sao cho:

$$x^{2013} = c_{2013}x + d_{2013}.$$

Do đó, từ (2) suy ra:

$$c_{2013}x + d_{2013} = x + b \Rightarrow x = \frac{b - d_{2013}}{c_{2013} - 1} \in \mathbb{Q} \text{ (do } b \in \mathbb{Z}).$$

Như vậy x là một nghiệm hữu tỉ của phương trình: $X^2 - X - a = 0$ nên nó là một số nguyên. Vậy ta có đpcm.

Câu 6.

Giả sử $n = 2^a u$ và $k = 2^b v$, với u, v là các số lẻ. Ta sẽ chứng minh rằng máy tự động sau một khoảng thời gian hữu hạn sẽ dừng đối với các cặp số và chỉ các cặp số (n, k) với a = b.

Nếu a = b = 0, n và k lẻ, máy dừng.

Nếu a = b > 0 thì từ cặp (n, k) máy tự động có thể nhận được cặp

$$\left(2^{a-1}u, 2^{a-1}(u + 2v)\right) \text{ hoặc } \left(2^{a-1}(2u + v), 2^{a-1}v\right).$$

Vì các số $(u + 2v)$ và $(2u + v)$ lại là số lẻ, nên máy tự động làm giảm số mũ của 2 xuống đơn vị. Qua a bước thì số này trở nên bằng 0 và máy tự động sẽ dừng.

Bây giờ, xét $a \neq b$, không mất tổng quát, giả sử a < b.

- Nếu $a \leqslant b - 2$, thì từ cặp (n, k) máy tự động có thể nhận được cặp $\left(2^a(u + 2^{b-1-a}v), 2^{b-1}v\right)$ với các số mũ trong luỹ thừa của 2 khác nhau.
- Nếu $a = b - 1$, thì từ cặp (n, k) máy tự động có thể nhận được cặp

$$\left(2^a(u + v), 2^a v\right) = \left(2^{a+m}.\frac{u + v}{2^m}, \quad 2^a v\right), m \in \mathbb{N}^*, \text{ với } \frac{u + v}{2^m}$$

là số lẻ, lại có các số mũ trong luỹ thừa của 2 khác nhau. Dễ dàng thấy rằng trong trường hợp này máy tự động làm việc mãi mãi không dừng.

Chỉ còn việc đếm các cặp số $(n, k) = (2^a u, 2^a v)$ với $2^a.u \leqslant 2013, 2^a.v \leqslant 2013$

+ Có 1007 số lẻ không vượt quá 2013, bởi vậy số cặp với $a = 0$ bằng 1007^2;

+ 503 số không vượt quá 2013 chia hết cho 2 và không chia hết cho 4, bởi vậy số lượng cặp với $a = 1$ bằng 503^2; ...

+ Cứ tiếp tục như vậy, ta nhận được đáp số của bài toán là:

$$1007^2 + 503^2 + 252^2 + 126^2 + 63^2 + 31^2 + 16^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 = 1351709$$

PHẦN 2.

CÁC ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ THEO CHUYÊN ĐỀ

§1. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. ĐỀ BÀI

Bài 1.

Giải phương trình: $\log_2(\cos x + 1) = 2\cos x$.

Bài 2.

Giải phương trình: $\sqrt{2^{1-3\sin x}} + 1 + 3\sin x = \log_2(1 - 9\sin x)$.

Bài 3.

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$m^2n + 1 = m^2 + 2mn + 2m + n$

Bài 4.

Giải phương trình sau: $x+4n + \sqrt{x^{2n} + 2004} = 2004$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Bài 5.

Giải phương trình sau:

$$x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} + x = x^3\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1+\frac{1}{x^2}+1} \quad (\text{với } x > 0).$$

Bài 6.

Giải phương trình: $(\cos 72^0)^x + (\cos 36^0)^x = 3.2^{-x}$

Bài 7.

Giải phương trình: $\log_{30}(30^{\log_4 x} + 1) + \log_4(30^{\log_4 x} - 25) =$

$$= \log_{1975}(30^{\log_4 x} + 1946) + \log_{2004}(30^{\log_4 x} + 1975)$$

Bài 8.

Chứng minh phương trình: $\log x = \sin x$ có đúng một nghiệm trên $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Bài 9.

Cho phương trình:

$$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2^2}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2^3}\right) + \ldots + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2^n} = 0\right)$$

(n là tham số)

a) Chứng minh rằng với mỗi n nguyên, $n \geq 2$, phương trình có một nghiệm duy nhất trong khoảng $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$. Kí hiệu nghiệm đó là x_n.

b) Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Bài 10.

Cho phương trình $\log_{2004}(x^2 - x) = 0$. Gọi α, β với α (β là hai nghiệm của phương trình này. Coi dãy số Phi–bô–na–xi $(F_n)_{n=1}^{+\infty}$ với $F_1 = F_2 = 1$ và $F_{n+1} + F_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^n - \alpha^n)$.

Bài 11.

Giải phương trình: $(1 + \cos x)^{\log_{\cos x} \sin x} = (1 + \sin x)^{\log_{\sin x} \cos x}$.

Bài 12.

Giải phương trình: $x + \frac{3x}{\sqrt{1 + x^2}} = 1$.

Bài 13.

Giải phương trình: $\log_{2003} \frac{4x^2 + 2}{x^6 + x^2 + 1} = x^6 - 3x^2 - 1$.

Bài 14.

Tồn tại hay không các số thực a, b, c để phương trình sau có 4 nghiệm thực phân biệt:

$$x + \frac{5}{6} = a.e^{3x} + b.e^{2x} + c.e^{x} - \frac{1}{4}.e^{-x}$$

Bài 15. Giải phương trình sau:

$$\log_{2003}(2003^{2|\sin x|} + 4) = 2003^{(2003^{2|\sin x|} + 4^{|\cos x| - 5}} - 1 \qquad (1)$$

Bài 16.

Cho phương trình $x^{12} - 4x^4.\sqrt{x^n - 1} + 1 = 0$ (1)

Với giá trị nào của $n \in \mathbb{N}^*$ thì phương trình (1) có nghiệm.

Bài 17.

Với $n \in \mathbb{N}^*$ và tam giác ABC nhọn. Tìm nghiệm x của hệ

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt[n]{n}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}\right)^{x^2 - x} > 1 \\ \sin^x A \cos^{1-x} B + \sin^x B \cos^{1-x} C + \sin^x C \cos^{1-x} A < 3.2^{x-1} \end{cases}$$

Bài 18.

Giải phương trình

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \ldots + -1)^n . \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = 0$$

Bài 19.

Tìm các số a, b, c, d sao cho với mọi x, ta luôn có đẳng thức

$$(2x-1)^{40} - (ax+b)^{40} = (x^2+cx+d)^{20}.$$

Bài 20.

Giải bất phương trình:

$$7\sqrt{tgx}(\sin^2 x + 3\cos^2 x) \leqslant 6\sqrt[4]{3}(\sin^2 x + 4\cos^2 x)$$

Bài 21.

Giải phương trình: $\sqrt{2-\sqrt{2}(1+x)} + \sqrt[4]{2x} = 1$ (1)

Bài 22.

Giải phương trình:

$$\frac{16}{\sqrt{x-1986}} + \frac{1}{\sqrt{-2002}} = 10 - (\sqrt{x-1986} + \sqrt{y-2002}) \quad (1)$$

B. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Đặt $t = \cos x$; $-1 \le t \le 1$

Phương trình trở thành:

$$\log_2(t+1) = 2t$$

$$\Leftrightarrow 4^t = t + 1$$

$$\Leftrightarrow 4^t - t - 1 = 0$$

Xét hàm số $f(t) = 4^t - t - 1$; $-1 < t \le 1$

$$f'(t) = 4^t \ln 4 - 1$$

$$f''(t) = 4^t \ln^2 4 > 0$$

Ta có phương trình f(t) = 0 không có qua hai nghiệm phân biệt. Thật vậy, nếu có ít nhất ba nghiệm phân biệt thì theo định lí Rô–lơ (Rolle), phương trình f′(t) = 0 có ít nhất hai nghiệm phân biệt và phương trình f″(t) có nghiệm.

Ta có $f(0) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

Do đó phương trình f(t) = 0 có đúng 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$

Bài 2.

* Đặt $t = \frac{1 - 3\sin x}{2} \Rightarrow 2\sin x = 1 - 2t,\ 2 \geq t > \frac{1}{3}$.

Phương trình trở thành: $2^t - 2t + 1 = \log_2(3t - 1)$. (1)

- Đặt $u = \log_2(3t - 1) \Rightarrow 2^n = 3t - 1$ và ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2^t - 2t + 1 = u \\ 2^u - 3t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^t + t = 2^u + u \\ 2^u - 3t + 1 = 0 \end{cases}$$

* Hàm số $f(x) = 2^x + x$ tăng trong $\mathbb{R}$ nên hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = u \\ 2^t - 3t + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

* Hàm số $g(t) = 2^t - 3t + 1$ giảm trong $\left(\frac{1}{2};\ 2\right]$, $g(1) = 0$.

Vậy (2) có nghiệm duy nhất $u = t = 1$.

* Suy ra: $\sin x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\left(\sin\alpha = -\frac{1}{3},\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$

Bài 3. Ta có:

$m^2(n - 1) = 2m(n + 1) + n - 1 = 2m(n - 1) + 4m + (n - 1)$

Đặt $k = n - 1$ thì đẳng thức trở thành

$m^2k = 2mk + 4m + k$ (*)

Nếu $k = 0$, thì $m = 0$. Nó cho nghiệm $m = 0$, $n = 1$. Còn nếu $m = 0$, thì $k = 0$, nên ta có thể giả định m và k đều khác 0.

Từ (*) m phải chia hết k và k phải chia hết 4m. Đặt $k = mh$. Thế thì h chia hết 4, suy ra $h = \pm 1, \pm 2$ hay ± 4.

Ta cũng có thể viết lại (*) dưới dạng

$$(m^2 - 2m - 1)h - 4 = 0$$

* Nếu $h = 1$, thì ta được $m^2 - 2m - 5 = 0$, nó không có nghiệm nguyên.

* Nếu $h = 1$, thì ta được $m^2 - 2m + 3 = 0$, nó không có nghiệm nguyên.

* Nếu $h = 2$, thì $m^2 - 2m + 3 = 0$, nó cho nghiệm $m = -1$ hay 3.

* Nếu $h = -2$, thì $m^2 - 2m - 2 = 0$, không có nghiệm nguyên.

* Nếu h = 4, thì $m^2 - 2m - 2 = 0$, không có nghiệm nguyên.

* nếu h = –4, thì $m^2 - 2m = 0$, cho các nghiệm m = 0, 2.

Vậy nghiệm của phương trình là

$$(m, n) = (-1, -1), (0, 1), (1, -1), (2, -7), \text{ hay } (3, 7).$$

Bài 4.

Đặt $t = x^{2n} \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$t^2 + \sqrt{t + 2004} = 2004$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t + \frac{1}{4} = t + 2004 - \sqrt{t + 2004} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{t + 2004} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow t + \frac{1}{2} = \sqrt{t + 2004} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow t + 1 = \sqrt{t + 2004}$$

$$\Leftrightarrow (t + 1)^2 = t + 2004 \Leftrightarrow t^2 + t - 2003 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-1 + \sqrt{8013}}{2} \\ t = \dfrac{-1 - \sqrt{8013}}{2} < 0 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Như vậy: $t = \dfrac{-1 + \sqrt{8013}}{2}$.

$$\Leftrightarrow x^{2n} = \frac{-1 + \sqrt{8013}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[2n]{\dfrac{-1 + \sqrt{8013}}{2}} \\ x = -\sqrt[2n]{\dfrac{-1 + \sqrt{8013}}{2}} \end{array}\right., (n \in \mathbb{N}^*).$$

Bài 5.

Phương trình tương đương

$$x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1+\frac{1}{x^2}} = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - (x^3 + x)\ln\left(1 + \frac{1}{x^2} = 1 - x\right)$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 = x\left[(x^2 + 1)\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 1\right]$$

$$\Leftrightarrow x\left[(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]=x^2\left[(x^2+1)\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-1\right]$$

(Do $x > 0$).   9*)

Đặt $f(t)=t\left[(t+1)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-1\right]$, với $t > 0$.

$$f'(t)=(2t+1)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-2=(2t+1)\left[\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right]$$

$$=(2t+1)\,g(t)\text{ với }g(t)=\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t+\frac{1}{2}}$$

$$g'(t)=\frac{-1}{t(t+1)}+\frac{1}{t^2+t+\frac{1}{4}}=-\frac{1}{4t(t+1)\left(t^2+t+\frac{1}{4}\right)}<0,\ \forall t>0$$

Vậy $g(t)$ là hàm số giảm trên $(0; +\infty)$ và

$$\lim_{n\to\infty}(t)=\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right]=0$$

$\Rightarrow g(t) > 0\ \forall\ t > 0$ và vì $2t + 1 > 0\ \forall t > 0 \Rightarrow f(t) > 0\ \forall t > 0$

$\Rightarrow f(t)$ tăng trên $(0; +\infty)$.

Mặt khác $(*) \Leftrightarrow f(x) = f(x^2) \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x = 1$ (vì $x > 0$).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 6.

$$(\cos 72^0)^x+(\cos 36^0)^x=3.2^{-x} \qquad (1)$$

+ $(1) \Leftrightarrow (2\cos 72^0)^x + (2\cos 36^0)^x = 3$

Vì $2\cos 72^0.2\cos 36^0=\dfrac{\sin 144^0}{\sin 36^0}=1$

nên $2\cos 72^0$ và $2\cos 36^0$ là nghiệm của

$$t+\frac{1}{t}=3 \Leftrightarrow t^2-3t+1=0\ \text{ với } t=(2\cos 72^0)^x$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee t=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

+ Ta biết $\sin 54^0 = \cos 36^0 \Leftrightarrow \sin 3(18^0) = \cos 2(18^0)$, giải ra được

$\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\Rightarrow 2\cos 72^0 = 2\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

+ Ta biết $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$ và $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{-2}$$

+ $t = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow (2\cos 72^0)^x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

+ $t = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow (2\cos 72^0)^x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{-2}$

$$\Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy (1) có nghiệm $x = \pm 2$.

Bài 7.

Điều kiện : $x > 0$. Đặt $t = 30^{\log_4 x}$

Phương trình tương đương với $\log_{30}\dfrac{t+1}{30} + \log_4\dfrac{t-25}{4} =$

$$= \log_{1975}\frac{t+1946}{1975} + \log_{2004}\frac{t+1975}{2004} \quad (t > 25).$$

Dễ thấy $t = 29$ là nghiệm của phương trình.

Nếu $t > 29$ thì $\begin{cases} \dfrac{t+1}{30} > \dfrac{t+1975}{2004} > 1 \\ \dfrac{t-25}{4} > \dfrac{t+1946}{1975} > 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_{30}\dfrac{t+1}{30} > \log_{30}\dfrac{t+1975}{2004} > \log_{2004}\dfrac{t+1975}{2004} \\ \log_4\dfrac{t-25}{4} > \log_4\dfrac{t+1946}{1975} > \log_{1975}\dfrac{t+1946}{1975} \end{cases} \Rightarrow \text{VT} > \text{VP}$$

Nếu $t < 29$ thì $\begin{cases} \dfrac{t+1}{30} < \dfrac{t+1975}{2004} < 1 \\ \dfrac{t-25}{4} < \dfrac{t+1946}{1975} < 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_{30}\dfrac{t+1}{30} < \log_{30}\dfrac{t+1975}{2004} < \log_{2004}\dfrac{t+1975}{2004} \\ \log_{4}\dfrac{t-25}{4} < \log_{4}\dfrac{t+1946}{1975} < \log_{1975}\dfrac{t+1946}{1975} \end{cases} \Rightarrow \text{VT} = \text{VP}$$

$t = 29 \Leftrightarrow \log_4 x = \log_{30}29 \Leftrightarrow x = 4^{\log_{30}29}$

Vậy $x = 29^{\log_{30}4}$

Bài 8.

Nhận xét: với $x \in \left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$ thì $\sin x \le 0$ và $\log x > 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm trên $\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$.

Do đó ta chỉ xét phương trình trên $\left[2\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Xét hàm số $f(x) = \log x - \sin x$, $x \in \left[2\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{\log e}{x} - \cos x$; $f'(x) = -\dfrac{\log e}{x^2} + \sin x$; $f''(x) = \dfrac{2\log e}{x^3} + \cos x$

$\forall x \in \left[2\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$ thì $\cos x \ge 0$; $\dfrac{2\log e}{x^3} > 0 \Rightarrow f''(x) = \dfrac{2\log e}{x^3} + \cos x > 0$

$\Rightarrow f''(x)$ đồng biến trên $\left[2\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Lại có $f''(2\pi) < 0$; $f''\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) > 0 \Rightarrow \exists c \in \left[2\pi;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$, c duy nhất sao cho $f''(x) = 0$.

Điều đó có nghĩa là; Với $x \in [2\pi; c]$ thì $f'(x) \le 0$ và $x \in \left(c;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$ thì $f'(x) > 0$.

$\Rightarrow$ Trên $[2\pi; c]$ thì $f'(x)$ nghịch biến; và trên $\left(c;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$ thì $f'(x)$ đồng biến.

Mà $f'(2\pi) = \dfrac{\log e}{2\pi} - 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0\ \forall x \in (2\pi; c)$

và $f'(x) \le \dfrac{\log e}{2\pi} - 1 < 0$.

Trên $\left(c;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$ có $f'(c) < 0$ và $f\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) = \dfrac{2\log e}{5\pi} > 0$

$\Rightarrow \exists d \in \left(c;\ \dfrac{5\pi}{2}\right]$ sao cho $f'(d) = 0$.

Mà f′(x) tăng trên $\left(c;\ \frac{5\pi}{2}\right]$ ⇒ $f'(x) < 0$ với $x \in (c; d)$ và $f'(x) > 0$ với $x \in \left(d;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

⇒ $f'(x) < 0$ với $x \in (2\pi; d)$ và $f'(x) > 0$ với $x \in \left(d;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	2π		d		$\frac{5\pi}{2}$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$\lg 2\pi > 0$	↘	$f(d) < 0$	↗	$\lg\frac{5\pi}{2} - 1 < 0$

Vì $f(2\pi) > 0$, $f\left(\frac{5\pi}{2}\right) < 0 \Rightarrow f(d) < 0 \Rightarrow f(2\pi), f(d) < 0$

⇒ $\exists x_0 \in (2\pi; d)$ thoả mãn: $f(x_0) = 0$

⇒ Phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Bài 9.

a) Với n nguyên, $n \geq 2$, xét hàm số:

$$f_n(x) = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2^2}\right) + \ldots + \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2^n}\right)$$

Hàm số $f_n(x)$ liên tục trên $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$ và có:

$$f'_n(x) = \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2^2}\right)} + \ldots + \frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{2^n} > 0\right)},$$

$\forall x \in \left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$

nên $f_n(x)$ đồng biến trên $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$.

Hơn nữa: $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) - \infty$ và $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} f_n(x) = +\infty$'

Do đó phương trình $f_n(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $x_n \in \left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Theo kết quả trên với $n \geq 2$, phương trình $f_n(x) = 0$ có một nghiệm $x_n \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và phương trình $f_{n+1}(x) = 0$ có một nghiệm $x_{n+1} \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$,

$$\text{Ta có: } f_{n+1}(x_n) = \text{tg}\left(x_n + \frac{\pi}{2}\right) + \text{tg}\left(x_n + \frac{\pi}{2^2}\right) + \dots + \left(x_n + \frac{\pi}{2^n} + \right)$$

$$+ \text{tg}\left(x_n + \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \text{tg}\left(x_n + \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) > 0$$

Suy ra $f_{n+1}(x_{n+1}) < f_{n+1}(x_n) \Rightarrow x_{n+1} < x_n$.

Như vậy (x_n) giảm và bị chặn dưới bởi 0, nên có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Bài 10.

Phương trình tương đương với $x^2 - x - 1 = 0$ $(x < 0 \vee x > 1)$

Ta có $\beta^{k+1} = \beta^k + \beta^{k-1}$ và $\alpha^{k+1} = \alpha^k + \alpha^{k-1} =$ (*)

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n.

* Dễ thấy $F_1 = F_2 = 1$: đúng.

- Giả sử $F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^k - \alpha^k)$ và $F_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{k-1} - \alpha^{k-1})$ với mọi $k \geq 2$.

$$\text{Suy ra } F_{k+1} = F_k = F_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\beta^k + \beta^{k-1}) - (\alpha_k + \alpha^{k-1})\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}) \text{ (do (*))}$$

* Vậy, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^n - \alpha^n)$.

Bài 11.

Điều kiện: $2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Ta có: $1 + \cos x > 0$; $1 + \sin x > 0$

Phương trình $\Leftrightarrow \log_{\cos x}\sin x.\ln(1 + \cos x) = \log_{\sin x}\cos x.\ln(1 + \sin x)$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x}\ln(1 + \cos x) = \frac{\ln \cos x}{\ln \sin x}\ln(1 + \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\ln \sin x)^2}{\ln(1 + \sin x)} = \frac{(\ln \cos x)^2}{\ln(1 + \cos x)}$$

Đặt $f(t) = \frac{(\ln t)^2}{\ln(1 + t)} = \frac{\ln^2 t}{\ln(1 + t)}$

Hàm f(t) giảm trên (0; 1)

Phương trình $\Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Bài 12.

$$x + \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = \frac{3x}{1-x}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 1 + x^2 = \dfrac{9x^2}{(1-x)^2} \end{cases} \qquad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (1 + x^2)(1 + x^2 - 2x) = 9x^2$$

Chia hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 7 = 0 \qquad (2)$$

Đặt $\quad t = x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 - \sqrt{10} \\ t = 1 + \sqrt{10} \end{array}\right.$$

Vì $t \geq 2$ nên nhận nghiệm $t = 1 + \sqrt{10}$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{(1+\sqrt{10}) - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}{2} & (a) \\ x = \dfrac{(1+\sqrt{10}) + \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}{2} & (b) \end{array}\right.$$

Do $0 < x < 1$ nên phương trình nhận nghiệm (a).

Vậy phương trình có một nghiệm $x = \dfrac{(1+\sqrt{10}) - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}{2}$.

Bài 13.

Đặt $a = 4x^2 + 2 > 0$, $b = x+6 + x^2 + 1 > 0$. Phương trình có dạng:

$$\log_{2003}\frac{a}{b} = b - a \Leftrightarrow xab = \frac{2003^b}{2003^a} \Leftrightarrow a = b$$

(Hàm số $f(x) = x.2003^x$ tăng trong $\mathbb{R}^+$).

Giải phương trình $x^6 - 3x^2 - 1 = 0$. Đặt $u = x^2$ phương trình thành: $u^3 - 3u - 1 = 0$. Với $f(u) = u^3 - 3u - 1$, ta thấy $f(-2) = -3$; $f(-1) = 2$; $f(0) = -1$; $f(2) = 1$ và $u \geq 0$ nên phương trình này chỉ có nghiệm u trong khoảng (0; 2) nên đặt u = 2cost, $0 < t < \frac{\pi}{2}$, ta đặt phương trình: $\cos 3t = \frac{1}{2}$.

Phương trình có nghiệm là $x = \pm\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}$

Bài 14.

* Đặt $t = e^{-x} \Rightarrow$ mỗi giá trị t > 0 cho 1 nghiệm x = –lnt.

Phương trình trở thành: $t^3.\ln t - \frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{6}t^3 + a + bt + ct^2 = 0$.

* Xét $f(t) = t^3.\ln t - \frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{6}t^3 + a + bt + ct^2$ liên tục trong $(0; +\infty)$

$$f'(t) = 3t^2.\ln t - t^3 - \frac{3}{2}t^2 + b + 2ct$$

$$f''(t) = 6t.\ln t - 3t^2 + 2c$$

$$f'''(t) = 6(\ln t + 1 - t)$$

* Chứng minh: $f'''(t) \le 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow f''(t)$ nghịch biến trong $(0; +\infty)$.

* Áp dụng định lí Rô–lơ:

$\forall$a, b, c ta có $f''(t)$ có nhiều nhất 1 nghiệm t > 0.

$\Rightarrow f'(t)$ có nhiều nhất 2 nghiệm t > 0.

$\Rightarrow f(t)$ có nhiều nhất 3 nghiệm t > 0.

Vậy f(t) không thể có 4 nghiệm dương (phân biệt) hay không tồn tại a, b, c để phương trình đã cho có 4 nghiệm thực phân biệt.

Ghi chú: Học sinh có thể đặt $t = e^x$, và tính đến $f'''(t) = 24at + 6b + \frac{1}{t^2}$; f'' có thể đổi dấu trong $(0; +\infty)$, tuỳ theo a, b... nên không thể kết luận về số tối đa nghiệm của f. Trường hợp này không cho điểm hoặc chỉ cho một điểm tượng trưng.

Bài 15.

Phương trình có nghĩa với mọi x. Vì:

$$2003^{2|\sin x|} + 4^{|\cos x|} \ge 4^{4|\sin x|} + \frac{1}{4}4^{|\cos x|} + \frac{1}{4}4^{|\cos x|}$$

$$+ \frac{1}{4}4^{|\cos x|} + \frac{1}{4}4^{|\cos x|} \geqslant 5\sqrt[5]{4^{4(|\sin x| + |\cos x| - 1)}}.$$

mà $|\sin x| + |\cos x| \ge \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Do đó: $2003^{2|\sin x|} + 4^{|\cos x|} \geqslant 5 \Rightarrow 2003^{2|\sin x|} + 4^{|\cos x|} - 4 > 0$

Đặt $2003^{2|\sin x|} + 4^{|\cos x|} - 5 = t,\ t \geqslant 0$.

Ta có phương trình (1) trở thành: $\log_{2003}(t + 1) = 2003^t - 1$.

Lại đặt $\log_{2003}(t+1) = y \Rightarrow t + 1 = 2003^y$, ta được hệ:

$$(\text{I}): \begin{cases} 2003^t = y + 1 \\ 2003^y = t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2003^t = y + 1 \\ 2003^t - 2003^y = y - t \ (*) \end{cases}$$

Nếu $t > y$ thì $2003^t - 2003^y > 0 > y - t$;

Nếu $t < y$ thì $2003^t - 2003^y < 0 < y - t$;

Vậy (*) có nghiệm $t = t$

$$\text{Vậy hệ (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t \\ 2003^t = t + 1 (**) \end{cases}$$

Xét hàm số $f(t = 2003^t - t - 1(t \geq 0)$;

$$f'(t) = 2003^t.\ln 2003 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \log_{2003}\left(\frac{1}{\ln 2003}\right) = t_1$$

Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$		t_1			$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$		$+$
$f(t)$	▨ ↘	▨	▨	▨ ↗	0	↗

Từ đó $t = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình (**) thoả mãn điều kiện $t \geq 0$.

$$\Rightarrow 2003^{2|\sin x|} + 4^{|\cos x|} - 5 = 0 \Leftrightarrow 2003^{2|\sin x|} + 4^{|\cos x|} = 5$$

Theo trên ta có: $2003^{2|\sin x|} + 4^{|\cos x|} \geqslant 5$; Dấu "=" xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2003^{2|\sin x|} = 4^{4|\sin x|} \\ 4^{4|\sin x|} = \dfrac{1}{4}4^{|\sin x|} \\ |\sin x| + |\cos x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 16.

Điều kiện: $x^n - 1 \geq 0$ (2)

Ta thấy rằng:

- $x = 1$ không là nghiệm của (1)
- Với n chẵn thì nếu x_0 là một nghiệm của (1) thì $(-x_0)$ cũng là một nghiệm của (1).
- Với n lẻ thì $x \geq 1$ phương trình (1) mới có nghĩa.

Do đó ta chỉ cần xét với $x > 1$ (*)

Với (*) ta có $x^4 + 1 > 2x^2$ (3)

$$x^8 - x^4 + 1 = x^4.(x^4 - 1) + 1 > 2x^2\sqrt{x^4 - 1} \qquad (4)$$

Nhân (3) và (4) ta có:

$$(x^4 + 1)(x^8 - x^4 + 1) > 4x^4.\sqrt{x^4 - 1}$$

$$\Leftrightarrow x^{12} + 1 > 4x^4.\sqrt{x^4 - 1} \qquad (5)$$

Từ (5) thì với $n = 4$ phương trình (1) vô nghiệm và do $x > 1$ nên với $n < 4$ thì phương trình (1) cũng vô nghiệm.

+ Với $n = 5$.

Xét hàm số $f(x) = x^{12} + 1 - 4x^4.\sqrt{x^5 - 1}$

Ta có $f(1) = 2 > 0$.

Với $x = 1,2$ ta có $x^{12} + 1 < 10$ và $4x^4.\sqrt{x^5 - 1} > 10$

Nên $f(1, 2) < 0$

Do đó: $f(1), f(1, 2) < 0$

Do $f(x)$ liên tục trên $(1; +\infty)$ suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (1; 1; 2)$.

+ Với $n > 5$.

Xét hàm số: $f(x) = x^{12} - 4x^4.\sqrt{x^n - 1} + 1$

Ta có: $f(1) = 2 > 0$

Với $x = 1, 2$ thì $x^{12} + 1 < 10$ và $4x^4.\sqrt{x^n - 1} > 4x^4\sqrt{x^5 - 1} > 10$

Vậy $f(1, 2) < 0$

Do đó lí luận như trên thì với $n > 5$ phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm $x_0 \in (1; 1, 2)$

Vậy: với $n \geq 5$ thì (1) có nghiệm.

Bài 17.

Do $\sqrt{n} + n = \dfrac{\sqrt{n}}{2} + \dfrac{\sqrt{n}}{2} + 2 + 2 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n-4} > n\sqrt[n]{n}$

nên $1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt[n]{n}$

Do đó từ bất phương trình đầu ta có: $0 < x < 1$.

Với $0 < x < 1$: Xét bất phương trình thứ 2:

Do ΔABC nhọn nên $0 < \sin A, \sin B, \sin C, \cos A, \cos B, \cos C < 1$ sử dụng bất đẳng thức Cô–si suy rộng ta có:

$$\left(\frac{\sin A}{\sin A + \sin B + \sin C}\right)^x \left(\frac{\cos B}{\cos A + \cos B + \cos C}\right)^{1-x} \leqslant$$

$$\leq \frac{x.\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}+\frac{(1-x)\cos B}{\cos A+\cos B+\cos C}$$

$$\left(\frac{\sin B}{\sin A+\sin B+\sin C}\right)^{x}\left(\frac{\cos C}{\cos A+\cos B+\cos C}\right)^{1-x} \leq$$

$$\leq \frac{x.\sin B}{\sin A+\sin B+\sin C}+\frac{(1-x)\cos C}{\cos A+\cos B+\cos C}$$

$$\left(\frac{\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}\right)^{x}\left(\frac{\cos A}{\cos A+\cos B+\cos C}\right)^{1-x} \leq$$

$$\leq \frac{x.\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}+\frac{(1-x)\cos A}{\cos A+\cos B+\cos C}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$\sin^2 A\cos^{1-x} B+\sin^x B\cos^{1-x} C+\sin^x C\cos^{1-x} A \leq$$

$$\leq \left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}\right) < 2 \text{ va2 } 1 < \cos A+\cos B+\cos C$$

$\leq \frac{3}{2}$, nên ta suy ra:

$$\sin^x A\cos^{1-x} B+\sin^x B\cos^{1-x} C+\sin^x C\cos^{1-x} A < 3.2^{x-1}$$

Do đó bất phương trình thứ 2 luôn thỏa mãn với $0 < x < 1$.

Kết luận: nghiệm của hệ là $0 < x < 1$.

Bài 18.

Đặt vế trái là $f_n(x)$ có bậc là n, ta sẽ chứng minh rằng phương trình $f_n(x) = 0$ có n nghiệm là $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; ...; $x_n = n$ với $n \geq 1$.

Với $n = 1$, $f_1(x) = 1 - x$ có nghiệm là $x_1 = 1$.

Giả sử phương trình $f_n(x) = 0$ có n nghiệm là $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; ...; $x_n = n$ với $n \geq 1$.

Ta có $f_{n+1}(x) = f_n(x) + (-1)^{n+1}\dfrac{x(x-1)...(x-n+1)(x-n)}{(n+1)!}$

Suy ra $f_{n+1}(1) = f_n(1) + 0 = 0$

Chứng minh tương tự ta được $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; ...; $x_n = n$ là nghiệm của phương trình $f_{n+1}(x) = 0$.

Ta sẽ chứng minh rằng $x_{n+1} = n + 1$ là nghiệm của phương trình $f_{n+1}(x) = 0$.

Ta có $\quad f_{n+1}(x) = 1 - \dfrac{n+1}{1} + \dfrac{(n+1).n}{1.2} - \dfrac{(n+1).n.(n-1)}{1.2.3} + ... +$

$$+ (-1)^{n+1}.\frac{(n+1).n.(n-1)...2.1}{n!}$$

$$= C_{n+1}^0 - C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 - C_{n+1}^3 + ... = (-1)^{n+1}.C_{n+1}^{n+1}$$

$$= (1 - 1)^{n+1} = 0$$

Vậy phương trình $f_{n+1}(x) = 0$ có n + 1 nghiệm là $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; ...; $x_n = n$; $x_{n+1} = n + 1$.

Bài 19.

Đặt đẳng thức của đề bài là (1)

Với $x = \frac{1}{2}$: (1) $\Rightarrow \left(\frac{a}{2} + b\right)^{40} + \left(\frac{1}{4} + \frac{c}{2} + d\right)^{20} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ \frac{c}{2} + d = -\frac{1}{4} \end{cases}$ (2)

Thay a = –2b vào (1) ta được:

$$(2x - 1)^{40} = (-2bx + b)^{40} + (x^2 + cx + d)^{20}, \forall x$$

Hệ số x^{40} của hai vế là:

$$2^{40} \text{ và } 2^{40}.b^{40} + 1 \text{ suy ra } 2^{40} = 2^{40}.b^{40} + 1 \Rightarrow b = \pm\frac{1}{2}\sqrt[40]{2^{40} - 1}$$

đẳng thức (1) trở thành:

$(2x - 1)+40 = b^{40}(-2x + 1)+40 + (x^2 + cx + d)^{20}, \forall x$

$\Leftrightarrow (2x - 1)^{40}(1 - b^{40}) = (x^2 + cx + d)^{20}$

$\Leftrightarrow (2x - 1)^{40}\frac{1}{2^{40}} = (x^2 + cx + d)^{20}, \forall x$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^{40} = (x^2 + cx + d)^{20} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \pm\,(x^2 + cd + d), \forall x$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = (x^2 + cx + d), \forall x \Leftrightarrow c = -1$ và $d = \frac{1}{4}$ thoả mãn (2)

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -(x^2 + cx + d), \forall x$ không có c, d thoả mãn yêu cầu bài toán.

Kết luận: $a = -2b$, $b = \pm\frac{1}{2}\sqrt[40]{2^{40} - 1}$, $c = -1$ và $d = \frac{1}{4}$.

Bài 20.

Điều kiện: cosx ≠ 0. Chia hai vế cho $\cos^2 x$, ta được:

$$7\sqrt{\text{tg}x}(\text{tg}^2x + 3) \leqslant 6\sqrt[4]{3}(\text{tg}^2x + 4)$$

Đặt $t = \text{tg}x \geq 0$, bất phương trình trở thành:

$$7\sqrt{t}\,\frac{t^2 + 3}{t^2 = 4} \leqslant 6\sqrt[4]{3}$$

Đặt VT = f(t) với $t \geq 0$, ta có $\begin{cases} (\sqrt{t}) \text{ hàm } \nearrow \text{ trên } [0; +\infty) \\ \frac{t^2 + 3}{t^2 + 4} \text{ hàm } \nearrow \text{ trên } [0; +\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow$ f(t) là hàm ↗ trên $[0; +\infty)$ và đo được $t = \sqrt{3}$ thì $f(t) = 6\sqrt[4]{3}$.

t	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
f(t)	↗	$6\sqrt[4]{3}$	↗

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $f(t) \le 6\sqrt[4]{3} \Leftrightarrow t \le \sqrt{3}$.

Từ đó $0 \le \text{tg}x \le \sqrt{3} \Leftrightarrow k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 21.

Điều kiện: $0 \le x \le \sqrt{2} - 1$.

Đặt $\sqrt{2 - \sqrt{2}(1 + x)} = \sqrt[4]{2}.u$ (1), $\sqrt[4]{2x} = \sqrt[4]{2}.v$ (2) với $u \ge 0, v \ge 0$.

Từ (2) suy ra $x = v^4$, thay vào phương trình (1) có $\begin{cases} \sqrt[4]{2}(u + v) = 1 \ (*) \\ u^2 + v^4 = \sqrt{2} - 1 \ (**) \end{cases}$

Từ (*) $\Rightarrow u = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} - v$ thay vào (**) có:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2c}{\sqrt[4]{2}} + v^2 + v^4 - \sqrt{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (v^2 + 1)^2 - \left(v + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(v^2 + 1 + v + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)\left(v^2 + 1 - v - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(v^2 + 1 - v - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = 0 \Leftrightarrow v_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{\dfrac{4 - 3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}}}{2}$$

Do đó: $x = v^4 = \left(\dfrac{1 \pm \sqrt{\dfrac{4 - 3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}}}{2}\right)$. Vậy nghiệm phương trình:

$$x = \left(\frac{1 \pm \sqrt{\dfrac{4 - 3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}}}{2}\right)^4$$

Bài 22.

Điều kiện $x > 1986$, $y > 2002$

$$\frac{16}{\sqrt{x-1986}}+\frac{1}{\sqrt{y-2002}}=10-(\sqrt{x-1986}+\sqrt{y-2002})$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{\sqrt{x-1986}}+\frac{1}{\sqrt{y-2002}}-10+\sqrt{x-1986}+\sqrt{y-2002}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1986}-8+\frac{16}{\sqrt{x-1986}}+\sqrt{y-2002}-2+\frac{1}{\sqrt{y-2002}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1986}-8+\frac{16}{\sqrt{x-1986}}\right)+\left(\sqrt{y-2002}-2+\frac{1}{\sqrt{y-2002}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x-1986}-\frac{4}{\sqrt[4]{x-1986}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{y-2002}-\frac{1}{\sqrt[4]{y-2002}}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt[4]{x-1986}=\dfrac{4}{\sqrt[4]{x-1986}}\\ \sqrt[4]{y-2002}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{y-2002}}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=2002\\ y=2003\end{cases}$$

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

A. ĐỀ BÀI

Bài 1.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\log_2\sqrt{2+2001^x+2004^x}=\log_3\sqrt{3+12(2002^x+2003^x)}\\ \log_2\sqrt{2+2002^x+2003^x}=\log_3\sqrt[3]{3+12(2001^x+2004^x)}\end{cases}$$

Bài 2.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}=3\sqrt{3} & (1)\\ x+y+z=1 & (2)\\ x.y+y.z+z.x=\dfrac{7}{27}+2x.y.z & (3)\end{cases}$$

Bài 3.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2(x^3+2x-y-1)=x^2(y+1) & (1)\\ y^3+4x+1+\ln(y^2+2x)=0 & (2)\end{cases}$

Bài 4.

Giải hệ phương trình sau trên $\mathbb{R}$ với x, y, z là ẩn số:

$$\begin{cases} x = y + xy = z^{2^{2003}} + 2z^{2^{2002}} \\ x^4 + y^4 = 2z^{2^{2004}} \\ (x+y)^{z-1} = (z+2004)^{x-y} \end{cases}$$

Bài 5.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_2 \sqrt{1 + 3\sin x} = \log_3(3\cos y) \\ \log_2 \sqrt{1 + 3\cos y} = \log_3(3\sin x) \end{cases}$$

Bài 6.

Tìm a để hệ sau có một nghiệm chẵn:

$$\begin{cases} \sin(3a - 3y) + 3\sin x = 0 \\ 2\log_4(a - y) + 2\log_4(2\sqrt{y}) = \log_2 \sqrt{y} + 3\log_8 2x \end{cases}$$

Bài 7.

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_2(x+1) = x + y \\ 9^{1+x-y} - 6^{1+x-y} - 3^{1+x-y} = 6^{1-x+y} + 3^{1-x+y} - 9^{1-x+y} \end{cases}$$

Bài 8.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \cos x = x^2 \\ y\mathrm{tg}y = 1 \end{cases}$

Chứng minh hệ phương trình có cặp nghiệm duy nhất (x, y) thoả mãn $0 < x < y < 1$.

Bài 9.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} e^{x-y} = \dfrac{\sin x}{\sin y} & (1) \\ 10\sqrt{x^6 + 1} = 3(y^4 + 2) & (2) \\ \pi x;\ y < \dfrac{5\pi}{4} & (3) \end{cases}$

Bài 10.

Giải hệ phương trình sau đây để tìm nghiệm $(x_0; y_0; z_0)$ thoả mãn $z_0 \geq 0$:

$$\begin{cases}(3-x)^{2003} = y+2\\ \log_3\dfrac{1}{2z-y} + \log_{\frac{1}{3}}(y+2) = \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{9+4y}\\ \log_2(x^2+z^2) = 2+\log_2 x\end{cases}$$

Bài 11.

Cho hai phương trình:

$(3+2\sqrt{3})^x = (\sqrt{2}-1)^x + 3$ (a) và $(\sqrt{2}+1)^x = 2\cos\dfrac{\pi}{9}$ (b)

Giả sử x là nghiệm của phương trình (a). Chứng minh rằng, khi đó x cũng là nghiệm của phương trình (b).

Bài 12.

Chứng minh rằng $\forall m \in \mathbb{R}$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases}yx^3 = m^2 + y^4\\ x^2y + 2y^2x = \pi^2 - y^3\end{cases}$$

Bài 13.

Cho sina, sinb, sinc ≠ 0 và cosa, cosb, cosc khác nhau đôi một. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}x\sin a + y\sin 2a + z\sin 3a = \sin 4a \quad (1)\\ x\sin b + y\sin 2b + z\sin 3b = \sin 4b\\ x\sin c + y\sin 2c + z\sin 3c = \sin 4c\end{cases}$$

Bài 14.

Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y+z = a\\ x^2+y^2+z^2 = b^2\\ xy = z^2\end{cases}$$

trong đó a, b là các số cho trước.

Các số a, b phải thoả mãn điều kiện gì để hệ phương trình có các nghiệm x, y, z dương và khác nhau?

B. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

$$(1)\quad \begin{cases}3\log_2(2+2001^x+2004^x) = 2\log_3[3+12(2002^x+2003x)]\\ 2\log_2(2+2002^x+2003^x) = 2\log_3[3+12(2001^x+2004^x)]\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\log_2(2+2001^x+2004^x) = 2\log_3[3+12(2002^x+2003^x)]\\ 3\log_2(2+2001^x+2004^x+2\log_3[3+12(2001^x+2004^x)]\end{cases}$$

$= 3\log_2(2 + 2002^x + 2003^x) + 2\log_3[3 + 12(2002^x + 2003^x)]$ (2)

Xét hàm số f với $f(t) = 3.\log_2(2 + t)\ \ 2\log_3(3 + 12t)$ với $t \in (0; +\infty)$

Ta có: $f(t) = \dfrac{2}{(2 + t)\ln 2} + \dfrac{24}{(3 + 12t)\ln 3} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$

$\Rightarrow$ f tăng trên $(0; +\infty)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{f tăng trên } (0; +\infty \\ \forall x \in \mathbb{R},\ 2001^x + 2004^x > 0 \text{ và } 2002^x + 2003^x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$((2) \Leftrightarrow 2001^x + 2004^x = 2002^x + 2003^x)$

Mà: • $x = 0$ là một nghiệm của (2) do:

$2001^0 + 2004^0 = 2002^0 + 2003^0$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $(2) \Leftrightarrow 2004^x - 2003^x = 2002^x - 2001^x$

Xét hàm số $g(t) = t^x$ với $x \neq 0$ và $t \in 90; +\infty)$

g thoả mãn điều kiện của định lí La–gơ–năng (Lagrange) trên (2003; 2004] và [2001; 2002] nên:

• $\exists t_1 \in (2003; 2004) : g(2004) - g(2003) = x.t_1^{x-1}$

$\Leftrightarrow 2004^x - 2003^x = x.t_1^{x-1}$ với $t_1 \in (2003; 2004)$

Tương tự: $2002^x - 2001^x = x.t_2^{x-1}$ với $t_2 \in (2001; 2002)$.

Do đó $2004^x - 2003^x = 2002^x - 2001^x$

$\Leftrightarrow x.t_1^{x-1} = x.t_2^{x-1}$ với $x \neq 0$

(với $t_1 \in (2003; 2004); 2004); t_2 \in (2001; 2002)$)

$$\Leftrightarrow \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Nên (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\log_2(2 + 2001^x + 2004^x) = 2\log_3[3 + 12(2002^x + 2003^x)] \\ x \in \{0; 1\} \end{cases}$$

Khi $x = 0$, ta có: ($3.\log_2(2 + 2) = 2.\log_3 27$; đúng) $\Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của (1).

$$\left.\begin{array}{l} x = 1, \text{ ta có: } 3\log_2(2 = 2001 + 2004) = \log_2(4007)^3 \\ \text{và } 2\log_3[3 = 12(2002 + 2003)] = \log_3(48063)^2 \\ \text{Do } (4007)^3 > (48063)^2 \ \Rightarrow \log_3(48063)^2 < \log_2 948063)^2 < \log_2(4007)^3 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow x = 1$ không là nghiệm của (I)

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của hệ đã cho.

Bài 2.

* Giả sử $(x; y; z)$ là nghiệm của hệ phương trình. Từ (1) suy ra $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, kết hợp với (2): $x + y + z = 1$ ta thấy trong các số x, y, z, phải

có ít nhất một số không lớn hơn $\frac{1}{3}$, không mất tính tổng quát có thể giả sử $z \le \frac{1}{3}$. Vậy $z \in \left(0;\ \frac{1}{3}\right]$.

* Đặt $S = x.y + y.z + z.x - 2x.y.z$.

Ta có $S = x.y.(1 - 2z) + z.(x + y) = x.y.(1 - 2z) + z.(1 - z)$

Do $x.y \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow x.y \le \left(\frac{1-z}{2}\right)^2$. Vậy

$$S \le \left(\frac{1-z}{2}\right)^2 (1 - 2z + z(1 - z) = \frac{1}{4} 9 - 2z^3 + z^2 + 1)$$

* Xét hàm số $f(z) = \frac{1}{4}(-2z^3 + z^2 = 1)$ với $z \in \left(0;\ \frac{1}{3}\right]$. Ta có:

$$f'(z) = \frac{1}{4}(-6z^2 + 2z) = \frac{1}{2}z(1 - 3z)$$

Vậy $f(z) \le f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$, $\forall z \in \left(0;\ \frac{1}{3}\right]$.

* Do đó $S \le \frac{7}{27}$. Vậy phương trình:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{3} \\ x = y \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

* Thử lại thấy $(x; y; z) = \left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ thoả mãn hệ phương trình.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

Bài 3.

Ta có: $2(x^3 + 2x - y - 1) = x^2(y + 1)$

$\Leftrightarrow 2x^3 + 4x - 2y - 2 - x^2y - x^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x(x^2 + 2) - (y + 1)(x^2 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2)(2x - y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = y + 1$

Thay vào (2) ta có: $y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1) = 0$ (3)

Đặt $f(y) = y^3 + 2y + 3 + \ln(y^2 + y + 1)$

$$f'(y) = 3y^2 + 2 + \frac{2y + 1}{y^2 + y + 1}$$

$$= 3y^2 + \frac{2(y^2 + y + 1) + 2y + 1}{y^2 + y + 1}$$

$$= 3y^2 + \frac{2(y + 1)^2 + 1}{y^2 + y + 1} > 0, \forall y \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ f(y) đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mặt khác $f(-1) = 0 \Rightarrow y = -1$ là nghiệm duy nhất của (3).

Với $y = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(0; -1)$.

Bài 4.

Từ hệ: $2.z^{2^{2004}} = x^4 + y^4 \geqslant 2x^2y^2 \Rightarrow xy = z^{2^{2003}}$ (1)

Lại có: $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

$$\Rightarrow (x + y)^4 \leqslant 4(x^2 + y^2)^2 \leqslant 4.2(x^4 + y^4) = 16.z^{2^{2004}}$$

$$\Rightarrow x + y \leq 2.z^{2^{2002}} \qquad (2)$$

(1) và (2) cho ta: $x + y + xy \leq z^{2^{2003}} + 2z^{2^{2002}}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z^{2^{2002}}$.

Từ đó hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x = y = z^{2^{2002}} \\ (2x)^{z-1} = (z + 2004)^{x-y} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = z = 1 \\ \begin{cases} x = y = \dfrac{1}{2} \\ z = \pm\dfrac{1}{2^{2002}\sqrt{2}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có ba nghiệm $(1; 1; 1) \vee \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \pm\frac{1}{2^{2002}\sqrt{2}}\right)$.

Bài 5.

Đặt $u = \sin x$, $v = \cos y$ $\qquad 0 < u, v \leq 1$

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \log_2(1 + 3u) = 2\log_3(3v) \\ \log_2(1 + 3v) = 2\log_3(3u) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(1 + 3u) = 2 = 2\log_3 v \\ \log_2(1 + 3v) = 2 + \log_3 u \end{cases} \qquad (*)$$

suy ra $\log_2(1 + 3u) - \log_2(1 + 3v) = 2\log_3 v - 2\log_3 u$

$\Leftrightarrow \log_2(1 + 3u) + 2\log_3 u = \log_2(1 + 3v) + 2\log_3 v$

Xét hàm $f(t) = \log_2(1 + 3t) + 2\log_3 t \qquad 0 < t \le 1$

$$f'(t) = \frac{3}{(1+3t)\ln 2} + \frac{2}{t\ln 3} > 0$$

Hàm đồng biến nên với $f(u) = f(v)$ thìn = v

Hệ (*) trở thành: $\log_2(1 + 3u) = 2 + 2\log_3 u$

Suy ra: $\quad 1 + 3u = 2^{2+2\log_3 u}$

$\Leftrightarrow 1 + 3u = 4.2^{\log_2 u^2}$

$\Leftrightarrow 1 + 3u = 4.2^{\log_3 2.\log_2 u^2}$

$\Leftrightarrow 1 + 3u = 4.(u^2)^{\log_3 2}$

$\Leftrightarrow 1 + 3u = 4.u^{\log_3 4} \qquad (**)$

Phương trình trên có nghiệm duy nhất u = 1.

Thật vậy (**) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{u^{\log_3 4}} + \dfrac{3u}{u^{\log_3 4}} = 4$

$\Leftrightarrow u^{-\log_3 4} + 3u^{1-\log_3 4} = 4$

Xét hàm $f(u) = u^{-\log_3 4} + 3u^{1-\log_3 4} \qquad 0 < u \le 1$

$$f'(u) = (-\log_3 4)\, u^{-1-\log_3 4} + 3(1 - 1\log_3 4)u^{-\log_3 4}$$

$$= \frac{-\log_3 4}{u^{1-\log_3 4}} + \frac{3(1-\log_3 4)}{u^{\log_3 4}} < 0$$

Hàm f(u) nghịch biến nên u = 1 là nghiệm duy nhất.

Ta được u = v = 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ y = l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Bài 6.

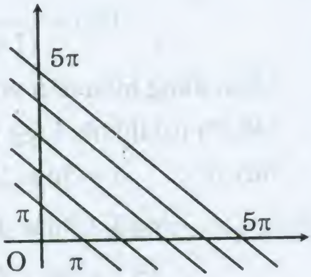
Hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x > 0;\ y > 0 \\ a - y > 0 \Rightarrow a > 0 \\ \sin(3a - 3y) + 2\sin x = 0 \\ \log_2(a - y).(2\sqrt{y}) = \log_2 2\sqrt{y}.x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0;\ y > 0 \\ a - y > 0 \\ x + y = a \\ \sin(3a - 3y) + 3\sin x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0;\ y > 0 \\ a - y > 0 \\ a + y = a \\ 2\sin x(3 - 2\sin^2 x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0;\ y > 0 \\ a - y > 0 \\ x + y = a \\ \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0;\ y > 0 \\ a - y > 0 \\ x + y = a \\ x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Bài toán đã cho trở thành:

Tìm $a > 0$ để trên đường thẳng $x + y = a$ có một số chẵn điểm có toạ độ dương trong đó hoành độ có dạng $k\pi$.



Từ đồ thị suy ra $\left[\begin{array}{l} 2\pi < a \leqslant 3\pi \\ 4\pi < a \leqslant 5\pi \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$

Vậy những giá trị a cần tìm là

$$2k\pi < a \leq (2k + 1);\ k \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài 7.

$$\begin{cases} \log_2(x + 1) = x + y & (1) \\ 9^{1+x-y} - 6^{1+x-y} - 2^{3+x-y} = 6^{1-x+y} + 3^{1-x+y} - 9^{1-x+y} & (2) \end{cases}$$

* Đặt $t = x - y$, phương trình (2) thành:

$$9^{1+t} + 9^{1-t} - 6^{1+t} - 6^{1-t} - 3^{1+t} - 3^{1-t} = 0 \qquad (3)$$

rõ ràng $t = 0$ là một nghiệm của (3).

Hàm số ở vế trái của (3) là hàm chẵn theo t nên khi $t \neq 0$ ta chỉ cần xét $t > 0$.

* Chỉ ra bổ đề khi $t > 0$ thì $\forall a, b \in \mathbb{R}$ và $a > b > 1$ thì $a^t + a^{-t} > b^t + b^{-t}$ và chứng minh bổ đề này đúng.

Áp dụng bổ đề trên lập luận $t \neq 0$ không là nghiệm của (3).

* $t = 0 \Leftrightarrow y = x$ thế vào (1) được:

$\log_2(x + 1) = 2x \Leftrightarrow 4^x - x - 1 = 0$ (4) (điều kiện $x > -1$)

Chứng minh phương trình (4) có không quá 2 nghiệm.

* Chỉ ra $x_1 = 0$ và $x_2 = \dfrac{-1}{2}$ là 2 nghiệm của phương trình (4) và kết luận đúng nghiệm của hệ là $x = y = 0 \vee x = y = \dfrac{-2}{2}$.

Bài 8.

Hàm số $f(x) = \cos x - x^2$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(0) = 1 > 0$ và $f(1) = \cos 1 - 1 < 0$.

Vậy tồn tại số thực $\alpha \in (0; 1)$ sao cho $f(\alpha) = \cos\alpha - \alpha^2 = 0$.

Trong khoảng (0; 1) hàm số cosx giảm trong khi hàm x^2 tăng suy ra α là số thực duy nhất trong khoảng (0; 1) sao cho $\cos\alpha = \alpha^2$.

Hàm số $h(x) = x\operatorname{tg}x$ là tích hai hàm số dương đồng biến trên (0; 1) nên $g(x) = x\operatorname{tg}x - 1$ là hàm số đồng biến trên khoảng (0; 1) và $g(0) = -1 < 0$ và $g(1) = \dfrac{\sin 1 - \cos 1}{\cos 1} > 0 \left(\text{do } 1 > \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Vậy tồn tại duy nhất số thực $\beta \in (0; 1)$ sao cho $\beta \text{tg}\beta = 1$.

Mặt khác vì $\sin x < x$ với mọi $x > 0$ suy ra

$$g(\alpha) = \alpha \text{tg}\alpha - 1 = \alpha \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1 = \frac{\sin\alpha}{\alpha} - 1 < 0 = g(\beta)$$

Do $g(x)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ ta có $0 < \alpha < \beta < 1$ (điều phải chứng minh)

Bài 9.

Đưa phương trình (1) về dạng $\dfrac{e^x}{\sin x} = \dfrac{e^y}{\sin y}$ (*)

Xét hàm $f(t) = \dfrac{e^t}{\sin t}$ với $\pi < t < \dfrac{5\pi}{4}$

Ta có: $f'(t) = \dfrac{e^t(\sin t - \cos t)}{\sin^2 t} > 0$ với $\pi < t < \dfrac{5\pi}{4}$.

Suy ra: $f(t)$ luôn đồng biến trong khoảng $\left(\pi; \dfrac{5\pi}{4}\right)$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Thế vào phương trình (2) ta được: $10\sqrt{x^6 + 1} = 3(x^4 + 2)$

Do $\sqrt{x^6 + 1} = \sqrt{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)}$

Đặt $u = \sqrt{x^2 + 1}$, $v = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$ ta được phương trình:

$10uv = 3(u^2 + v^2)$

Giải ra ta được $u = 3v$ hoặc $v = 3u$.

Giải $u = 3c$ theo x có phương trình vô nghiệm.

Giải $v = 3u$ theo x có $x = \pm\sqrt{5 = \sqrt{33}}$ so với điều kiện (3) ta nhận $x = \sqrt{5 + \sqrt{33}}$.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm là $x = \sqrt{5 + \sqrt{33}}$.

Bài 10.

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 2z > y \\ y > -2 \end{cases}$

Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} (3 - x)^{2003} = y + 2 \\ -\log_3(2z - y) - \log_3 9y + 2) = -\log_3 94y + 9) \\ \log_2(x^2 + z^2) = \log_2 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)^{2003} = y = 2 \\ \log_3(2z-y).(y+2) = \log_3(4y+9) \\ \log_2(x^2 = z^2 0 = \log_2 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)^{2003} = y+2 \\ 2yz + 4z - y^2 - 2y = 4y + 9 \\ x^2 + z^2 = 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)^{2003} = y+2 \\ y^2 + 9 + z^2 + 6y - 2yz - 6z = z^2 - 2z \\ x^2 - 4x + 4 = 4 - x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)^{2003} = y+2 & (1) \\ (y+3-z)^2 = z^2 - 2z & (2) \\ (x\text{-}2)^2 = 40z^2 & (3) \end{cases}$$

- Nếu $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của hệ ta có:

$$(x_0 - 2)^2 = 4 - z_0^2 \Rightarrow 4 - z_0^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -2 \le z_0 \le 2 \qquad (4)$$

$$(y_0 + 3 - z_0)^2 = z_0^2 - 2z_0 \Rightarrow zw_0^2 - 2z_0 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow z_0 \le 0 \text{ hoặc } z_0 \ge 2 \qquad (5)$$

Kết hợp điều kiện bài toán là $z_0 \ge 0$ với (4) và (5) ta có: $z_0 = 0$ hoặc $z_0 = 2$.

+ Với $z_0 = 0$ từ (2) và (3) ta có $x_0 = 0$ hoặc $x_0 = 4$ và $y_0 = -3$ không thoả mãn điều kiện bài toán.

+ Với $z_0 = 2$ từ (2) và (3) ta có $x_0 = 2$ và $y_0 = -1$.

Thoả mãn phương trình (1) và điều kiện bài toán.

Vậy: hệ đã cho có nghiệm: (2; –1; 2).

Bài 11.

Giả sử x là nghiệm của phương trình:

$$(3 + 2\sqrt{2})^x = (\sqrt{2} - 1)^x + 3 \Leftrightarrow (\sqrt{2} + 1)^{2x} = \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^x} + 3 \qquad (1)$$

Đặt $2t = (\sqrt{2} + 1)^x$ với $t \ge 0$.

Khi đó phương trình (1) trở thành:

$$4t^2 = \frac{1}{2t} + 3 \text{ hay } 4t^3 - 3t = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Xét $t \in (-1; 1)$, đặt $t = \cos\alpha$, $\alpha \in (0; \pi)$ ta được $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos 3\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \text{ Vì } \alpha \in (0; \pi) \text{ nên}$$

$$\alpha \in \left\{\frac{\pi}{9};\ \frac{5\pi}{9};\ \frac{7\pi}{9}\right\}$$

Từ đó suy ra các nghiệm $t \in (-1; 1)$ của phương trình (2) là:

$$t_1 = \cos\frac{\pi}{9}\ ;\ t_2 = \cos\frac{5\pi}{9}\ ;\ t_2 = \cos\frac{7\pi}{9}$$

Vì phương trình (2) là phương trình bậc 3 có đủ 3 nghiệm $t_i \in (-1; 1)$, I = 1; 2; 3 nên không cần xét các nghiệm $t \in (-1; 1)$.

Mặt khác $t_2 = \cos\frac{5\pi}{9} < 0$ và $t_3 = \cos\frac{7\pi}{9} < 0$

Do đó nghiệm của phương trình (1) là $t_1 = \cos\frac{\pi}{9}$

Tức là $(\sqrt{2} + 1)^x = 2\cos\frac{\pi}{9}$.

Vậy nếu x là nghiệm của phương trình (a) thì x cũng là nghiệm của phương trình (b).

Bài 12.

Hệ $\begin{cases} yx^2 = m^2 + y^4 \\ x^2y + 2y^2x = \pi^2 - y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x^3 - y^3) = m^2 & (1) \\ y(x + y)^2 = \pi^2 & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow y > 0$, (1) $\Rightarrow x^3 - y^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq y > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow x + y = \frac{\pi}{\sqrt{y}} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{\sqrt{y}} - y$

Thay x vào (1) ta được: $y\left[\left(\frac{\pi}{\sqrt{y}} - y\right)^3 - y^3\right] = m^2$

Đặt $t = \sqrt{y} > 0 \Rightarrow t^2\left[\left(\frac{\pi}{t} - t^2\right)^3 - t^6\right] = m^2$

$$\Rightarrow t^9 + m^2t - (\pi - t^3)^3 = 0 \qquad (3)$$

Xét $\quad f(t) = t^9 + m^2t - (\pi - t^3)^3 \qquad t \geq 0$

$\quad f(t) = 9t^8 + m^2 + 3(\pi - t^3)^2.2t \geqslant 0 \qquad \forall t \geq 0$

$\Rightarrow$ f(t) đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Ta có $\quad f(0) = -\pi^2 < 0$

$\quad f(\sqrt[3]{\pi}) = \pi^3 + \sqrt[3]{\pi}.m^2 > 0$

$\Rightarrow$ (3) có 1 nghiệm duy nhất $t \in (0; \sqrt[3]{\pi})$,

trong đó hệ phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.

Bài 13.

Vì $\sin a \neq 0$ nên:

$$(1) \Leftrightarrow x + 2y\cos a + z\left(\frac{3.4\sin^2 a}{4\cos^2 a - 1}\right) = 4\cos a\,\underbrace{\cos 2a}_{2\cos^2 a - 1}$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3 a - 4z\cos^2 a - (4 + 2y)\cos a + z - x = 0$$

Vậy cosa là nghiệm của phương trình:

$$8t^3 - 4zt^2 - (4 + 2y)t + z - x = 0$$

Tương tự còn có 2 nghiệm khác là: cosb; cosc.

Theo định lí Vi–ét, ta có:

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = \dfrac{7}{2} \\ \cos a\cos b + \cos b\cos c + \cos c\cos a = \dfrac{-y - 2}{2} \\ \cos a\cos b\cos c = \dfrac{-y - 2}{4} \end{cases}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} x = -8\cos a\cos b\cos c + 2(\cos a + \cos b + \cos c) \\ y = -4(\cos a\cos b + \cos b\cos c + \cos c\cos a) - 2 \\ z = 2(\cos a + \cos b + \cos c) \end{cases}$$

Bài 14.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x + y + z = a & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 & (2) \\ xy = z^2 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow a^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2(x + y)z$

$$\Rightarrow z = \frac{a^2 - b^2}{2a} \quad (a \neq 0) \qquad (4)$$

$$\text{Từ (1), (3) và (4) ta được: } \begin{cases} x + y = \dfrac{a^2 + b^2}{2a} = S \\ x.y = \dfrac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2} = P \end{cases}$$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - S.X + P = 0$, với:

$$\begin{cases} S = \dfrac{a^2 + b^2}{2a} \\ P = \dfrac{(a^2 - b^2)^2}{4a^2} \end{cases}$$

Để x, y, z) dương và khác nhau, ta cần phải có:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ S^2 > 4P \\ S > 0 \\ P > 0 \\ z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a^2 > b^2 \\ (3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a^2 > b^2 \\ \left(a - \dfrac{b^2}{a^2}\right).\left(a\dfrac{b^2}{a^2} - 1\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} < \dfrac{|b|}{a} < 1 \end{cases}$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH HÀM

A. ĐỀ BÀI

Bài 1.

Hãy xác định tất cả các hàm số f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

a) $f(x) = \cos x$; với $0 \leq x < 2\pi$;

b) $f(x + 2\pi) = 2f(x) + 1$.

Bài 2.

Tìm tất cả các hàm f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$\begin{cases} f(1) = 2005 \\ (x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2) \quad (1) \end{cases}$$

Bài 3.

Cho hàm f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn:

$$\begin{cases} f(x + y) + f(x).f(y) = f(xy) + f(x), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \\ f(0) \neq 2, \ f(2) \neq 0 \end{cases}$$

Tính $f(\sqrt{2004})$.

Bài 4.

Tìm hàm f thoả mãn hai điều kiện sau:

$$f[2004f(x) + f(y)] = 2004x + y, \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

f bị chặn trên $[-1; 1]$

Bài 5.

Tìm tất cả các hàm số $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\ f(f(x) + y) = 2x + f(f(y - x)$$

Bài 6.

Tìm tất cả các hàm số $f; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn $f(x) - \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x)$ bị chặn trong khoảng $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

Bài 7.

Tìm tất cả các hàm số khả vi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f'\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$$

Bài 8.

Tìm tất cả các hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện:

$$f(0) = 1, f(1) = 2004 \text{ và } f(x + y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 9.

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn $f(f(x) + yz) = x = f(y)(f(z)$,

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Bài 10.

Tìm các hàm số $f(x)$ xác định $5x \in \mathbb{R}$ và thoả mãn:

$$\begin{cases} f(0) = 2003 \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2004 \\ f(x+y) + g(x+y) = 2f(x).\cos y,\ \forall x, y \pm \mathbb{R} \end{cases}$$

Bài 11.

Cho hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả

$$f(x^3 + y^3) = (x + y)(f(x)^2 - f(x)f(y) + f(y)^2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Chứng minh $f(2004x) = 2004f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 12.

Tìm các hàm số f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn phương trình hàm:

$$f(f(x)) + 2f(x) = 15x$$

Bài 13.

Cho $n \in \mathbb{N}$. Tìm tất cả các hàm số f(x) xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện: $C_n^0 f(x) + C_n^1 f(x^2) + \ldots + C_n^n f(x^{2^n}) = 0 \ \forall x$

Bài 14.

Tìm tất cả các hàm liên tục f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn:

$$f(x.f(y) = y.f(x) \text{ với mọi số thực } x, y \qquad (1)$$

Bài 15.

Tìm tất cả các hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn các điều kiện sau:

i) $f(x) = -f(x)$, với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

ii) $f(f(x) = x$, với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Bài 16.

Tìm tất cả các hàm f xác định trên tập hợp các số nguyên không âm $\mathbb{Z}^+$, lấy giá trị trên tập hợp $\mathbb{Z}^+$ và thoả mãn điều kiện: $f[f(n)] = n + 2$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài 17.

Hãy xác định các hàm số f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $f(x) = \sin x - 2$ với $0 \to x < 2\pi$

ii) $(x + 2\pi) = 3f(x) + 4, \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 18.

Tìm tất cả các hàm số f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thoả mãn

$$\begin{cases} f(1) = 2004 \\ f(x + y) = f(x) + f(y); \ \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Bài 19.

Cho hàm số f xác định và lấy giá trị trong tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ sao cho với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$ ta đều có:

$$f(2004x) = f(\sin(30x + 4y)) + f(\sin(30x - 4y)) \qquad (*)$$

Hãy xác định giá trị của $f(\sqrt{13} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[5]{2002})$.

Bài 20.

Tìm tất cả các hàm số f: $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ thoả mãn

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(xy + y) = f(x).f(y) - f(x + 1) + 2 \ \forall x, y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Bài 21.

Cho hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn:

(1) $f(x + y) = f(x)f(a - y) + f(a - x)$; $\forall x, y \in \mathbb{R}$; a là hằng số tuỳ ý.

(2) $f(0) = \dfrac{1}{2}$

Tính $f(\sqrt[2003]{2003}$

Bài 22.

Cho hàm số f(x) thoả mãn:

$$f(xy) + f(x - y) + f(x + y + 1) = xy + 2x + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

và $P(x) = \dfrac{2003^{f(x)}}{2003^{f(x)} + \sqrt{2003}}$. Tính $A = P\left(\dfrac{1001}{2003}\right) + P\left(\dfrac{1002}{2003}\right)$

Bài 23.

Cho hàm $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thoả mãn các điều kiện sau đây:

(i) $f(n + 1) > f(n)$: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

(ii) $f(f(n0) = 3n$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Hãy tính f(2003)

Bài 24.

Giả sử hàm số y = f(x) liên tục trên tập $\mathbb{R}$, nhận các giá trị khác dấu. Chứng minh rằng tồn tại một cấp số cộng a, b, c ($a < b < c$) sao cho $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.

Bài 25.

Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện:

$$xf(xf(y) = f(f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Bài 26.

Tìm tất cả các hàm số f, g từ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn:

$$f(x) - f(y) = (x + y)g(x - y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 27.

Tìm tất cả $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ thoả mãn:

$$(x - 1)^2 f(x) = (x - 3)^2 f(x + 2), \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Bài 28.

Tìm tất cả các hàm f: $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ thoả mãn $f(1) = 1$; $f(2n) = f(n)$ và $f(2n + 1) = 1 - f(n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

$$f(x + 2n\pi) = 2^n[f(x) + 1] - 1 \qquad (1), \forall \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Thật vậy, dễ thấy (1) đúng với $n = 0$, $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$.

Xét $n = k + 1$, ta có: $f(x + 2(k + 1)\pi) = 2f(x + 2k\pi) + 1$

$$= 2[2^k f(x) + 1) - 1] + 1 = 2^{k+1}(f(x) + 1) - 1$$

$\Rightarrow$ (1) đúng với $n = k + 1$ $(k \geq 1)$

$\Rightarrow$ (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Xét $f(x - 2n\pi)$ với $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $x' = x - 2n\pi$

Khi đó $x = x' + 2n\pi$ và do vậy $f(x) = f(x' + 2n\pi) = 2^n(f(x') + 1) - 1$

Suy ra $f(x - 2n\pi) = f(x') = 2^{-n}(f(x) + 1) - 1 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) ta được $f(x + 2n\pi) = 2^n(f(x) + 1) - 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in [0; 2\pi)$: $x = \alpha + \left[\dfrac{x}{2\pi}\right].2\pi$. Do cách viết công thức số đo x trên đường tròn lượng giác; [a] kí hiệu là phần nguyên của a nên:

$$f(x) = f\left(a + \left[\frac{x}{2\pi}\right].2\pi\right) = 2^{\left[\frac{x}{2\pi}\right]}(f(\alpha) + 1) - 1$$

$$= 2^{\left[\frac{2}{2\pi}\right]}(\cos\alpha + 1) - 1 = 2^{\left[\frac{2}{2\pi}\right]}(\cos x + 1) - 1$$

Do đó $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{\left[\frac{2}{2\pi}\right]}(\cos x + 1) - 1 \qquad (3)$

Thử lại, dễ thấy hàm số f(x) xác định theo (3), thoả mãn đề ra. Vậy có duy nhất hàm f(x) cần tìm là:

$$f(x) = 2^{\left[\frac{2}{2\pi}\right]}(\cos x + 1) - 1$$

Bài 2.

Thay $x = y = 1 \Rightarrow f(0) = 0$

Đặt $a = x + y$ và $b = x - y$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow bf(a) - af(b) = (a^2 - b^2)ab, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Với $ab \neq 0$, ta có: $\dfrac{f(a)}{a} - a^2 = \dfrac{f(b)}{b} - b^2$

Suy ra $\forall x \neq 0$, ta có: $\dfrac{f(x)}{x} - x^2 = f(1) - 1 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x} - x^2 = 2004$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^3 + 2004x, \forall x \neq 0.$$

Theo trên ta có: $f(0) = 0$ nên $f(x) = x^3 + 2004x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta có: $f(x) = x^3 + 2004x$ thoả mãn hệ điều kiện đã cho.

Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = x^3 + 2004x$.

Bài 3.

Từ giả thiết ta có:

+ Với $x = y = 0$: $f(0) + f^2(0) = 3f90) \Leftrightarrow f^2(0) - 2f(0) = 0$

$\Leftrightarrow f(0) = 0$ (do $f(0) \neq 2$)

+ Với $x = y = 2$: $f(4) + f^2(2) = f(4) + 2f(2) \Leftrightarrow f(2) = 2$ (do $f(2) \neq 0$)

+ Với $x = y = 1$: $f(2) + f^2(1) = 3f(1) \Leftrightarrow f^2(1) - 3f(1) + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f() = 2 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: Nếu $f(1) = 2$

Cho $y = 1$, $x = -1$: $f(0) + 2f9-1) = 2f(x) + f(1) \Leftrightarrow f(x + 1) = f(x) + 1\ \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

+ $x = u\ (u \neq 0)$, $y = \dfrac{v}{u}$:

$$f\left(u + \frac{v}{u}\right) + f(u).f\left(\frac{v}{u}\right) = f(v) + f(u) + f\left(\frac{v}{u}\right) \quad (2)$$

+ $x = u\ (u \neq 0)$, $y = \dfrac{v}{u} + 1$:

$$f\left(u + \frac{v}{u} + 1\right) + f(u).f\left(\frac{v}{u} + 1\right) = f\left[u\left(\frac{v}{u} + 1\right)\right] + f(u) + f\left(\frac{v}{u} + 1\right) \quad (3)$$

Do (1) nên (3)

$$\Leftrightarrow f\left(u + \frac{v}{u}\right) + 1 + f(u).\left[f\left(\frac{v}{u}\right) + 1\right] = f(u + v) + f(u) + f\left(\frac{v}{u}\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow f\left(u + \frac{v}{u}\right) + f(u).f\left(\frac{v}{u}\right) = f(u + v) + f\left(\frac{v}{u}\right) \quad (4)$$

(2) và (4) được: $f(v + u) = f(u) + f(v)$

Với tất cả các kết quả trên ta được: f là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ (phương trình Cô–si)}$$

Vậy $\begin{cases} f(x) = ax, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ a = f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Từ đó: $f(\sqrt{2004} = \sqrt{2004}$

Bài 4.

Trong (1) cho x = y thì $f(2005f(x)] = 2005x$ (3)

Đặt $2005f(x) = u$, $2005f(y) = v$ thì (3) $\Rightarrow f(u) = 2005x$, $f(v) = 2005y$

nên $f[2004f(u) + f(v)] = f[2004.2005x + 2005y]$ (4)

Theo giả thiết: $f[2004f(u) + f(v)] = 2004u + v$ (5)

Từ (4) và (5):

$$f[2004.2005x + 2005y] = 2004.2005f((x) + 2005f(y) \qquad (6)$$

Trong (6), thế x = y = 0 thì f(0) = 0

Thế x = 0 thì $f(2005y) = 2005f(y)$

Thế y = 0 thì $f(2004.2005x) = 2004.2005f(x)$

Do đó (6) thành

$$f[2004.2005x + 2005y] = f(2004.2005x) + f(2005y)$$

Suy ra $f(x + y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ (7)

Bằng quy nạp ta được $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}: f(nx) = nf(x)$

Từ đó, $\forall m, n \in \mathbb{Z}^+, x \in \mathbb{R}: mf(nx/m) = f(m.nx/m) = f(rx) = rf(x)$

Từ (7) $\Rightarrow 0 = f(0) = f(x - x) = f(-x) + f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$

Do đó $\forall\ r \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$ thì $f(rx) = rf(x)$ (8)

Lấy dãy số thực (x_n) tuỳ ý sao ho $\lim x_n = 0$ (có thể giả sử $|x_n| \le 1$).

Ứng với mỗi $n \in \mathbb{N}$, chọn $q_n \in \mathbb{Q}$ sao cho

$$\frac{1}{\sqrt{|x_n|}} < q_n < \frac{1}{\sqrt[3]{x_n}} \Rightarrow \sqrt{|x_n|} < \left|q_n x^n\right| < \sqrt[3]{|x_n|^2} \Rightarrow q_n x_n \in [-1; 1]$$

$$\Rightarrow |f(q_n x_n)| \le C, \forall n \in \mathbb{Z}^+, \text{(C là hằng số)}$$

Do đó $|f(x_0)| = \left|r\left(\frac{1}{q_n} q_n x_n\right)\right| = \frac{1}{q_n}|f(q_n x_n)|$

$\Rightarrow \lim f(x_n) - 0 = f(0)$, vậy f(x) liên tục tại x = 0

và $\lim\limits_{y \to 0}[f(x = y) - f(x)] = \lim\limits_{y \to 0} f(y) = 0$

$\Rightarrow$ f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ thì tồn tại dãy số hữu tỉ (r_n), sao cho $\lim r_0 = x$.

$\Rightarrow f(x) = \lim f(r_n) = \lim r_n f(1)$. Thử lại $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thoả mãn.

Bài 5.

Dễ dàng kiểm chứng rằng hàm số $f(x) = x + c$, với c là hằng số bất kì là nghiệm của phương trình. Ta sẽ chứng minh rằng đó là nghiệm duy nhất.

Cho $x \in \mathbb{R}$, đặt $x' = \dfrac{1}{2}(f(0) - x)$ thế thì $x = f(0) - 2x'$

Đặt $y = -g(x')$, thế thì:

$f(f(x') + y) = f(0) = 2x' + f(f(y) - x')$, do đó, nếu gọi $z = f(y) - x'$, thì ta có $f(z) = x$.

Suy ra f là toán ánh. Đặt biệt, ta có $f(n) = 0$ với a nào đó.

Từ đó với y bất kì, ta có

$$f(y) = f(f(a) + y) = 2a + f(f/(y) - a)$$

Hơn nữa, với x bất kì cho trước, ta có thể tìm y sao cho

$$x = f(y) - a.$$

Ta có $x = f(y) - a = (2a + f(f(y) - a) - a = f(x) + a \Leftrightarrow f(x) = x - a$

Bài 6.

Có $\quad f(x) = \dfrac{1}{2} f\left(\dfrac{x}{2}\right) + x^2 \qquad (1)$

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2^2} f\left(\frac{x}{2^2}\right) + \frac{x^2}{2^3} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2^2} f\left(\frac{x}{2^2}\right) = \frac{1}{2^2} f\left(\frac{x}{2^2}\right) + \frac{x^2}{2^6} \qquad (3)$$

....

$$\frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + \frac{x^2}{2^{3n}} \qquad (n + 1)$$

Cộng (1), (2), ..., (n + 1) ta có:

$$f(x) = \frac{}{2^{n+1}} f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + x^2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{3n}}\right) \qquad (a)$$

Với $x \in \mathbb{R}$, $\exists n$ c $\mathbb{N}$: $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{x}{2^{n+1}} < \dfrac{1}{3} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$: $\left|r\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right) \leqslant c\right|$

(vì f(x) bị chặn trong khoảng $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{3}\right)$)

Do đó từ (a) khi cho n → +∞ ta có $f(x) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{8}} x^2 = \dfrac{8}{7}x^2$

Thử lại $f(x) = \dfrac{8}{7}x^2$ thoả mãn.

Bài 7.

Từ điều kiện đề bài thì $\forall y \neq 0$ ta có thể suy ra:

$$f'(x) = \frac{xf(x+y) - g(x-y)}{2y} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Ta có vế trái là hàm khả vi theo x nên:

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+y) - f'(y-x)}{2y} = \frac{1}{2y}\left(\frac{f(x+2y) - f(x)}{2y} - \frac{f(x-2y) - f(x)}{(-2y)}\right)$$

$$\Leftrightarrow f''(x) = \frac{f(x+2y) + f(x-2y) - 2f(x)}{4y^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{f'(x+2y) + f'(x-2y) - 2f'(x)}{4y^2}$$

$$= \frac{1}{4y^2}\left(\frac{f(x+4y) - f(x)}{4y} + \frac{f(x-4y) - f(x)}{(-4y)} - \frac{f(x+4y) - f(x-4y)}{4y}\right) = 0$$

$\Rightarrow f'(x) = a \Rightarrow f'(x) = ax + b \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c.$

Vậy hàm số cần tìm là $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Bài 8.

Ta có các kết quả

$$1 = f(0) = f(-1+1) = f(-1)\,f(1) \Rightarrow f(-1) = \frac{}{2004} = 2004^{-1}$$

$$f(n) = f(1 + ! + \ldots + 1) = (f(1))^n = 2004^n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}$$

$$(-n) = f(-1 - 1 - \ldots - 1) = (f(-1))^n = 2004^n$$

+ Như thế $2004 = f(1) = f\left(n.\dfrac{1}{n}\right) = \left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n \Rightarrow \left(\dfrac{1}{n}\right) = 2004^{\frac{1}{n}}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = g\left(m\frac{1}{n}\right) = \left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = \left(2004^{\frac{1}{n}}\right)^m = 2004^{\frac{m}{n}}$$

$$f\left(-\frac{m}{n}\right) = \left(f\left(\frac{-1}{n}\right)\right)^m = 2004^{-\frac{m}{n}}$$

+ Tóm lại ta đã chứng minh được rằng với mọi $r \in \mathbb{Q}$ thì $f(x) = 2004^r$.

+ Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, luôn tồn tại dãy số hữu tỉ (r_n) mà $r_n \to x$.

Ta có $f(r_n) = 2004^{r_n}$.

Cho $n \to \infty$ và để ý rằng f liên tục ta có $f(x) = 2004^x$.

+ Dễ thấy hàm số tìm được thoả mãn các điều kiện của bài toán.

Bài 9.

$$f(f(x) + yz) = x + f(y)f(z), \forall x, y, z \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Đặt $a = f(0)$

Cho $x = 0, y = 0, z = 0$, từ (1) ta có: $f(a) = a^2$ (2)

Cho $x = 0, y = a, z = 0$, từ (1) ta có: $f(a) = a^3$ (3)

Từ (2), (3) suy ra $a = 0$ hoặc $a = 1$.

Nếu $a = 1$ thì với $y = f(x)$, $z = 0$, từ (1) ta có $f(f(x)) = x + f(f(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (vô lí). Vậy $a = 0$.

Cho $y = 0$ từ (1) ta có $f(f(x)) = x$ (4)

Cho $x = 0$, từ (1) ta có: $f(yz) = f(y)fz)$, $\forall y, z \in \mathbb{R}$ (5)

Cho $z = 1$, từ (5) ta có: $f(y) = f(y), f(1)$, $\forall y \Rightarrow f(y) = 0, \forall y$ hoặc $f(1) = 1$

Do (1) nên f không thể bằng 0. Vậy $f(1) = 1$.

Cho $z = 1$, từ (1) ta có: $f(f(x) + y) = x + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (6)

Cho $x = f(z)$ từ (6) ta có: $f(z + y) = f(z) + f(y)$, $\forall y, z \in \mathbb{R}$ (7)

Từ (5) và (7) ta suy ra $d(x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (dễ dàng kiểm tra hàm này luôn thoả (1)).

Bài 10.

Từ $f(x + y) + f(x - y) = 2.f(x).\cos y$ (*)

Ta thay:

- Với $x = t - \dfrac{\pi}{2}.y = \dfrac{\pi}{2}$ vào (*):

$$f(t) - f(t - \pi) = 2.f\left(t - \frac{\pi}{2}\right).\cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad (1)$$

- Với $x = \dfrac{\pi}{2}$, $y = t - \dfrac{\pi}{2}$ vào (*):

$$f(t) + f(\pi - t) = 2.f\left(\frac{\pi}{2}\right).\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 2.2004.\sin t \qquad (2)$$

- Với $x = 0$, $y = t - \pi$ vào (*):

$$f(t - \pi) + f(\pi - t) = 2.f(0).\cos(t - \pi) = 2.2003(-\cos t) \qquad (3)$$

Từ (1) và (2):

$$2f(t) + f(t - \pi) + f(\pi - t) = 2.2004.\sin t \qquad (4)$$

Từ (3) và (4):

$$2f(t) = 2.2004\sin t + 2.2003\cos t$$

$$\Leftrightarrow f(t) = 2004\sin t + 2003\cos t$$

hay $f(x) = 2004\sin x + 2003\cos x$

Thử lại: hàm số f(x) thoả mãn đề bài.

Vậy: $f(x) = 2004\sin x + 2003\cos x$.

Bài 11.

Cho $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

Cho $y = 0 \Rightarrow f(x^2) = xf(x)^2$

Thế $x = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{3}}f(x^{\frac{1}{3}})^2 \Rightarrow$ x và f(x) cùng dấu.

Xét tập hợp $A = Pa > 0/f(ax) = af(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$, hiển nhiên $1 \in A$.

Nếu $a \in A \Rightarrow axf(x)^2 = af(x^3) = f((a^{\frac{1}{3}}x)^3) \Rightarrow [a^{\frac{1}{3}f(x)}]^2 = f(a^{\frac{1}{3}}x)^2$

x và f(x) cùng dấu nên $f(a^{\frac{1}{3}}x) = a^{\frac{1}{3}}f(x)$.

Giả sử $x \in A$, ta chứng minh $n = 1 \in A$.

Ta có $f(n + 1)x) = f\left(\left(n^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(1^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^3\right)$

$$= \left((n^{\frac{1}{3}} + 1^{\frac{1}{3}})\right)\left[f\left(n^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - f\left(n^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)f\left(n^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right) + f\left(1^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^2\right]$$

$$= \left(n^{\frac{1}{3}}1^{\frac{1}{3}}\right)\left(n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}1^{\frac{1}{3}} + 1^{\frac{1}{3}}\right)x^{\frac{1}{3}}f\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2$$

$$= 9n + 1)\ f(x)$$

$\Rightarrow n + 1 \in A$

Vậy $\mathbb{Z}^+ \subset A$

$2004 \in \mathbb{Z}^+$ nên ta có: $f(2004x) = 2004f(x)$.

Bài 12.

Đặt $u_n = f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$

$u{=}0_{=f}{}^{(0)}(d) = x$

$u_1 = f^{(1)}(x) = f(x)$

Thế x bằng $f^{(n)}(x)$ trong phương trình hàm ta được:

$$u_{n+2} + 2u_{n+1} = 15n_n \Leftrightarrow u_{n+2} + 2u_{n+1} - 15u_n = 0$$

Xét phương trình đặc trưng $t{=}2 + 2t - 15 = 0$

Cho hai nghiệm $t_1 = 3$, $t_2 = -5$.

Vậy $\quad u_n = \alpha 3^n + \beta(-5)^n$

$$\begin{cases} u_0 = \alpha + \beta = x \\ u_1 = 3\alpha - 5\beta = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{f(x) + 5x}{8} \\ \beta = \dfrac{3x - f(x)}{8} \end{cases}$$

$f: \mathbb{R}^+ \Rightarrow f(x); \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$u_n \geq 0$

$u_{2n+1} = \alpha 3^{2n+1} - \beta 5^{2n+1} \geq 0$

$u_{2n} = \alpha^{2n} - \beta 5+2n \geq 0$

$$\Rightarrow \alpha\left(\frac{3}{5}\right)^{2n+1} \geqslant \beta \geqslant -\alpha\left(\frac{3}{5}\right)^{2n}$$

Cho $n \to \infty \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow f(x) = 3x$.

Thử lại ta thấy $f(x) = 3x$ là nghiệm của phương trình $f(f(x) + 2f(x) = 15x$.

Bài 13.

Đặt: $g_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f(x^{2^k})$

Ta có: 1. $g_n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2. $g_{n-1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f(x^{2^k})$

3. $g_{n-1}(x^2) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f(x^{2^{k+1}}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} f(x^{2^k})$

4. $g_{n-1}(x) + g_{n-1}(x^2) = f(x) +$

$$= C_n^0 f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k f(x^{2^k}) + C_n^n f(x^{2^n}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(x^{2^k}) = g_n(x) = 0$$

Vì liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g_{n-1}(x) + g_{n-1}(x^2) = g_n(x) = 0$ (1) luôn xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Nếu $x = 0$ thì $g_{n-1}(0) = 0$ hoặc $x = 1$ thì $g_{n-1}(1) = 0$.

+ Nếu $0 < x < 1$ thì từ (1) ta có:

$$g_{n-1}(x) = g_{n-1}(x^2) = \ldots = (g_{n-1}(x^{2^m}) = \ldots = g_{n-1}(0) = 0$$

+ Nếu $x > 1$ thì từ $g_{n-1}(x) = -g_{n-1}(x^2)$ ta suy ra

$$g_{n-1}(t) = -g_{n-1}(t^{\frac{1}{2}}) = g_{n-1}(t^{\frac{1}{4}}) = ... = (-1)^m g_{n-1}(t^{\frac{1}{2^m}}) = ...$$
$$= g_{n-1}(1) = 0$$

Vậy nếu $x \geq 0$ thì $g_{n-1}(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^+$

+ Nếu $x < 0$ thì từ (1) ta được: $g_{n-1}(x) = -g_{n-1}(x^2) = 0$

$\Rightarrow g_{n-1}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+$.

Điều này chứng tỏ $g_n(x) = g_0(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^+$.

Mà $g_0(x) = f(x)$ do đó $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Kết luận: $f(x) = 0$.

Bài 14.

Giả sử f(x) là một hàm số thoả mãn đề bài.

Với $x = y = 0$ ta có $f(0) = 0$.

Mặt khác với mọi x, y ta có:

$$f(x.f(y)) = f(1.f(x.f(y))) = x.f(y)f(1) \qquad (1)$$

Và $f(y).f(x)) = x.f(y)$

Do đó $x.f(y)(f(1) - 1) = 0 \qquad (2)$

Chú ý $f(x) = 0$ là một hàm thoả mãn bài toán. Ta xét trường hợp $f(x) \neq 0$.

Từ (2) suy ra $f(1) = 1$.

Bây giờ ta xét số thực t mà $f(t) \neq 0$. Giả sử $f(y_1) = f(y_2)$, ta có

$y_1f(t) = f(t.f(y_1) = f(t.g(y_2)) = y_2f(t)$

Suy raa $y_1 = y_2$

Vậy f là hàm đơn ánh. Mà f là hàm liên tục nên suy ra f(x) đơn điệu, nhưng do $f(0) = 0 < f(1)$ nên f(x) làm hàm số t8ang.

Trong (1) cho $x = 1$ ta có $f(f(y) = y$ với mọi số thực y.

Nếu $f(y) < y$ thì $f(f(y) < f(y)$ suy ra $y < f(y)$.

Nếu $f(y) > y$ thì $f(f(y) > f(y)$ suy ra $y > f(y)$.

Vậy ta phải có $f(y) = y$ với mọi số thực y.

Thử lại thấy có hai hàm số thoả điều kiện bài toán.

Bài 15.

Giả sử f là hàm số thoả điều kiện bài toán.

Với $x, y \in \mathbb{R}$, nếu $f(x) = f(y)$ thì $f(f(x) = f(f(y)$ hay $x = y$. Điều này chứng tỏ rằng f là đơn ánh và do f liên tục trên $\mathbb{R}$, nên hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 1: f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ giả thiết $f(f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ ta suy ra $f(x) = x$.

Thật vậy giả sử tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) \neq x_0$. Khi đó:

* Nếu $f(x_0) < x_0$ thì $f(f(x_0) < f(x_0) \Rightarrow x_0 < f(x_0)$ (mâu thuẫn)

* nếu $f(x_0) > x_0$ thì $f(f(x_0) > f(x_0) \Rightarrow x_0 < f(x_0)$ (mâuthuẫn)

Vậy trường hợp f đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 2: f nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Đặt $g(x) = -f(x)$ thì $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $g(g(x)) = -f(-f(x) = f(f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $g(x) = x$.

Suy ra $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thử lại ta thấy các hàm số $f(x) = x$ và $f(x) = -x$ thoả mãn điều kiện bài toán, nên đó là tất cả các hàm số cần tìm.

Bài 16.

Từ giả thiết ta suy ra: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $f(n + 2) = f[f[f(n)]] = f(n) + 2$

Từ công thức truy hồi trên ta có:

$$f(2k) = f(0) + 2k$$
$$f(2k + 1) = f(1) + 2k$$

Giả sử $f(0) = 2m, m \in \mathbb{Z}^+$

Khi đó $f[f(0)] = f(2m) = f(0) + 2m = 4m$

Mặt khác, theo giả thiết: $f[f(0)] = 2$

Do đó $4m = 2$ (vô lí)

Vậy $f(0) = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}^+$

Khi đó $2 = f[f(0)] = f(2m + 1) = f(1) + 2m \Rightarrow f(1) = 2 - 2m \in \mathbb{Z}^+$

Do đó chỉ có một trong hai khả năng:

a) $m = 0$: $f(0) = 1$; $g(1) = 2$

Từ (*): $f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

b) $m = 1$: $f(0) = 3$; $f(1) = 0$

Kết hợp (8) ta có: $f(n) = \begin{cases} n + 2, \text{ n chẵn} \\ n - 1, \text{ n lẻ} \end{cases}$

Tóm lại: $f(n) = n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ hoặc $f(n) = \begin{cases} n + 3, \text{ n chẵn} \\ n - 1, \text{ n lẻ} \end{cases}$

Bài 17.

Trước hết ta chứng minh quy nạp theo n bằng:

$$f(x + 2n\pi) = 3^n(f(x) + 2) - 2, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

+ Với $n = 0$, $n = 1$ thì 1) đúng.

+ Giả sử với $n = k \geq 1$, (1) đúng.

+ Xét $n = k + 1$, ta có $f(x + 2(k + 1)\pi) = 3f(x + k2\pi) + 4$

$$= 3[3^k(f(x) + 2) - 2] + 4$$

$$= 3^{k+1}(f(x) + 2) - 2$$

Theo nguyên lí quy nạp (1) được chứng minh.

Xét $f(x - 2n\pi)$ với $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$

Đặt $x_1 = x - 2n\pi \Rightarrow x = x_1 + 2n\pi$

$$f(x) = f(x_1 + 2n\pi) = 3^n(f(x_1) + 2) - 2$$

$$\Rightarrow f(x_1) = 3^{-n}(f(x) + 2) - 2$$

$$\Rightarrow f(x - 2n\pi) = 3^{-n}(f(x) + 2) - 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^+ \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $f(x + 2n\pi) = 3^n(f(x) + 2) - 2$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ có $\alpha \in [0; 2\pi)$ sao cho $x = \alpha + \left[\dfrac{x}{2\pi}\right].2\pi$.

($[a]$: kí hiệu phần nguyên của a).

Nên $f(x) = f\left(\alpha + \left[\dfrac{x}{2\pi}\right].2\pi\right) = 3^{\left[\frac{x}{2\pi}\right]}(f(\alpha) + 2) - 2$

$$= 3^{\left[\frac{x}{2\pi}\right]}(\sin\alpha + 2 - 2) - 2$$

$$= 3^{\left[\frac{x}{2\pi}\right]}\sin x - 2$$

Thử lại, dễ thấy hàm f(x) cần tìm là $f(x) = 3^{\left[\frac{x}{2\pi}\right]}.\sin x - 2$.

Bài 18.

Từ (1) suy ra: $f(0) = 0$ khi $x = y = 0$, $f(-x) = -f(x)$ khi $y = -x$ (2), $f(2x) = 2f(x)$ khi $y = x$ (3)

Từ (3) theo nguyên lí quy nạp ta chứng minh được:

$$f(nx) = nf(x);\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (4)$$

Kết hợp (2) và (4) ta được: $f(mx) = mf(x);\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{Z}$ (5)

Từ (2): $f(x) = 2f\left(\dfrac{x}{2}\right) = 2^2.f\left(\dfrac{x}{2^2}\right) = \ldots = 2^n.f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}f(x);\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (6)$$

Kết hợp từ (5) và (6), ta được: $f\left(\dfrac{m}{2^n}\right) = \dfrac{m}{2^n}f(1);\ \forall m \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (7)

Sử dụng giả thiết và (7) cùng tính liên tục của hàm số f, ta suy ra được:

$f(x) = 2004x, \forall x \in \mathbb{R}$/

Bài 19.

Trong (*) lấy $x = \dfrac{\pi}{60}$, $y \in \mathbb{R}$ và đặt $d = f\left(\dfrac{2004\pi}{60}\right)$

Ta có $f(\cos 4y) = \dfrac{1}{2}d$, $\forall y \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t) = \dfrac{1}{2}d$, $\forall t \in [-1; 1]$ (1)

Do $\sin(30x \pm 4y) \in [-1; 1]$, $y \in \mathbb{R}$ nên từ (*) và (1)

ta có: $f(2004x) = d, \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra có $f(x) = d, \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

$$(1) \text{ và } (2) \Rightarrow \frac{1}{2}d = f(0) = d \Rightarrow d = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy $f(\sqrt{13} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[5]{2002}) = 0$

Bài 20.

+ Từ giả thiết, cho y = 1 ta có:

$$f(x + 1) = 2f(x) - f(x + 1) + 2 \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow f(x + 1) = f(x) + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được:

$$f(x + n) = f(x) + n \ \forall x \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{Z} \qquad \text{(a)}$$

+ Từ giả thiết cho y = x ta có:

$$f(x^2 + x) = f^2(x) - f(x + 1) + 2 \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow f(x^2 + x) = f^2(x) - f(x) + 1 \qquad \forall x \in \mathbb{Q} \qquad \text{(b)}$$

+ $\forall x \in \mathbb{Q}$, đặt $x = \dfrac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Áp dụng (b) ta có:

$$f\left[\left(\frac{p}{q} + q\right)^2 + \left(\frac{p}{q} + q\right)\right] = f^2\left(\frac{p}{q} + q\right) - f\left(\frac{p}{q} + q\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow f\left[\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} + q^2 + 2p + q\right] = \left[f\left(\frac{p}{q}\right) + q\right]^2 - f\left(\frac{p}{q}\right) - q + 1 \ \text{(Do (a))}$$

$$\Leftrightarrow f\left[\left(\frac{p}{q}\right)^2+\frac{p}{q}\right]+q^2=2p+q=f^2\left(\frac{p}{q}\right)+2qr\left(\frac{p}{q}\right)=q^2-f\left(\frac{p}{q}\right)-q+1$$

$$\Leftrightarrow f^2\left(\frac{p}{q}\right)-f\left(\frac{p}{q}\right)+1+q^2+2p+q=$$

$$=f^2\left(\frac{p}{q}\right)+2qf\left(\frac{p}{q}\right)+q^2-f\left(\frac{p}{q}\right)-q+1 \text{ (Do (b))}$$

$$\Leftrightarrow qf\left(\frac{p}{q}\right)=p+q$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}+1 \text{ (Do } q\neq 0).$$

Vậy $f(x) = x + 1$ $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = x + 1$ $\forall x \in \mathbb{Q}$ thoả mãn đề bài.

Bài 21.

Thay $x = y = 0$ vào (1) có: $f(0) = f(0)\,f(a) + f(0).f(a)$

Kết hợp với (2) ta được: $f(a) = \frac{1}{2}$ (3)

+ Thay $y = 0$ vào (1) có: $f(x) = f(x)\,f(a) + f(0).f(a - x)$

Kết hợp với (2) và (3) được: $f(x) = f(a - x)$ (4)

và: $f(y) = f(a - y)$ (5)

Từ (1), (4) và (5) được: $f(x + y) = 2f(x)f(y)$ (*)

+ Thay $y = a$ vào (1) có: $f(x + a) = f(x)\,f(0) + f(a)\,f(a - x)$

Kết hợp với (2), (3) và (4) được: $f(x + a) = f(x)$ (6)

+ Thay x bởi $(-x)$ vào (4) rồi kết hợp với (6) được:

$$f(-x) = f(a + x) = f(x) \quad (7)$$

+ Thay y bởi $(-y)$ vào (1) ta đu7ọc:

$$f(x - y) = f(x)\,f(a + y) + f(-y)\,f(a - x)$$

Kết hợp với (4) và (7) ta có $f(x - y) = 2f(x).f(y)$ (**)

+ Từ (*) và (**) suy ra: $f(x + y) = f(x - y)$; $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Cho $x = y$ thì $f(2x) = f(0) = \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $f(\sqrt[2003]{2003}) = \frac{1}{2}$.

Bài 22.

Cho $y = -1$ ta có: $f(-x) + f(x + 1) + f(x) = x + 1$

Cho y = 0 thì: $f(0) + f(x + 1) + f(x) = 2x + 1$

$\Rightarrow f(-x) - f(0) = -x$

Đặt $t = -x$. Khi đó: $f(t) - f(0) - t \Rightarrow f(t) - t = f(0) - 0$ (1)

Đặt $g(t) = f(t) - t$. Từ (1) $\Rightarrow g(t) = g(0), \forall t \in \mathbb{R}$.

Từ $f(xy) - f(x - y) + f(x + y + 1) = xy + 2x + 1$ ta có:

$$[f(xy) - xy] + f(x - y) - (x - y)] + [f(x + y + 1) - (x + y + 1)] = 0$$

$\Rightarrow f(xy) + g(x - y) + g(x + y + 1) = 0 \Rightarrow 3g(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

$\Rightarrow g(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) - t = 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$

Thử lại: $y = f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ thoả mãn hệ thức đề bài.

Vậy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên $P(x) = \dfrac{2003^x}{2003^x + \sqrt{2003}}$

Ta có: $x + y = 1$ thì

$$P(x) + P(y) = \frac{2003^x}{2003^x + \sqrt{2003}} + \frac{2003^y}{2003^y + \sqrt{2003}}$$

$$= \frac{4006 + \sqrt{2003}(2003^x + 2003y)}{4006 + \sqrt{2003}(2003^x + 2003^y)} = 1$$

$$\Rightarrow A = P\left(\frac{1001}{2003}\right) + P\left(\frac{1002}{2003}\right) = 1$$

Bài 23.

Từ (i) và (ii) $\Rightarrow 1 < f(1) < f(f(1)) = 3 \Rightarrow f(1) = 2$.

Ta có: $f(2) = f(f(1)) = 3.1 = 3$

$f(3) = f(f(2)) = 3.2$

$f(2.3) = f(f(3)) = 3.3 = 3^2$

....

Suy ra (1) $f(2.3^n) = 3^{n+1}; \forall n \in \mathbb{Z}^+$

(2)$f(3^n) = 2.3^n; \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Thật vậy giả sử (1); (2) đúng đến thứ n; xt1:

$f(3^{n+1}) = f(f(2.3^n)) = 3(2.3^n) = 2.3^{n+1}$

$f(2.3^{n+1}) = f(f(3^{n+1})) = 3.3^{n+1} = 3^{n+2}$

Vậy (1), (2) đúng với mọi n.

Ta có $(3^n - 1)$ số nguyên m nằm giữa 3^n và 2.3^n và do giả thiết (i) $f(n + 1) > f(n)$ nên có $(3^n - 1)$ số nguyên m nằm giữa $f(3^n)$ và $f(2.3^n)$ suy ra $0 < m < 3^n$

$\Rightarrow f(3^n + m) = 3(3^n + m)$.

Vậy $f(2.3^n + m) = 3(3^n + m)$ với $0 < m < 3^n$.

Suy ra $n = 2003 = 2.3^6 + 545$ suy ra $f(2003) = 3(3^6 + 545)\ 3822$.

Bài 24.

Có số $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) > o$

Do hàm số $f(x)$ liên tục trong một lân cận của điểm này và $f(x_0) > 0$ nên ta tìm được một cấp số cộng a_0, b_0, c_0 sao cho

$$f(a_0) + f(b_0) + f(c_0 0 > 0.$$

Tương tự ta tìm được một cấp số cộng a_1, b_1, c_1 sao cho

$$f(a_1) + f(b_1) + f(c_1) < 0.$$

Với tham số $t \in [0 ; 1]$ ta xét cấp số cộng $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ xác định như sau:

$$a(t) = a_0.(1 - t) + a_1.t$$

$$b(t) = b_0.(1 - t) + b_1.t$$

$$c(t) = c_0.(1 - t) = c_1.t$$

Hàm số $F(t) = f(a(t)) + g(n(t)) + f(c(t))$ là một hàm số liên tục theo t và khi $t = 0$ suy ra $F(0) > 0$; khi $t = 1$ suy ra $F(1) < 0$.

Vậy tồn tại số $t_0 \in (0; 1)$ sao cho $F(t_0) = 0$. Khi đó cấp số cộng cần tìm là $a(t_0)$, $b(t_0)$, $c(t_0)$.

Bài 25.

+ Đặt $f(1) = a$.

+ Thay x bởi $\dfrac{1}{f(y)} : \dfrac{1}{f(y)} f(1) = f(f(y)) \Rightarrow f(f(y)) = \dfrac{a}{f(y)}$

hay $f(f(x) = \dfrac{a}{f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}^+$.

+ Thay x bởi $\dfrac{1}{f(x)}$ ta có $1 f(x) f\left(\dfrac{f(y)}{f(x)}\right) f(f(y)) = \dfrac{a}{f(y)}$

Vậy $f\left(\dfrac{f(y)}{f(x)}\right) = a.\dfrac{f(x)}{f(y)}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$ (*)

+ Viết lại hệ thức ở đầu bài: $x = \dfrac{f(f(y))}{f(xf(y))}$

+ Áp dụng (*) ta được:

$$f(x) = f\left(\frac{f(f(y))}{f(xf(y))}\right) = a.\frac{f(xf(y))}{f(f(y)} = \frac{a}{\dfrac{f(f(y)}{f(xf(y))}} = \frac{a}{x}, \forall x \in \mathbb{R}^+$$

+ Dễ dàng kiểm tra được rằng hàm số thoả mãn đầu bài.

+ Vậy tất cả các hàm cần tìm $f(x) = \dfrac{a}{x}$ với $a > 0$.

Bài 26.

Ta có: $f(x) - f(y) = (x + y)\,g(x - y)$ (1)

Thay $y = -x$ vào (1); $f(x) - f(-x) = 0$ e $f(-x) = f(x)$ (2)

Thay $x = x + 1$, $y = x$ vào (1): $f(x + 1) - f(x) = (2x + 1)f(1)$ (3)

Thay $x = x + 1$, $y = -x$ vào (1): $f(x + 1) - f(-x) = 1.g(2x - 1)$ (4)

Thay (2), (3) vào (4), ta được: $f(2x + 1) = (2x + 1)g(1)$

Vậy $g(x) = ax$

$a = g(1)$: tuỳ ý

Thay $y = 0$ vào (1): $f(x) - f(0) = x.g(x) = ax^2$

$\Rightarrow f(x) = ax^2 + f(0) = ax^2 + b$; $b = f(0)$: tuỳ ý

Kết luận: $f(x) = ax^2 + b$

$g(x) = ax$ a, b tuỳ ý.

Bài 27.

Giả sử $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ thoả mãn (1)

Suy ra $x = 3$ là nghiệm bội bậc $k \geq 2$ của $f(x)$

Đặt $f(x) = (x - 3)^2 g(x)$, với $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ và thay vào (1) ta được.

$$(x - 1)^2(x - 2)^2 g(x) = (x - 1)^2(x - 3)^2 g(x + 2),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó với $x \neq 1$ và $x \neq 3$ thì $g(x) = g(x + 2)$.

$\Rightarrow g(x) = c$ tại vô số điểm $\Rightarrow g(x) = c$ với c là hằng số bất kì.

Và $\forall c$ ta có đa thức $f(x) = c(x - 3)^2$ thoả yêu cầu bài toán.

Vậy đa thức cần tìm là: $f(x) = c(x - 3)^2$.

Bài 28.

Đặt $g(x) = f(n) - \dfrac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^8$ từ các giả thiết của bài toán ta có:

$g(1) = \dfrac{1}{2}$ (1); $g(2n) = g(n)$ (2) và $g(2n + 1) = -g(n)$ (3) $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét $n \in \mathbb{N}^*$ bất kì. Giả sử $a_0, a_1, \ldots a_k$ (2); $a_0 = 1$ là biểu diễn nhị phân của n.

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow g(\overline{a_0a_1 \ldots a_k0}_{(2)}) = g(\overline{a_0a_1 \ldots a_k}_{(2)})$

(3) $\Leftrightarrow g(\overline{a_0a_1 \ldots a_k1}_{(2)}) = -g(\overline{a_0a_1 \ldots a_k}_{(2)})$

Do đó hệ (2) – (3) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g(\overline{a_0a_1 \ldots a_{k+1}}_{(2)}) = (-1)^{a_{k+1}} g(\overline{a_0a_1 \ldots a_k}_{(2)}) \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow g(\overline{a_0a_1 \ldots a_k1}_{(2)}) = (-1)^{\sum_{i=1}^{k} a_i} g(\overline{a_0}_{(2)}) = \frac{(-1)^{\sum_{i=1}^{k} a_i}}{2}$$

$$(\text{do } f(1_{(2)}) = g(1) = \frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ nếu } \sum_{i=1}^{k} a_i \text{ chẵn} \\ -\frac{1}{2} \text{ nếu } \sum_{i=1}^{k} a_i \text{ lẻ} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ nếu } \sum_{i=1}^{k} a_i \text{ lẻ} \\ -\frac{1}{2} \text{ nếu } \sum_{i=1}^{k} a_i \text{ chẵn} \end{cases}$$

Như vậy

$$g(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ nếu trong biểu diễn nhị phân của n có một số lẻ số 1.} \\ -\frac{1}{2} \text{ nếu trong biểu diễn nhị phân của n có một số chẵn số 1.} \end{cases}$$

Vậy có duy nhất hàm f(n) cần tìm là:

$$f(n) = \begin{cases} 1 \text{ nếu trong biểu diễn nhị phân của n có một số lẻ số 1.} \\ 0 \text{ nếu trong biểu diễn nhị phân của n có một số chẵn số 1.} \end{cases}$$

§4. BẤT ĐẲNG THỨC

A. ĐỀ BÀI

Bài 1.

Cho ba số thực x, y, z thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Chứng minh rằng $2(x + y + z) \leq xyz + 10$.

Bài 2.

Chứng minh $\forall x > 0$ ta đều có:

$$\left(\frac{\log_{2003} 2004 + x}{\log_{2004} 2005 + x}\right)^{\log_{2004} 2005 + x} > (\log_{2003}2004\log_{2005}2004)^{\log_{2004} 2005} > 1$$

Bài 3.

Chứng minh rằng $\forall x \geq 0$ ta luôn có:

$$\log_4(4^x + 1) > \log_9(9^x + 2^x)$$

Bài 4.

Giải bất phương trình sau:

$$\left(2\cos\frac{\pi}{7} - \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}}\right)^x - \left(\cos^2\frac{\pi}{7} - 3\sin^2\frac{\pi}{7}\right)^x \leqslant 1$$

Bài 5.

Cho tam giác ABC, chứng minh:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)^3 + \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)^3 + \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right)^3 \geqslant 3 + 6\sqrt{3}$$

Bài 6.

Chứng minh nếu x_0 là nghiệm của: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ thì $x_0^2 \leqslant 1 + a^2 + b^2 + c^2$.

Bài 7.

Với giá trị nào của m thì $\sin^3 x + \cos^3 x \geq m$ với mọi giá trị của x?

Bài 8.

Cho phương trình bậc ba: $x^3 - px^2 + qx - p = 0$, với $p > 0, q > 0$

Chứng minh rằng nếu phương trình có ba nghiệm đều lớn hơn hay bằng 1 thì:

$$p \geqslant \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)(q + 3)$$

Bài 9.

Cho n là số tự nhiên với $n > 1$, hãy so sánh: $\log_n(n + 1)$ và $\log_{n+1}(n + 2)$

Bài 10.

Cho $a_1, a_2, ..., a_n \in [0; \infty)$, không phải tất cả đều bằng 0. Xét đa thức:

$$P(x) = x^n - a_1x^{n-1} - ... - a_{n-1}x - a_n$$

Đặt $A = \sum_{j=1}^{n} a_j$, $B = \sum_{j=1}^{n} ja_j$ và gọi R là nghiệm thực dương của P(x).

Chứng minh rằng $A^A \leq R^B$.

Bài 11.

Cho a, b, c, d là độ dài các cạnh của tứ giác.

Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{abc + abd + bcd + acd}{4}} \leqslant \sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}}$$

Bài 12.

Cho a, b, c là chiều dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geqslant 0$

Bài 13.

Giả sử phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm $x_0 > 0$. Chứng minh rằng: $|b| \geqslant 2(1 - |a|)$.

Với điều kiện nào của a và b thì dấu đẳng thức xảy ra?

Bài 14.

Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng với mọi $x \in (0; 1)$, ta có:

$$x^n.\sqrt{1 - x} < \frac{1}{\sqrt{2ne}}$$

Bài 15.

Không sử dụng máy tính. Chứng minh rằng:

$$\left[\left(\sin\frac{2003}{2002}\right)^{\cos\frac{2003}{2002}}\right]^{\log_{2002}2003} > \left[\left(\cos\frac{2003}{2002}\right)^{\sin\frac{2003}{2002}}\right]^{\log_{2001}2002}$$

Bài 16.

Cho các số thực dương a, b, c, r, s sao cho $a > b > c$ và $r > a$. Chứng minh rằng:

$$a^r.b^s + b^r.c^s + c^r.a^s > a^s.b^r + b^s.c^r + c^s.a^r$$

Bài 17.

Cho ΔABC có 3 góc nhọn A, B, C và độ dài các cạnh $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ đối diện các góc A, B, C. Chứng minh:

$$\frac{a}{A(b+c-a)} + \frac{b}{B(c+a-b)} + \frac{c}{C(a+b-c)} \geqslant \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}$$

Đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều.

Bài 18.

Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng:

$$\mathrm{tg}\frac{A}{4} + \mathrm{tg}\frac{B}{4} + \mathrm{tg}\frac{C}{4} + \mathrm{tg}\frac{D}{4} + \frac{16}{4 + \mathrm{tg}\frac{A}{2} + \mathrm{tg}\frac{B}{2} + \mathrm{tg}\frac{C}{2} + \mathrm{tg}\frac{D}{2}} < 4$$

Bài 19.

Cho 5 số thực dương x, y, z, a, b thoả mãn:

$$\begin{cases} a \geqslant y \geqslant z > 0 \\ a \geqslant b > 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$x^a(y^b - z^b) + y^a(z^b - x^b) + z^a(x^b - y^b) \geqslant 0$$

Bài 20.

Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $xyz = 3$.

Chứng minh rằng: $x^{\frac{1}{x}}.y^{\frac{1}{y}}.z^{\frac{1}{z}} \leqslant 3^{\frac{xy+yz+zx}{9}}$

Bài 21.

Chứng minh rằng mọi tam giác ABC đều có:

$$\cos\frac{A-B}{2}.\cos\frac{B-C}{2}.\cos\frac{C-A}{2} \geqslant 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Bài 22.

Chứng minh rằng với mọi x, y ta có: $e^{\frac{2002}{2003}x + \frac{1}{2003}y} \leqslant \frac{2002}{2003}e^x + \frac{1}{2003}e^y$

Bài 23.

Cho a, b, c > 0 và thoả mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $1(a^3 + b^3 + c^3) + 3(a^2 + b^2 + c^2) + 12abc \geqslant \dfrac{5}{3}$

B. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

$$[2(x + y + z) - xyz]^2 = [x(2 - yz + 2(y + z)]^2$$
$$\leq [x^2 + (y + z)^2][(2 - yz)^2 + 2^2]$$

(Bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki)

hay $[2(x + y + z) - xyz]^2 \leq (9 + 2yz)(yz^2 - 4yz + 8)$

Đặt $t = yz$ ta có $[2(x + y = z) - xyz]^2 \leq 2t^3 + t^2 - 20t + 72$ (1)

Không mất tính tổng quát ta giả sử $|x| \geq |y| \geq |z|$, do

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ nên } |x|^2 \geq 3.$$

Vì vậy $|t| = |yz| \leq \dfrac{y^2 + z^2}{2} = \dfrac{9 - x^2}{2} \leqslant 3$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t^2 - 20t + 72$ với $t \in [-3; 3]$

Ta có $\max\limits_{t \in [-3;3]} f(t) = f(-2) = 100$ (2) (Chứng minh dễ dàng).

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.

Đặt $a = \log_{2003}2004$

$b = \log_{2004}2005$

$\Rightarrow a, b > 0; a \neq b$

điều phải chứng minh $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{a - x}{b + x}\right)^{b+x} > \left(\dfrac{a}{b}\right)^b & \forall a, b, x > 0 \text{ và } a \neq b. \\ a > b \end{cases}$

* Chứng minh a > b:

Xét hàm số $f(x) = \log_x(x + 1)$ với $x > 1$

Ta có $f(x) = \dfrac{\ln(x + 1)}{\ln x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x \ln x - (x + 1)\ln(x + 1)}{x(x + 1)\ln^2 x} < 0 \quad \forall x > 1$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến khi $x > 1 \Rightarrow f(2003) > f(2004)$

$\Rightarrow \log_{2003}2004 > \log_{2004}2004$

* Chứng minh $\left(\dfrac{a + b}{b + x}\right)^{b+x} > \left(\dfrac{a}{b}\right)^b$ $\forall a, b, x > 0$ và $a \neq b$.

Xét $g(x) = \left(\dfrac{a+x}{b+x}\right)^{b+x}$ với $x \geq 0$

Ta có: $\ln g(x) = (b+x)\ln\dfrac{a+b}{b+x}$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = \ln\frac{a+x}{b+x} + \frac{(b+x)^2}{a+x}\cdot\frac{b-a}{(b+x)^2}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \left(\frac{b-a}{a+x} + \ln\frac{a+x}{b+x}\right)\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x}$$

Xét $h(x) = \dfrac{b-a}{a+x} + \ln\dfrac{a+x}{b+x}$

Ta có: $h'(x) = \dfrac{a-b}{(a+x)^2} + \dfrac{b+x}{a+x}\cdot\dfrac{b-a}{(b+x)^2} = \dfrac{-(b-a)^2}{(a+x)^2(b+x)} < 0$

Vậy h(x) nghịch biến khi $x \geq 0$. Do đó $\forall x \geq 0$ ta đều có:

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) < h(x) \leqslant h(0)$ mà $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow b(x) > 0, \forall x \geq 0$

$\Rightarrow g'(x) > 0, \forall x > 0$. Tức là g(x) đồng biến khi $x \geq 0$

Do đó $\forall x > 0$ ta đều có $g(x) > g(0)$.

Hay $\left(\dfrac{a+x}{b+x}\right)^{b+x} > \left(\dfrac{a}{b}\right)^{b}$

Bài 3.

Với $x \geq 0$: $\log_4(4^x + 1) > \log_9(9^x + 2^x)$

$\Leftrightarrow \log_4(4^x + 1) - x > \log_9(9^x + 2^x) - x$

$$\Leftrightarrow \log_4\left(\frac{4^x+1}{4^x}\right) > \log_9\left(\frac{9^x+2^x}{9^x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_4\left[1 + \left(\frac{1}{4}\right)^x\right] > \log_9\left[1 + \left(\frac{2}{9}\right)^x\right]$$

Ta có $\left.\begin{array}{l} x \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{4} > \dfrac{2}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^x > 1 + \left(\dfrac{2}{9}\right)^x > 1$

$$\Rightarrow \log_4\left[1 + \left(\frac{1}{4}\right)^x\right] > \log_4\left[1 + \left(\frac{2}{9}\right)^x\right] > \log_9\left[1 + \left(\frac{2}{9}\right)^x\right]$$

Vậy, bất đẳng thức đã được chứng minh.

Bài 4.

Đặt $A = 2\cos\frac{\pi}{7} - \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}} - \left(\cos^2\frac{\pi}{7} - 3\sin^2\frac{\pi}{7}\right)$

$$= \left[2\cos^2\frac{\pi}{7} - \frac{1}{2} - \left(4\cos^3\frac{\pi}{7} - 3\cos\frac{\pi}{7}\right)\right].\frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{3\pi}{7}\right).\frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}$$

- $2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}.A = \sin\frac{\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7}$

$$= \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} = \sin\frac{2\pi}{7}$$

$\Rightarrow A = 1.$

Ta có: $\cos^2\frac{\pi}{7} - \sin^2\frac{\pi}{7} = \frac{\cos\frac{3\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}}$

$\Rightarrow 0 < \cos^2\frac{\pi}{7} - 3\sin^2\frac{\pi}{7} < 1$

$\Rightarrow 2\cos\frac{\pi}{7} - \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}} > 1$ (do A = 1).

Bất phương trình đã cho được viết:

$$\left(2\cos\frac{\pi}{7} - \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}}\right)^x - \left(\cos^2\frac{\pi}{7} - 3\sin^2\frac{\pi}{7}\right)^x \le$$

$$\le \left(2\cos\frac{\pi}{7} - \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}}\right) - \left(\cos^2\frac{\pi}{7} - 3\sin^2\frac{\pi}{7}\right) \qquad (1)$$

Xét hàm số:

$f(x) = \left(2\cos\frac{\pi}{7} - \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}}\right)^x - \left(\cos^2\frac{\pi}{7} - 3\sin^2\frac{\pi}{7}\right)^x$ xác định trên R.

$$\Rightarrow f(x) = \left(2\cos\frac{\pi}{7} - \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}}\right)^x . \ln\left(2\cos\frac{\pi}{7} - \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}}\right) -$$

$$- \left(\cos^2\frac{\pi}{7} - 3\sin^2\frac{\pi}{7}\right)^x . \ln\left(\cos^2\frac{\pi}{7} - 3\sin^2\frac{\pi}{7}\right)$$

$\Rightarrow f(x) > 0, \forall x$

$\Rightarrow$ Hàm số f(x) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ nghiệm của bất phương trình (1) là $x \le 1$.

Bài 5.

Áp dụng bất đẳng thức Béc–nu–li ta có:

$$\sin A > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sin A} > 0$$

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)^3 \ge 1 + \frac{3}{\sin A}$$

tương tự $\left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)^3 \geqslant 1 + \frac{3}{\sin B}$

$$\left(1 + \frac{1}{\sin C}\right)^3 \geqslant 1 + \frac{3}{\sin C}$$

rồi cộng lại ta được

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)^3 + \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)^3 + \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right)^3 \ge$$

$$\ge 3 + 3\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$(\sin A + \sin B + \sin C)\left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}\right) \geqslant 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geqslant \frac{9}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

mà $\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geqslant 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)^3 + \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)^3 + \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right)^3 \geqslant 3 + 6\sqrt{3}$$

Bài 6.

Trường hợp: $x_0^2 \leqslant 1$ thì $x_0^2 \le 1 + a^2 + b^2 + c^2$

Trường hợp: $x_0^2 > 1$ ta có x_0 là nghiệm nên:

$$x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + c = 0$$

$$x_0^3 = -ax_0^2 - bx_0 - c$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki, ta có:

$$(-ax_0^2 - bx_0 - c)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)(x_0^4 + x_0^2 + 1)$$

$$\Rightarrow x_0^6 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{x_0^6 - 1}{x_0^2 - 1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x_0^6(x_0^2 - 1)}{x_0^6 - 1} \leqslant (a^2 + b^2 + c^2) \text{ vì } x_0^2 > 1$$

$$\Rightarrow \frac{x_0^6(x_0^2 - 1)}{x_0^6 - 1} + 1 \leqslant 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow \frac{x_0^8 - 1}{x_0^6 - 1} \leqslant 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

$$x_0^2 > 1 \Rightarrow x_0^8 - x_0^2 < x_0^8 - 1 \Rightarrow \frac{x_0^8 - 1}{x_0^6 - 1} > x_0^2$$

Suy ra: $x_0^2 \leqslant 1 + a^2 + b^2 + c^2$

Bài 7.

Đặt: $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x)$

Đặt $t = \sin x + \cos x$ ($-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$)

do đó $F(t) = -\dfrac{1}{2}t^3 + \dfrac{3}{2}t$

Suy ra $F'(t) = -\dfrac{3}{2}t^2 + \dfrac{3}{2}$

$F'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1; t = 1$

t	$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$
f′(t)		–	0	+	0	–	
f(t)	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	↘	m = –1	↗	m = 1	↘	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $\sin^3 x + \cos^3 x \geqslant m$, với mọi giá trị của x thì $m \le -1$.

Bài 8.

Gọi x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình với $1 \le x_1 \le x_2 \le x_3$.

Áp dụng định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x_1x_2x_3 = p \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q \end{cases}$

Tồn tại ΔABC sao cho $x_1 = \text{tg}A$, $x_2 = \text{tg}B$, $x_3 = \text{tg}C$

$$\left(\frac{\pi}{4} \leqslant \hat{A} \to \hat{B} \to \hat{C} < \frac{\pi}{2}\right)$$

Khi đó bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow \text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C \ge \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)(\text{tg}A.\text{tg}B + \text{tg}B.\text{tg}C + \text{tg}C.\text{tg}A + 3)$$

$$\Leftrightarrow \text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C + 3\text{cotg}A.\text{cotg}B.\text{cotg}C \le 8 - 4\sqrt{2}$$

Đặt $\text{VT} = T = \text{cotg}A + \dfrac{2\sin A}{\cos(B - C) + \cos A} + 3\cot gA\dfrac{\cos(B - C) - \cos A}{\cos(B - C) + \cos A}$

$$\le \frac{1}{2\text{tg}\dfrac{A}{2}} + 3\text{tg}\frac{A}{2} - \frac{3}{2}\text{tg}^3\frac{A}{2}$$

Đặt $t = \text{tg}\dfrac{A}{2}$, $\sqrt{2} - 1 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \left(\left(\dfrac{\pi}{4} \leqslant \hat{A} \leqslant \hat{B} \leqslant \hat{C} < \dfrac{\pi}{2}\right)\right.$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{1}{2t} + 3t - \dfrac{3}{2}t^3$, $t \in \left[\sqrt{2} - 1;\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$$f(t) = \frac{1}{2t^2} + 3 - \frac{9}{2}t^2 \leqslant 0$$

nên $f(t) \le f(\sqrt{2} - 1) = 8 - 4\sqrt{2}$ (điều phải chứng minh).

Bài 9.

Lập tỉ số: $A = \dfrac{\log_n(n + 1)}{\log_{n+1}(n + 2)}$

hay $A = \dfrac{1}{\log_{n+1}(n).\log_{n+1}(n + 2)}$

Vì $n > 1$ nên $\log_{n+1} n > 0$, $\log_{n+1}(n + 2) > 0$ do đó áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số $\log_{n+1} n$, $\log_{n+1}(n + 2)$ ta có:

$$\log_{n+1}(n).\log_{n+1}(n + 2) \le \left(\frac{\log_{n+1} n + \log_{n+1}(n + 2)}{2}\right)^2$$

$$\log_{n+1}(n).\log_{n+1}(n + 2) \leqslant \left(\frac{\log_{n+1} n(n + 2)}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

$$n(n+2) = n^2 + 2n < (n^2 + 2n + 1) \Rightarrow n(n+2) < (n+1)^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\log_{n+1} n.\log_{n+1}(n+2) < \left[\frac{\log_{n+1}(n+1)^2}{2}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow \log_{n+1} n.\log_{n+1}(n+2) < 1.$$

Mà $A = \dfrac{1}{\log_{n+1} n.\log_{n+1}(n+2)} \Rightarrow A > 1$ nên kết luận:

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$$

Bài 10.

* Xét $f(z) = \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z^2} + \ldots + \dfrac{a_n}{z^n}$ có đạo hàm

$$f(x) = -\frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \ldots - \frac{na_n}{z^{n+1}} < 0,\ \forall z \in (0; +\infty)$$

$\Rightarrow$ f(z) giảm từ $+\infty$ về 0 trên $(0; +\infty) \Rightarrow \exists!\ R > 0$: $f_R = 1$ hay R là nghiệm duy nhất của P(x).

* Đặt $c_j = \dfrac{a_j}{A} \Rightarrow c_j \geq 0$ và $\sum\limits_{j=1}^{n} e_j = 1$.

Hàm số $y = -\ln t$ có $y'' = \dfrac{1}{t^2} > 0,\ \forall t \in (0; +\infty)$.

$\Rightarrow y = -\ln t$ là hàm số có đồ thị lõm trên $(0; +\infty)$

Theo bất đẳng thức Zen–xen (Jensen)

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j\left(-\ln\frac{A}{R^j}\right) \geq -\ln\sum_{j=1}^{n} c_j\frac{A}{R_j} = -\ln\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j}{R_j} = -\ln 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j\ (-\ln A + \ln R^j) \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j \ln A \leq \sum_{j=1}^{n} jc_j \ln R$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j \ln A \leq \sum_{j=1}^{n} ja_j \ln R \Rightarrow \ln A^A \leq \ln R^h.$$

$\Rightarrow A^A \leq R^B$ (điều phải chứng minh).

Bài 11.

Đặt $a = x_1, b = x_2$

$c = x_3, d = x_4$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$.

Xét đa thức $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) =$

$$= x^4 - (\sum_{i=1}^{4} x_i)x^3 + (\sum_{1\leq i\leq j\leq 4}^{3} x_i x_j)x^2 - (\sum_{1\leq i\leq j\leq 4}^{2} x_i x_j x_k)x + x_1x_2x_3x_4$$

$$\Rightarrow P'(x) = 4x^3 - 3x^2\sum_{i=1}^{4} x_i + 2x\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 4}^{3} x_i x_j\Big) - \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant 4}^{2} x_i x_j x_k \qquad (1)$$

Trường hợp 1: $x_j < x_i + 1$

Áp dụng định lí La-gơ-răng ta có $\exists y_1 \in (x_1; x_2)$ sao cho:

$$0 = P(x_1) - P(x_2) = (x_1 - x_2)P'(y_1) \Rightarrow P'(y_1) = 0$$

Tương tự $\exists y_2 \in (x_2; x_3)$ sao cho $P'(y_1) = 0$

$\exists y_3 \in (x_3; x_4)$ sao cho $P'(y_3) = 0$

Trường hợp 2: nếu $x_i = x_{i+1}$ thì $P'(x)$ có nghiệm $y_i = x_i = x_{i+1}$

Vậy với cả hai trường hợp trên ta đều có $P'(x)$ có 3 nghiệm y_1, y_2, y_3 (với $x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq x_3 \leq y_3 \leq x_4$).

Nên $P'(x) = 4(x - y_1)(x - y_2)(x - y_3)$

$$= 4x^3 - 4\sum_{i=1}^{3} y_i x^2 + 4\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3}^{2} y_i y_j\Big)x = 4y_1y_2y_3 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) đồng nhất các hệ số ta được:

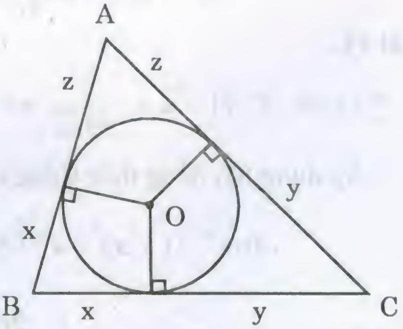
$$\begin{cases} y_1y_2y_3 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant 4}^{2} x_i x_j x_k \\ \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 3} y_i y_j = \dfrac{1}{2}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 4}^{3} x_i x_j \end{cases} \qquad (3)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$y_1y_2 = y_2y_3 + y_3y_1 \geqslant 3\sqrt[3]{(y_1y_2y_3)^2} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant 4}^{2} x_i x_j x_k} \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant 4}^{2} x_i x_j}$ suy ra điều phải chứng minh.

Bài 12.



+ Đặt: $a = x + y$

$b = y + z$

$c = z + x$

+ Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$(x + y)^2(y + z)(x - z) +$$
$$+ \quad (y + z)^2(x + z)(y - z) +$$
$$+ \quad (x + z)^2(x + y)(z - y) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow xy^3 + yz^3 + zx^3 \geqslant xyz(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} \geqslant x + y + z \qquad (*)$$

+ Áp dụng bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki:

$$(x + y + z)\left(\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y}\right) \geqslant (x + y + z)^2$$

$\Rightarrow$ (*) đúng $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Bài 13.

Vì $x_0 > 0$ là nghiệm của phương trình đã cho nên:

$$x_0^4 - |a|x_0^3 - |b|x_0^2 - |a|x_0 + 1 \leqslant x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + ax_0 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_0^4 + 1 \leqslant |a|(x_0^3 + x_0) + |b|x_0^2 \qquad (1)$$

Do $x_0^4 + 1 \geqslant 2x_0^2 > 0$ (2) (theo bất đẳng thức Cô-si)

$$x_0^4 + 1 \geqslant x_0^3 = x_0 > 0$$

(Vì (3) $\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2(x_0^2 + x_0 + 1) \geqslant 0$)

Nên từ (1) ta có:

$$x_0^4 + 1 \leqslant |a|(x_0^4 + 1) + \frac{|b|}{2}(x_0^4 + 1) = \left(|a| + \frac{|b|}{2}\right)(x_0^4 + 1)$$

$$\Rightarrow |a| + \frac{|b|}{2} \geqslant 1 \text{ hay } |b| \geq 2(1 - |a|)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi dấu đẳng thức ở (1), (2) và (3) đồng thời xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant 0 \text{ và } b \leqslant 0 \\ x_0^4 = 1 \\ x_0 = 1 \\ x_0^4 + ax_0^3 + bx_0^2 + ax_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant 0 \\ b \leqslant 0 \\ b + 2a + 2 = 0 \end{cases}$$

Bài 14.

* Ta có: $x^n\sqrt{1 - x} < \frac{1}{\sqrt{2ne}} \Leftrightarrow 2nx^{2n}(1 - x) < \frac{1}{e}$

* Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2n + 1 số ta được

$$2nx^{2n}.(1 - x) = x^{2n}(2n - 2nx) \leqslant \left(\frac{2n}{2n + 1}\right)^{2n+1}$$

* Ta chỉ cần chứng minh: $\left(\frac{2n}{2n + 1}\right)^{2n+1} < \frac{1}{e}$

$$\Leftrightarrow (2n + 1)[\ln(2n + 1) - \ln(2n)] > 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(2n+1) - \ln 2n > \frac{1}{2n+1} \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = \ln x$, là hàm liên tục trên đoạn $[2n; 2n+1]$ và có $f'(x) = \frac{1}{x}$,

nên theo định lí La-gơ-răng: tồn tại $C \in (2n; 2n+1)$ để $\frac{f(2n+1) - f(2n)}{2n+1-2n} = f(C)$

hay $\ln(2n+1) - \ln 2n = \frac{1}{C} \qquad (2)$

mà $2n < C < 2n+1 \Rightarrow \frac{1}{2n} > \frac{1}{C} > \frac{1}{2n+1} \qquad (3)$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ bất đẳng thức (2) (điều phải chứng minh).

Bài 15.

Ta có: $\frac{\pi}{4} < \frac{2003}{2002} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 > \sin\frac{2003}{2002} > \cos\frac{2003}{2002} > 0$

$$\Rightarrow 1 > \left(\sin\frac{2003}{2002}\right)^{\cos\frac{2003}{2002}} > \left(\cos\frac{2003}{2002}\right)^{\cos\frac{2003}{2002}} \qquad (1)$$

Mặt khác: $\left(\cos\frac{2003}{2002}\right)^{\cos\frac{2003}{2002}} > \left(\cos\frac{2003}{2002}\right)^{\sin\frac{2003}{2002}} \qquad (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow 1 > \left(\sin\frac{2003}{2002}\right)^{\cos\frac{2003}{2002}} > \left(\cos\frac{2003}{2002}\right)^{\sin\frac{2003}{2002}} > 0 \qquad (3)$

Xét hàm số: $f(x) = \log_x(x+1)$ với $x > 1$.

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \Rightarrow f'(x) = \left[\frac{1}{1+x}\ln x - \frac{1}{x}\ln(x+1)\right] \Big/ \ln^2 x$$

$\Rightarrow f'(x) < 0, \forall x > 1$ suy ra $f(x)$ nghịch biến $\forall x > 1$

$\Rightarrow \log_{2001}2002 > \log_{2002}2003 > 0 \qquad (4)$

Từ (3), (4) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 16.

Đặt $a = cx$, $b = cy$ thế thì $x > y > 1$.

Bất đẳng thức trở thành $x^r.y^s + y^r = x^s > x^s.y^r + y^s + x^r$

$$\Leftrightarrow F(x) = x^r(y^s - 1) + x^r(y^s - 1) + x^s(1 - y^r) + y^r - y^s > 0$$

Ta có: $F(y) = 0$

$$F'(x) = r.x^{r-1}.(y^s - 1) + s.x^{s-1}.(1 - y^r)$$

$$= [rx^{r-s}.(y^s - 1) + s.(1 - y^r)].x^{s-1}$$

Lại có $r.x^{r-s}(y^s - 1) + s(1 - y^r) \geqslant r.y^{r-s}(y^s - 1) + s.(1 - y^r) =$

$$= (r - s).y^r - r.y^{r-s} + s = G(y)$$

Ta có $G(1) = 0$

$$F'(y) = (r - s).t.y^{r-1}(y^s - 1) > 0$$

với $y > 1$ và $r > 0$

Do đó $G(y)$ tăng trên $(1; +\infty)$

$\Rightarrow G(y) > G(1) = 0 \qquad \forall y > 1$

Do $x > y > 1$ và $F'(x) \geq G(y).x^{s-1} > 0$

$\Rightarrow F'(x0 > 0, \forall x > y > 1$

$\Rightarrow$ F tăng trên $[y; +\infty]$ với mỗi y cố định

$\Rightarrow F(x) > F(y) = 0, \forall x > y > 1.$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 17.

Gọi p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Trước hết ta có hệ thức $\text{tg}\left(\frac{1}{2}A\right) = \frac{r}{p-a}$, $\text{tg}\left(\frac{1}{2}B\right) = \frac{r}{p-b}$, $\text{tg}\left(\frac{1}{2}C\right) = \frac{t}{p-c}$ và bổ đề:

Bổ đề: $A \geq B \Leftrightarrow \dfrac{1}{A(p-a)} \geqslant \dfrac{1}{B(p-b)}$

Chứng minh bổ đề: Xét hàm số $f(x) = \dfrac{\text{tg}x}{x}$ trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Hàm này có đạo hàm cấp 1:

$$f(x) = \frac{\dfrac{x}{(\cos^2 x)} - \dfrac{\sin x}{\cos x}}{x^2} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2\cos^2 x} > 0$$

suy ra f(x) là hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ suy ra $A \geq B$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}A \geqslant \frac{1}{2}B \Leftrightarrow \frac{\text{tg}\frac{1}{2}A}{\frac{1}{2}A} \geqslant \frac{\text{tg}\frac{1}{2}B}{\frac{1}{2}B} \Leftrightarrow \frac{r}{A(p-a)} \geqslant \frac{r}{B(p-b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{A(p-a)} \geqslant \frac{1}{B(p-b)}$$

Chứng minh bài toán: Không làm mất tính chất tổng quát của bài toán, ta giả sử $A \geq B \geq C$. Theo định lí hàm số sin và bổ đề ta có

$$p - a \leq p - b \leq p - c \text{ và } \frac{1}{A(p-a)} \geqslant \frac{1}{B(p-b)} \geqslant \frac{1}{C(p-c)}$$

Ta có bất đẳng thức Trê-bư-sép:

$$((p-a)+(p-b)+(p-c).\left(\frac{1}{A9p-a)}+\frac{1}{B(p-b)}+\frac{1}{C(p-c)}\right) \geq$$

$$\geq 3\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right).$$

Khai triển vế trái của bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{A}{(p-a)}+\frac{b}{B(p-b)}+\frac{c}{C(p-c)}+\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C} \geqslant 2\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)$$

Thay $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ vào bất đẳng thức cuối cùng và rút gọn ta có bất đẳng thức phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi A = B = C và a = b = c nghĩa là khi tam giác ABC đều.

Bài 18.

Với x, y, z, t > 0 thì

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t} \geqslant \frac{16}{x+y+z+t}$$

Mà ABCD lồi nên

$$0<\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}, \frac{D}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}, \operatorname{tg}\frac{B}{2}, \operatorname{tg}\frac{C}{2}, \operatorname{tg}\frac{D}{2}>0$$

Ta có $$\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{D}{2}} \geq$$

$$\geq \frac{16}{4+\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{D}{2}}$$

Do đó, để có điều phải chứng minh, chỉ cần chứng minh

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{4}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\right)+\left(\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{B}{2}}\right)+\left(\operatorname{tg}\frac{C}{4}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}\right)+$$

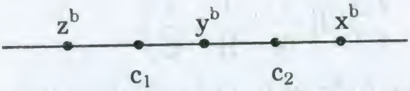
$$+\left(\operatorname{tg}\frac{D}{4}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{A}{2}}\right)<4$$

Đặt $x=\operatorname{tg}\frac{A}{4}$ thì $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{2x}{1-x^2}$. Thế thì

$$\operatorname{tg}\frac{A}{4}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\frac{1+x+x^2-x^3}{1+2x-x^2}<\frac{2x^2-x-x^3}{1+2x-x^2}+1<1$$

Vì: $1 + x^2 \geq 2x \Rightarrow x + x^3 \geq 2x^2$. Điều phải chứng minh.

Bài 19.



Đặt $f(x) = x^{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b} \geqslant 1\right)$

$$f(x) = \frac{a}{b}x^{\frac{a}{b}-1}$$

$$f'(x) = \frac{a}{b}\left(\frac{a}{b} - 1\right)x^{\frac{a}{b}-2} > 0$$

$\Rightarrow f'(x)$ tăng trên $(x^b; x^b)$

Theo định lí La-gơ-răng: $f(y^b) - f(z^b) = f'(c_1)[y^b - z^b]$

$$y^a - z^a = f'(c_1)[y^b - z^b]$$

Tương tự: $x^a - y^a = f'(\chi_2)[x^b - y^b]$

$$(x^a - y^a)(y^b - z^b) = f'(c_2)[x^b - y^b][y^b - z^b]$$

$$(y^a - z^a)(x^b - y^b) = f'(c_1)[x^b - y^b][y^b - z^b]$$

Ta có: $f(c_2) \geq f'(c_1)$

$\Rightarrow (x^a - y^a)(y^b - z^b) \geqslant (y^a - z^a)(x^b - y^b)$

$\Rightarrow x^a(y^b - z^b) + y^a(z^b - x^b) + z^a(x^b - y^b) \geqslant 0$ (điều phải chứng minh).

Bài 20.

Lấy $\log_3$ hai vế, ta được:

$$\frac{1}{x}\log_3 x + \frac{1}{y}\log_3 y + \frac{1}{z}\log_3 z \leqslant \frac{xy + yz + zx}{2xyz}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{x}\log_3 x + \frac{1}{y}\log_3 y + \frac{1}{z}\log_3 z\right) \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \qquad (1)$$

Đặt $a = \log_3 x$, $b = \log_3 y$, $c = \log_3 z$.

Giả thiết $xyz = 3$ cho $a + b + c = 1$.

Bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c} \leqslant \frac{1}{3^a} + \frac{1}{3^b} + \frac{1}{3^c}\right)$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c}\right) \leqslant (a + b + c)\left(\frac{a}{3^a} + \frac{b}{3^b} + \frac{c}{3^c}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a - b)\left(\frac{1}{3^a} - \frac{1}{3^b}\right) + (b - c)\left(\frac{1}{3^b} - \frac{1}{3^c}\right) + (c - a)\left(\frac{1}{3^c} - \frac{1}{3^a}\right) \leq 0$$

Bài 21.

$$\cos\frac{A - B}{2}.\cos\frac{B - C}{2}.\cos\frac{C - A}{2} \geqslant 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}.\cos\frac{B-C}{2}.\cos\frac{C-A}{2} \geq$$

$$\geq 8\sin A.\sin B.\sin C$$

$$\Leftrightarrow 8\sin\frac{B+C}{2}.\sin\frac{C+A}{2}.\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}.\cos\frac{B-C}{2}.\cos\frac{C-A}{2} \geq$$

$$\geq 8\sin A.\sin B.\sin C$$

$\Leftrightarrow (\sin A + \sin B)(\sin B = \sin C)(\sin C + \sin A) \geq 8\sin A.\sin B.\sin C$: Đúng.

Bài 22.

Đặt $a = \dfrac{2002}{2003}$; $b = \dfrac{1}{2003}$ ta có $a + b = 1$.

$\Rightarrow b = 1 - a$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$e^{ax+(1-a)y} \leqslant ae^{x} + (1-a)e^{y}$$

$$\Leftrightarrow e^{y}.e^{a(x-y)} \leqslant e^{y} + a(e^{x} - e^{y})$$

$\Leftrightarrow e^{a(x-y)} \leqslant 1 + a(e^{x-y} - 1)$ (chia hai vế cho $e^{y} > 0$)

$\Leftrightarrow e^{a}(x-y) - ae^{x-y} + a - 1 \leqslant 0$ (*)

Xét hàm số: $f(t) = e^{at} - ae^{t} + a - 1;\ t \in \mathbb{R}$

$f'(t) = ae^{at} - ae^{t} = a(e^{at} - e^{t})$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{at} = e^{t} \Leftrightarrow t = 0$

$f'(t) > 0 \Leftrightarrow e^{at} > e^{t} \Leftrightarrow at > t$

$\Leftrightarrow (1-a)t < 0 \Leftrightarrow t < 0$

Xét hàm số: $f(t) = e^{at} - ae^{t} = a(e^{at} - e^{t})$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{at} = e^{t} \Leftrightarrow t = 0$

$f'(t) > 0 \Leftrightarrow e^{at} > e^{t} \Leftrightarrow at > t$

$\Leftrightarrow (1-a)t\ ,0\ \beta\ t < 0$

Tương tự: $f'(t) < 0 \Leftrightarrow e^{at} < e^{t} \Leftrightarrow at < t \Leftrightarrow t < 0$

Bảng biến thiên:

t	−∞		0		+∞
f′(t)		+		−	
f(t)		↗	0	↘	

Từ bảng biến thiên suy ra $f(t) \leq f(0) = 01\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Hay $e^{at} - ae^{t} + a - 1 \leq 0;\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Thay $t = x - y$ ta có bất đẳng thức (*) được chứng minh.

Bài 23.

Đặt ab + bc + ca = x; abc = y $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2x$

Ta có: $(a + b + c)^3 = a^2 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc$

$\Rightarrow 1 = a^3 + b^3 + c^3 + 3x - 3y \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 1 - 3x + 3y$

do đó $(2(a^2 + b^2 + c^2) + 2(a^2 + b^2 + c^2)12abc =$

$$= 2(1 - 3x + 3y) + 3(1 - 2x) + 12y = 18y - 12x + 5$$

Ta sẽ chứng minh: $18y - 12 + 5 \geq \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x - y \leqslant \frac{5}{27}$

Xét $\quad f(t) = (t - a)(t - b)(t - c) = t^3 - t^2 + xt - y$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3} - a\right)\left(\frac{2}{3} - b\right)\left(\frac{2}{3} - c\right) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} + \frac{2}{3}x - y \qquad (1)$$

Vì a, b, c > 0 và a + b +c = 1 nên trong 3 số a, b, c tồn tại nhiều nhất một số lớn hơn hoặc bằng $\frac{2}{3}$.

Nếu $a \geq \frac{3}{3} \Rightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) < 0$

Nếu a, b, c < $\frac{2}{3}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$f\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant \left[\frac{3\frac{2}{3} - (a + b + c)}{3}\right]^3 = \frac{1}{27}$$

Do đó $f\left(\frac{2}{3}\right) \leqslant \frac{1}{27}$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{8}{27} - \frac{4}{9} + \frac{2}{3}x - y \leqslant \frac{1}{27}x - y \leqslant \frac{5}{27}$ (điều phải chứng minh)

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

§5. ĐA THỨC

A. ĐỀ BÀI

Bài 1.

Tìm tất cả các đa thức $df(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$

(Với $a_i \neq [1; 2]$; I = 0, 1, 2, ..., n) có n nghiệm thực khác không (các ngiệm có thể trùng nhau).

Bài 2.

Tìm đa thức P(x) với hệ số thực, sao cho:

$$P(x) - 30 = \sqrt{P(x^2 + 4) - 34} \ (x \geq 0) \text{ và } P(2004) = 2034$$

Bài 3.

Cho f(x) là đa thức bậc n ($n \geq 1$) với các hệ số thực và thoả điều kiện:

$$f(k) = \frac{k}{k+1}, \forall k = 1, 2, 3, ..., n. \text{ Biết } f(0) = 0.$$

Tính f(2004)

Bài 4.

Giả sử a, b là hai trong bốn nghiệm của đa thức

$$P(x) = x^4 + x^3 - 1$$

Chứng minh: ab là nghiệm của đa thức $Q(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$

Bài 5.

Cho dãy Fi-bô-na-xi (a_n)

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \text{ với } \forall n \in \mathbb{N}^*$$

và cho đa thức f(x) bậc n với hệ số nguyên biết:

$$f(k) = a_k \text{ với } \forall k = 1002; 1003; ...; 2002.$$

Tính f(2003).

Bài 6.

Chứng minh rằng không tồn tại P, Q là hai đa thức có hệ số thực sao cho:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{N}^*.$$

Bài 7.

Cho đa thức P(x) bậc n thoả mãn:

$$P(-x) < 0; -P'(-1) \leq 0; P'''(-1) \leq 0; ...; (-1)^n P^{(n)}(-1) \leq 0$$

$$P(1) > 0; P'(1) \geq 0; P''(1) \geq 0; ...; P^{(n)}(1) \geq 0.$$

Chứng minh rằng tất cả các nghiệm thực của đa thức P(x) (nếu có) đều thuộc khoảng (–1; 1).

Bài 8.

Cho đa thức:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 1$$

Hãy tính: $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i^2 + 1}{(x_i^2 - 1)^2}$

ở đó x_i là nghiệm và n là số nghiệm của đa thức f(x).

Bài 9.

Tồn tại hay không các đa thức P(x) và Q(x) thoả mãn hệ thức:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sqrt{x^2 + 2002}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 10.

Tìm tất cả các đa thức f() thoả mãn điều kiện: $xf(x - 1) = (x - 3).f(x)$

Bài 11.

Tồn tại hay không hai đa thức P(x), Q(x) khác hằng số, sao cho:

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Bài 12.

Cho k là số nguyên dương. Tìm tất cả các đa thức P(x) thoả mãn:

$$(x - 2001)^k.P(x) = (x - 2002)^k.P(x + 1)$$

Bài 13.

Cho đa thức f(x) có bậc 2000 và thoả mãn điều điện:

$$f(n) = \frac{1}{n}, \forall n = 1, 2, ..., 2001.$$

Tính f(2002).

Bài 14.

Đa thức $1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n}$ có bao nhiêu nghiệm thực?

Bài 15.

Tìm đa thức bậc nhỏ nhất có hệ số nguyên nhận $1 - \sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{4}$ làm nghiệm.

Bài 16.

Cho f(x) là một đa thức nghiệm bậc 5 nhận giá trị 1999 với giá trị nguyên khác nhau của biến x. Chứng minh rằng phương trình f(x) = 2030 không thể có nghiệm nguyên.

Bài 17.

Cho bao nhiêu thức dạng: $P(x) = x^2 + ax + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$,

sao cho 3 nghiệm của nó là a, b, c?

Bài 18.

Cho đa thức $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ và $|a_i| = 1$ $(I = 0, 1, ..., n - 1)$.

Chứng minh rằng nếu P(x) có n nghiệm thực thì $n \leq 3$.

Bài 19.

Cho đa thức f(x) bậc n có n nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng tập hợp nghiệm của bất phương trình:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} > 1999$$

là một số có tổng độ dài bằng $\frac{n}{1999}$.

Bài 20.

Cho đa thức f(x) có hệ số thực, $\deg f(x) \geq 1$ và thoả mãn các điều kiện sau:

a) Phương trình f(x) = 0 có nghiệm kép.

b) $f(x).f(y).\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Chứng minh rằng phương trình f(x) = 0 có duy nhất một nghiệm thực.

Bài 21.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, đa thức:

$$f(x) = x^4 - 2001x^3 + (2000 + a)x^2 - 1999x + a$$

không thể có hai nghiệm nguyên (phân biệt hay trùng nhau)

Bài 22.

Cho hai đa thức: $f(x) = a_0x^n + ... + a_n$

và $g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} - b_2x^{n-2} - ... - b_n$

Trong đó $0 < b_0 \leq |a_0|$; $b_1 \geq |a_1|$; $b_2 \geq |a_2|$; ...; $b_n \geq |a_n|$.

Chứng minh rằng các nghiệm x_i của f(x) không vượt quá nghiệm dương duy nhất của đa thức g(x).

B. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Giả sử f(x) có n nghiệm khác không: $x_1, x_2, ..., x_n$. Ta có:

$$x_i < 0 \ \forall I = 1, 2, ..., n \text{ (Vì } a_i \in \{1; 2\}, \forall I = 1, 2, ..., n)$$

Theo định lí Vi-ét, ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n-1}}{a_n} = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geqslant n\sqrt[n]{\left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right|} = n\sqrt[n]{\frac{a_0}{a_0}} \qquad (1)$$

* Nếu $a_a = 1$ thì $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \leqslant 2$ và $n\sqrt[n]{\dfrac{a_0}{a_n}} = n\sqrt[n]{a_0} \geqslant n\ n$

nên $n \leq 2$ (do (1))

+ Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = 1 \\ a_{n-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + 1$

+ Nếu n = 1 thì $\left[\begin{array}{l} f(x) = x + 1 \\ f(x) = x + 2 \end{array}\right.$

* Nếu $a_n = 2$ thì $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \leqslant 1$ và $n\sqrt[n]{\dfrac{a_0}{a_n}} \geqslant n\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}} > \dfrac{n}{2}$

nên từ (1) suy ra $\dfrac{n}{2} < 1 \Rightarrow n < 2 \Rightarrow n = 1$

Do đó $\left[\begin{array}{l} f(x) = 2x + 1 \\ f(x) = 2x + 2 \end{array}\right.$

Tóm lại ta có 5 đa thức thoả mãn điều kiện đề ra là:

$f(x) = x + 1$; $f(x) = x + 2$; $f(x) = 2x + 1$; $f(x) = 2x + 2$

$f(x) = x^2 + 2x + 1$

Bài 2.

Giả sử P(x) là đa thức thoả mãn hai điều kiện sau:

$$\begin{cases} P(x) - 30 = \sqrt{P(x^2 + 4) - 34} & (1) \\ P(2004) = 2034 & (2) \end{cases}$$

Thay x = 2004 vào (1), ta được:

$$P(2004^2 + 4) = [P(2004) - 30]^2 = 34 = (2004^2 + 4) + 30 \qquad (3)$$

Đặt $x_1 = 2004^2 + 4$, từ (3) ta có: $P(x_1) = x_1 + 30$

Đặt $x_2 = x_1^2 + 4$, khi đó từ (1) ta có:

$$\begin{aligned} P(x_1^2 + 4) &= [P(x_1) - 30]^2 + 34 \\ &= [(x_1 + 30) - 30]^2 + 34 \\ &= (x_1^2 + 4) + 30 \\ &\Rightarrow P(x_2) = x_2 + 30 \end{aligned}$$

....

$P(x_n) = x_n + 30$ vì $x_n = x_{n-1}^2 + 4$

....

Bằng quy nạp suy ra $x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$

Xét đa thức $Q(x) = P(x) - (x + 30)$

$$\Rightarrow Q(x_1) = Q(x_2) = ... = Q(x_n) = ... = 0$$

$\Rightarrow Q(x)$ có vô số nghiệm $x_1, x_2, ... x_n, ...$

Suy ra $Q(x) = 0 \Rightarrow P(x) = x + 30$.

Thử lại thấy $P(x) = x + 30$ thoả yêu cầu đề bài.

Vậy $P(x) = x + 30$ là đa thức cần tìm.

Bài 3.

Xét đa thức $g(x) = x + (-x)^{n+1}.\dfrac{1}{(n+1)!}.x(x-1)(x-2)...(x-n)$

Ta có: $g(-1) = 0$, $g(k) = k$; $\forall k = 1, 2, 3, ..., n$

Vậy $g(x)$ chia hết cho $x + 1$.

Đặt $h(x) = \dfrac{g(x)}{x+1)}$ thì $h(x)$ là đa thức bậc n và $h(k) = \dfrac{k}{k+1}$;

$\forall k = 1, 2, 3, ..., n$.

Do đó mọi đa thức $f(x)$ thoả mãn điều kiện bài toán phải có dạng:

$$f(x) = h(x) + a(x-1)(x-2)(x-3)\ ...\ (x-n)$$

suy ra $f(0) = h(0) + a(0-1)(0-2)(0-3)\ ...\ (0-n)$

$$f(0) = (-1)^n.a.n! \qquad (1)$$

$$f(n+1) = h(n+1) + a.n! = \frac{g(n+1)}{n+2} + a.n! \qquad (2)$$

từ (1) và (2) ta có $f(n+1) = \dfrac{(n+1)+(-1)^{n+1}}{n+2} + \dfrac{f(0)}{(-1)^n}$

mà $f(0) = 0$ nên $f(n+1) = \dfrac{(n+1)+(-1)^{n+1}}{n+2}$.

Vậy $f(2004) = f(2003+1) = \dfrac{2003+1+(-1)^{2003+1}}{2003+2}$

$$f(2004) = \frac{2005}{2005} = 1.$$

Bài 4.

Giả sử a, b, c, d là các nghiệm của đa thức $P(x) = x^4 + x^3 - 1$.

Ta có: $a + b + c + d = -1$ và $abcd = -1$ (định lí Vi-ét).

Ta cần chứng minh: $Q(ab) = 0$.

Ta có: $Q(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1 = x^3\left(x^3 + x + 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)$

$$\Rightarrow Q(ab) = (ab)^2\left[(ab)^3 = ab + 1 - \frac{1}{ab} - \frac{1}{(ab)^3}\right]$$

$$= (ab)^3\left[(ab)^3 + ab + 1 + cd + (cd)^3\right]$$

Ta lại có:

+ $P(a) = 0 \Rightarrow a^3 = \dfrac{1}{a+1}$; tương tự ta có:

$$b^3 = \frac{1}{b+1},\ c^3 = \frac{1}{c+1},\ d^3 = \frac{1}{d+1}$$

nên $(ab)^3 = -(1+c)(1+d)$ và $(cd)^3 = -(1+a)(1+b)$

+ Do đó

$$Q(ab) = -(1 = c)(1+d)[-(1+c)(1+d) + ab + 1 + cd - (1+a)(1+b)]$$
$$= -(1+c)(1+d)(-1 - c - d - cd + ab + 1 + cd - 1 - a - b - ab)$$
$$= -(1+c)(1+d)[-1 - (a+b+c+d)] = 0$$ (điều phải chứng minh).

Bài 5.

Ta chứng minh nếu $f(k) = a_k$ với $\forall k = n+2, n+3, ..., 2n+2$ thì

$f(2n+3) = a_{2n+3} - 1$ (*)

+ Với $n = 1$ thì $f(x) = ax + b$

Do $f(3) = a_3 = 2$ nên $3a + b = 2$,

$f(4) = a_4 = 3$ nên $4a + b = 3$

Suy ra: $a = 1$ và $b = -1$, vậy $f(x) = x - 1$

Do đó: $f(5) = 4 = a_5 - 1$, vậy (*) đúng.

+ Giả sử (*) đúng với $n - 1$.

Xét đa thức $g(x) = f(x+2) - f(x+1)$, thì bậc của $g(x)$ không vượt quá $n - 1$.

Ta có: $g(k) = f(k+2) - f(k+1)$

$= a_{k+2} - a_{k+1}$

$= a_k$ với $\forall k = n+1, ..., 2n$.

Do đó theo giả thiết quy nạp thì:

$g(2n+1) = a_{2n+1} - 1 = f(2n+3) - f(2n+2)$

Nên $f(2n+3) = a_{2n+1} - 1 + f(2n+2)$

$= a_{2n+1} + a_{2n+2} - 1$

$= a_{2n+3} - 1$

Vậy (*) được chứng minh:

+ Từ kết quả trên ta có $f(2003) = a_{2003} - 1$.

Bài 6.

Do $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty \Rightarrow \deg P > \deg Q$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{x.Q(x)} = \begin{cases} +\infty \\ a,\ a \neq 0,\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Nhưng $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{x.Q(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{x}}{x}$

Lấy $\forall k \in \mathbb{N}^*$, cố định k

$\forall x \in \mathbb{N}^*, x > k$

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}(x - k + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{x}}{x} \leqslant \frac{1}{k} + \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}(1-k)}{x}$$

$$\Rightarrow 0 < \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{x}}{x} \leqslant \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{k}) \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}(1-k)}{x} \right) = \frac{1}{k}$$

Cho $k \to \infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{x}}{x} = 0$ vô lí.

Vậy không tồn tại P, Q là hai đa thức có hệ số thực sao cho

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{N}^*$$

Bài 7.

Xét đa thức $Q(x) = P(-1 - x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_a$

Khi đó ta có: $a_n = Q(0) = P(-10 < 0$

$$a_{n-1} = Q'(0) = -P'(-1) \leq 0$$

$$a_{n-2} = \frac{Q''(0)}{2!} = \frac{(-1)^2 p''(-1)}{2!} \leqslant 0$$

....

$$a_0 = \frac{Q^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n P^{(n)}9 - 1)}{n!} \leqslant 0$$

$\Rightarrow Q(x) < 0, \forall x \geq 0$

$\Rightarrow P(x)$ không có nghiệm $x \in (-\infty; -1]$.

Tương tự, xét đa thức

$R(x) = P(1 + x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$

Ta cũng có $b_n > 0$

$b_{n-1} \geq 0$

....

$b_0 \geq 0$

$\Rightarrow R(x) > 0, \forall x \geq 0$

$\Rightarrow P(x)$ không có nghiệm $x \in [1; +\infty)$

Vậy tất cả các nghiệm của đa thức P(x) (nếu có) đều thuộc khoảng (–1; 1).

Bài 8.

Ta có f(x) xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và:

$$f(-4).f(-3) < 0$$

$$f(-3).f(-1) < 0$$

$$f(-1).f(1) < 0$$

$$f(1).f(2) < 0$$

Vậy f(x) có 4 nghiệm đặt là x_i, $I = \overline{1,4}$.

Tính: $S = \sum_{i=1}^{4} \frac{2x_1^2 + 1}{12x_i - 4x_i^2}$

$$= \sum_{i=1}^{4} \left[-\frac{7}{24}\left(\frac{1}{x_i - \sqrt{3}} + \frac{1}{x_i + \sqrt{3}} \right) + \frac{1}{12x_i} \right]$$

$$= -\frac{7}{24}\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i - \sqrt{3}} - \frac{7}{24}\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i + \sqrt{3}} + \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{12x_i}$$

Ta chứng minh được:

$$\forall n \neq x_i \ \sum \frac{1}{x_i - n} = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

Vậy $S = \frac{7}{24}\frac{f'(\sqrt{3})}{f(\sqrt{3})} + \frac{7}{24}\frac{f'(-\sqrt{3})}{f(-\sqrt{3})} - \frac{1}{12}\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{9}{2}$

Bài 9.

Giả sử tồn tại P(x) và Q(x) thoả mãn $\frac{P(x)}{Q(x)} = \sqrt{x^2 + 2002}$ (1)

$\Rightarrow P^2(x) = Q^2(x)(x^2 + 2002) \Rightarrow \deg(P(x)) = \deg(Q(x)) + 1.$

Mặt khác từ (1) suy ra $\frac{P(x)}{Q(x)}$ xác định $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow Q(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow Q(x)$ có bậc là số tự nhiên chẵn.

$\Rightarrow P(x)$ có bậc là số tự nhiên lẻ $\Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}: P(x_0) = 0$

$\Rightarrow$ vô lí vì $\sqrt{x^2 + 2002} \geqslant \sqrt{2002} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy không tồn tại các đa thức P(x) và Q(x) thoả mãn hệ thức bài toán nêu ra.

Bài 10.

Ta có: $xf(x - 1) = (x - 3).f(x)$ (1)

Trong (1) cho $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ (2)

Trong (1) cho $x = 1 \Rightarrow f(1) = 0$ (3)

Trong (1) cho $x = 2 \Rightarrow f(2) = 0$ (4)

Từ (2), (3), (4), suy ra f(x) chia hết cho x, x – 1, x – 2.

Nên: $f(x) = x(x - 1)(x - 2).Q(x)$

Thay vào (1)

$$x.(x - 1)(x - 2)(x - 3).Q(x - 1) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3).Q9x - 1)$$

$\Rightarrow Q(x) = Q(x - 1)$

$\Rightarrow$ Q(x) là hàm số tuần hoàn, nên Q(x) = C (C: hằng số).

Vậy $f(x) = Cx(x - 1)(x - 2)$ với C là hằng số tuỳ ý.

Bài 11.

Giả sử tồn tại hai đa thức P(x), Q(x) khác hằng số, sao cho

$$\frac{P(n)}{Q(N)} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{Z}^{+}.$$

Bổ đề 1: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$

Bổ đề 2: $\left(\dfrac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n}\right) = 0$

Áp dụng bổ đề 1, ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(n)}{Q(n)} = +\infty$, suy ra degP > degQ (1)

Áp dụng bổ đề 2, ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{P(n)}{nQ(n)} = 0$, suy ra degP ≤ degQ (2)

(1) và (2) mâu thuẫn, vậy không tồn tại hai đa thức P(x), Q(x) có tính chất như đề bài.

Bài 12.

Giả sử đa thức P(x) thoả mãn điều kiện bài toán.

Từ giả thiết ta thấy x = 2002 là nghiệm bội bậc lớn hơn hoặc bằng k của P(x).

Đặt $P(x0 = (x - 2002)^{k}.Q(x)$

Thay vào ta được:

$$(x - 2001)^{k}.(x - 2002)^{k}Q(x) = (x - 2002)^{k}.(x - 2001)^{k}.Q(x + 1)$$

Suy ra $Q(x) = Q(x + 1)$

Vì vậy: Q(x) = a, với a là hằng số.

Do đó $P(x) = a(x - 2002)^{k}$.

Thử lại ta thấy đa thức $P(x) = a(x - 2002)^{k}$ thoả mãn yêu cầu đề bài.

Bài 13.

Xét $f(x) - \frac{1}{x} = 0$. Vì $f(n) = \frac{1}{n}$, $\forall n = 1, 2, ..., 2001$, nên $f(x) - \frac{1}{x} = 0$ có các nghiệm $1, 2, 3, ..., 2001$.

Nhưng $f(x) - \frac{1}{x}$ không phải là một đa thức.

Xét $g(x) = x.f(x) - 1$.

Do $f(x)$ có bậc 2000 nên $g(x)$ có bậc 2001 và nghiệm của nó là $1, 2, 3, ..., 2001$ nên $g(x)$ có dạng $g(x) = a(x-1)(x-2) ... (x-2001)$ (2)

Từ (1) ta có $g(0) = -1$

do đó từ (2) ta có $-1 = g(0) = a(-1)(-2) ... (-2001) = -a.2001!$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2001!}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{(x-1)(x-2)...(x-2001)}{2001!}$$

Suy ra:

$$2002.f(2002) - 1 = g(2002) = \frac{(2002-1)(2002-2)...(2002-2001)}{2001!} = 1$$

$$\Rightarrow 2002.f(2002) = 2 \Rightarrow f(2002) = \frac{1}{1001}.$$

Bài 14.

Đặt $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n}$

Ta có $f'(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}$.

a) Nếu n chẵn, ta có: $f'(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$

$$f'(x) < 0 \forall x \in (-\infty; -1)$$

$$f'(x) > 0 \forall x \in)-1; +\infty)$$

Do đó: $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

mà $f(-1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ... + \frac{1}{n} > 0$

nên $f(x) > 0$, $\forall x$.

Vậy nếu n chẵn thì phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

b) Nếu n lẻ thì $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Vậy nếu n lẻ phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

Bài 15.

Ta có: $x = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} \Rightarrow x(1 + \sqrt[3]{2}) = 3 \Rightarrow x\sqrt[3]{2} = 3 - x$

$\Rightarrow 2x^3 = (3 - x)^3 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = 0$

Vậy $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là nghiệm của đa thức bậc ba

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 9$$

Nếu f(x) có nghiệm hữu tỉ thì f(x) có nghiệm nguyên là ước của 9. Các số ±1, ±3, ±9 không là nghiệm của f(x) nên $1 - \sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{4}$ là số vô tỉ,

do đó $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ không là nghiệm của đa thức bậc nhất.

Giả sử $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là nghiệm của đa thức bậc hai g(x) với hệ số nguyên. Chia f(x) cho g(x) ta được

$f(x) = g(x)\, q(x) = r(x)$ với $\deg r < 2$ mà $r(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = 0$, nên $r(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = g(x)\, q(x)$, trong đó q(x) có bậc 1 có nghiệm hữu tỉ suy ra f(x) có nghiệm hữu tỉ (vô lí). Vậy đa thức bậc ba $d(x) = x^2 - 3x^2 + 9x - 9$ là đa thức bậc nhỏ nhất có hệ số nguyên nhận $1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ làm nghiệm.

Bài 16.

Theo đề bài ta có phương trình $f(x) - 1999 = 0$ có ít nhất 4 nghiệm nguyên.

Suy ra ta có: $f(x) - 1999 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).g(x)$

với $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ và g(x) là một đa thức nguyên. Giả sử tồn tại số nguyên x_0 sao cho $d(x_0) = 2030$ thì: $31 = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4).g(x_0)$, với $x_0 - x_1 > x_0 - x_2 > x_0 - x_3 > x_0 - x_4$ và các số này đều là số nguyên.

Vì 31 là số nguyên tố nên:

$$31 = 31.1 = (-1).1(-31) = (-1).(-31) = 31.(-1).(1-)$$

Do đó 31 không thể phân tích thành tích của 4 số nguyên khác nhau. Điều này chứng tỏ phương trình $f(x) = 2030$ không thể có nghiệm nguyên.

Bài 17.

Theo định lí Vi-ét ta có: $(A)\begin{cases} abc = -c & (1) \\ a + b + c = -a & (2) \\ ab+bc+ca=b & (3) \end{cases}$

- Nếu $c = 0$ thì giải (A), ta được:
  + $a = b = c = 0$: $P(x) = x^3$
  + $a = 1, b = -2$: $P(x) = x(x^2 + x - 2)$
- Nếu $c \neq 0$ thì $b \neq 0$, hệ (A) tương đương với:

$$(B)\begin{cases} a = \dfrac{1}{b} & (4) \\ c = \dfrac{2}{b} - b & (5) \\ b^4 + b^3 - 2b^2 + 2 = 0 & (6) \end{cases}$$

Vì (6) có thể được viết lại là $(b + 1)(b^3 - 2b + 2) = 0$ nên

+ $b = 1$ thì $a = 1$, $c = -1$ và $P(x) = (x + 1)^3$

+ $b \neq -1$, ta xét hàm số $y = f(b) = b^3 - 2b + 2 = 0$,

ta có đạo hàm $y' = 3b^2 - 2 = 0$ khi $b = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, lúc này, vì $f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) > 9$ và $f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) > 0$ nên f(b) chỉ có nghiệm duy nhất $< b_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}$ mà thôi, ta thử thấy $b_0 \neq 1$, $b_0 \neq -2$, do đó hệ (B) còn có nghiệm b_0, $a = \frac{1}{b_0}$, $c_0 = \frac{2}{b_0} - b_0$, với $b_0 < -\sqrt{\frac{2}{3}}$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(b) = b^3 - 2b + 2$

Tóm lại, có 4 đa thức thoả mãn điều kiện đề bài.

Bài 18.

Giả sử P(x) có n nghiệm là $x_1, x_2, \ldots, x_3$. Áp dụng định lí Vi-ét ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -a_{n-1} = \pm 1; \quad \sum_{i=j}^{n} x_i x_j = a_{n-2} = \pm 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum x_i\right)^2 - 2\sum_{i=j} x_i x_j = 3 \qquad (1)$$

Dễ thấy $x_i \neq 0, \forall i$, và $\frac{1}{x_i}$ là nghiệm thực của đa thức

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$$

Một cách tương tự ta cũng có:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \pm 1; \quad \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i x_j} = \pm 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = \left(\sum \frac{1}{x_i}\right)^2 - 2\sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i x_j} = 3 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), kết hợp với bất đẳng thức Cô–si, ta được:

$$9 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} \geqslant n^2 \Rightarrow n \leq 3$$

Bài 19.

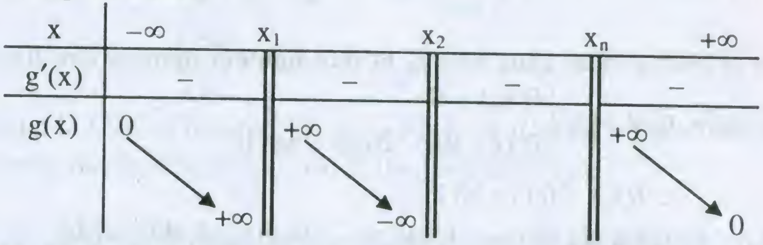
Theo giả thiết ta có $f(x) = a\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ và các x_i được sắp xếp theo thứ tự tăng dần, từ đó: $f'(x) = a\sum_{j=1}^{n}\prod_{i \neq j}(x - x_i)$

Do đó, ta suy ra:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} > 1999 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i} > 1999$$

Đặt $g(x) = \sum\frac{1}{x-x_i}$ thì $g'(x) = -\sum\frac{1}{(x-x_i)^2} < 0$

ta có bảng biến thiên



Do đó phương trình $g(x) = 0$ có n nghiệm t_i thoả mãn điều kiện: $x_i < t_i < x_{i+1}$ và $x_n < t_n$.

Tập nghiệm cần tìm là $S = \bigcup_{i=1}^{n}(t_i - x_i)$ có tổng độ dài là:

$$D = \sum_{i=1}^{n}(t_i - x_i) = \sum t_i - \sum x_i$$

Mặt khác, ta có:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = 1999 \Leftrightarrow f(x) = 1999f(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n}\prod_{i\neq j}(x-x_i) = a\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$$

Đồng nhất hệ số ta có:

$$\sum t_i = -\frac{-a-1999\sum x_i}{1999} = \frac{n}{1999} + \sum x_i$$

Vậy $D = \frac{1}{1999}$.

Bài 20.

Giả sử degf(x) là chẵn, trong b) ta thay y bởi −x, ta được:

$$f(x), f(-x) \le [f(0)]^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cho $x \to +\infty$ thì $f(x).f(-x) \to +\infty$, điều này mâu thuẫn với (1).

Vậy degf(x) là lẻ. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thực. Ta chứng minh nghiệm thực này là duy nhất.

Không mất tính tổng quát, ta có thể coi hệ số của bậc cao nhất của f(x) là 1.

Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm phân biệt và lớn nhất của phương trình $f(x) = 0$ $(x_1 < x_2)$ thì $\forall x > x_2$ suy ra $f(x) > 0$ và có $x_0 < x_1$ để $f(x_0) > 0$.

Đặt $x_3 = 2x_2 - x_0$, do $x_2 > x_0$ nên $x_3 > x_0 \Rightarrow f(x_3) > 0$.

Ta có: $0 < f(x_3).f(x_0) \le f^2\left[\frac{1}{2}(x_3 + x_0)\right] = f^2(x_2) = 0$

Vô lí! Vậy phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm thực.

Bài 21.

Trước hết ta chứng minh rằng nếu x_0 là một nghiệm nguyên của $f(x)$ thì x_0 phải là số chẵn. Quả vậy $\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f(1) = 2a - 1999 = \text{số lẻ} \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x_0) - f(1) = \text{số lẻ}.$$

Nhưng $f(x_0) - f(1)$ chia hết cho $x_0 - 1$, vậy $x_0 - 1$ là số lẻ, do đó x_0 chẵn.

a) Giả sử $f(x)$ có hai nghiệm nguyên x_1, x_2 với $x_1 \neq x_2$ thì

$$0 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = (x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3) - 2001(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

$$+ (2000 + a)(x_1 + x_2) - 1999.$$

Đẳng thức này không thể xảy ra vì x_1, x_2 chẵn.

b) Giả sử $f(x)$ có nghiệm kép x_0 (chẵn), khi đó x_0 cũng là nghiệm của $f(x)$

$$f'(x_0) = 4x_0^3 - 6003x_0^2 + 2(2000 + a)x_0 - 1999 = 0$$

Đẳng thức này cũng không thể xảy ra vì x_0 chẵn.

Bài 22.

Đặt $\varphi(x) = b_0x^n\left[1 - \frac{b_1}{b_0x} - \frac{b_2}{b_0x^2} - \ldots - \frac{b_0}{b_0x^n}\right]$

– Chứng minh được $|f(x)| \ge \varphi(|x|)$

– Chứng minh được $\varphi(x)$ có một nghiệm dương duy nhất $x_0 = \alpha > 0$ và khi $x > \alpha \Rightarrow \varphi(x) > 0$

Vậy $|f(x)| \ge \varphi(|x|) > 0$ khi $x > \alpha$ nên môđun của nghiệm của $f(x)$ không thể vượt quá α được.

§6. DÃY SỐ

A. ĐỀ BÀI

Bài 1.

Cho dãy số (u_n) xác định như sau:

$$u_1 = \frac{3}{\sqrt{6}};\ u_{n+1} = 24u_n^3 - 12\sqrt{6}u_n^2 + 15u_6 - \sqrt{3},\ n = 1, 2, \ldots$$

Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của dãy trên.

Bài 2.

Tính giới hạn: $\lim(2004.\sqrt[n]{4} - 2003)^n$.

Bài 3.

Cho hàm số f: $[0; 1] \rightarrow [0; 1]$, $f(x) > 0\ \forall x \in [0; 1]$

a) Chứng minh: Tồn tại dãy (a_i), $I = \overline{1; 2004}$ thoả mãn.

$$\begin{cases} 0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{2004} \leq 1 \\ \prod_{i=1}^{2004} f'(a_i) \geq 1 \end{cases}$$

b) Cho g là hàm số liên tục: $[0; 1] \rightarrow [0; 1]$ và $f([g(x)] = g[f(x), \forall x \in (0; 1]$.

Chứng minh: Tồn tại $x_0 \in [0; 1$: $f(x_0) = g(x_0) = x_0$.

Bài 4.

Cho dãy số (a_n) gồm những số tự nhiên thoả mãn các điều kiện sau:

a) $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$,

b) $a_{2k} = a_k + k$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Nếu a_n là một số nguyên tố thì n là một số nguyên tố.

Hãy xác định a_{2004}.

Bài 5.

Cho dãy số (u_n) có: $\begin{cases} u_1 = \sqrt{e^{\sqrt{3}}} \\ u_2 = \sqrt{e} \\ u_{n+1}.u_{n-1} = u_n^{\sqrt{3}},\ (\forall n \geq 2) \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, ta có $\frac{1}{e} \leq u_n \leq e$.

b) Lập dãy số (v_n) biết $v_n = \sqrt[n]{u_1.u_2\ldots u_n}$.

Tìm giới hạn của dãy (v_n) khi $n \rightarrow \infty$.

Bài 6.

Cho dãy (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3},\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = \frac{1}{4}u_{n+1}^2 + \frac{3}{4}\sqrt{u_n},\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Tính $\lim u_n$.

Bài 7.

Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = a \text{ (a là hằng số)} \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(1 + x_n^2) - 2004,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy (x_n) hội tụ.

Bài 8.

Xét dãy số (a_n): $a_1 = 4$; $a_2 = 22$; $a_n = 6.a_{n-1} - a_{n-2}$ $\forall n \geq 2$. Chứng minh rằng tồn tại các dãy số nguyên dương (x_n), (y_n).

$$a_n = \frac{y_n^2 + 7}{x_n - y_n} \quad \forall n \geq 1$$

Bài 9.

Cho hai số dương a và b không đổi thoả mãn $a < b$ và cho dãy số (a_n):

$$a_1 = \frac{a + b}{2};\ b_1 = \sqrt{a_1 b},$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b}{2};\ b_2 = \sqrt{a_1 b},$$

....

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2};\ b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}},$$

....

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ và $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

Bài 10.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_{n+1} = \ln\sqrt[n]{1 + u_n^2} - 2004$, $\forall n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$. Chứng minh (u_n) hội tụ.

Bài 11.

Cho dãy số (a_n) xác định như sau $a_0 = 2004$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{1 + a_n}$ $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$

Tính $[a_{1000}]$ (phần nguyên của số hạng a_{1000}).

Bài 12.

Cho các dãy số (a_n) và (b_n), $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thoả mãn các công thức sau:

$$a_n = 1 + \frac{n(1 + n)}{1 + n^2} + ... + \frac{n^n(1 + n^n)}{1 + n^{2n}},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$b_n = \left(\frac{a_n}{n + 1}\right)^{\frac{1}{a(n+1)}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Tìm $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

Bài 13.

Cho dãy số (U_n) $(n \in \mathbb{N}^*)$ thoả mãn các điều kiện.

a) $U_1, U_2 \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{U_1^2 + U_2^2 + U}{U_1 U_2} \in \mathbb{Z}$, $U \in \mathbb{Z}$.

b) $U_{n+2}U_n = U^2_{n+1} + U$

Chứng minh rằng dãy (U_n) là dãy các số nguyên.

Bài 14.

Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi công thức:

$$\begin{cases} u_1 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \ln(1+u_a^2)^{\frac{1}{2}} - 2004; \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn.

Bài 15.

Cho dãy (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}+\sqrt{2}}, \ (n \geqslant 1) \end{cases}$

Xác định công thức số hạng u_n theo n.

Bài 16.

Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{2004}$ các số nguyên dương thoả mãn:

$$\sum_{k=1}^{2004} \frac{1}{\sqrt{u_k}} = 2\sqrt{2004}$$

Chứng minh rằng dãy số này có ít nhất hai số hạng bằng nhau.

Bài 17.

Cho dãy số vô hạn (u_n) xác định như sau:

$$u_n = 3(n^2+n)+7, \ n \in \mathbb{N}^*$$

Chứng minh rằng không có phần tử nào của dãy số là lập phương của một số nguyên.

Bài 18.

Từ dãy (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2003.u_n}{2004}, \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Ta thành lập dãy (S_n) với $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{u_{i+1}-1}$

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Bài 19.

Ba dãy số: $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ thoả mãn x_0, y_0, z_0 đều dương

và $x_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{z_n}$, $y_{n+1} = z_n + \dfrac{1}{x_n}$, $z_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{y_n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng: tồn tại các hằng số dương s và t sao cho: $s\sqrt{n} \leqslant x_n \leqslant t\sqrt{n}$ với mọi n = 1, 2,...

Bài 20.

Cho hai dãy số (U_n) và (V_n) xác định bởi:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!};\ V_n = U_n + \frac{1}{n!}$$

Chứng minh (U_n) và (V_n) có giới hạn chung là một số vô tỉ.

Bài 21.

Tính giới hạn sau:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\cos\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2+n+1}\right)+\sin\left(\pi n\sqrt[3]{n^3+3n^2+n+1}\right)\right] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Bài 22.

Cho dãy số $|u_n|$ được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \alpha \text{ với } \alpha > 1 \\ 2003u_{n+1} = u_n^2 + 2002u_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$

Hãy tìm: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{u_i}{u_{i+1} - 1}$

Bài 23.

Cho dãy số u_n thoả mãn $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Đặt $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$. Biết rằng $u_2 - u_1 = S_{2003}^2 - S_{2003} + 1$

Tính S_{2003}.

Bài 24.

Cho dãy số (u_n) định bởi: $0 < u_a < 1$ và $u_{a+1}(1 - u_n) > \dfrac{1}{4}$, với $n \geq 1$.

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Bài 25.

Cho dãy số $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ xác định như sau: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \sin a_{n-1},\ n \geqslant 0 \end{cases}$

và xét dãy số $b_n = na_n^2$. Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} b_n$

Bài 26.

Cho dãy số $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ xác định bởi: $\begin{cases} a_1 = a_2 = 1;\ a_3 = 2 \\ a_{n+3} = \dfrac{a_{n+1}.a_{n+2} + p}{a_n} \quad \text{với } p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Định p để mọi số hạng của dãy (a_n) đều là số nguyên.

Bài 27

Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2003} + u_n \end{cases}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + \dfrac{u_3}{u_4} + \ldots + \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$

Bài 28.

Giả sử có dãy số thực $\{x_n\}$ mà với đa thức bậc hai $p(x)$ tuỳ ý có các hệ số nguyên không âm thoả mãn hệ thức

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + x_{p(n)}) = 0$

Liệu từ đó có thể suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ được hay không?

Bài 29.

Cho dãy số (U_n) biết $\begin{cases} u_0 = a \ (a > 0) \\ u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n-1} + \dfrac{2003^2}{u_{n-1}}\right) n \in \mathbb{Z}^+. \end{cases}$

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$

Bài 30.

Cho cấp số nhân $u_1, u_2, \ldots, u_n$, $u_1 > 0$, công bội $q > 0$ và $q \neq 1$, biết:

$$\begin{cases} u_1 = u_2 + \ldots + u_n = a \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \ldots + \dfrac{1}{u_n} = b \end{cases}$$

Tính $P = u_1.u_2 \ldots u_n$ theo a và b

Bài 31.

Cho dãy số (U_n) xác định bởi: $\begin{cases} U_0 = 2003 \\ 2^n.U_{n+1} = |2^n.U_n - 1| \end{cases}$

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

Bài 32

Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$

Xét dãy số (u_n) sao cho $u_n = \dfrac{f(1).f(3).f(5)\ldots f(2n-1)}{f(2).f(4).f(6)\ldots f(2n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{u_n}$.

B. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Đặt $V_n = u_n\sqrt{6} - 1 \Rightarrow V_1 = 2.$

Từ công thức truy hồi xác định dãy, ta có:

$$\frac{V_{n+1}+1}{\sqrt{6}} = 24\left(\frac{V_n+1}{\sqrt{6}}\right)^2 - 12\sqrt{6}\left(\frac{V_{n+1}}{\sqrt{6}}\right)^2 + 15\frac{V_n+1}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{n+1}+1}{\sqrt{6}} = \frac{4(V_n^3+3V_n^2+3V_n+1)}{\sqrt{6}} - \frac{12(V_n^2+2V_n+1)}{\sqrt{6}} + \frac{15(V_n+1)}{\sqrt{6}} - \frac{6}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} + 1 = 4V_n^3 + 3V_n + 1$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = 4V_n^3 + 3V_n.$$

Như vậy đối với dãy (V_n), ta có: $\begin{cases} V_1 = 2 & (1) \\ V_{n+1} = 4V_n^3 + 3V_n \quad (n = 1, 2, \ldots) & (2) \end{cases}$

Xét phương trình $x^2 - 4x - 1 = 0$, phương trình này có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn hệ thức:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = -1 \end{cases}$$

Bằng quy nạp ta sẽ chứng minh rằng $\forall n = 1, 2, \ldots$ có:

$$V_n = \frac{1}{2}\left(x_1^{3^{n-1}} + x_2^{3^{n-1}}\right) \qquad (3)$$

Thật vậy, với n = 1 ta có: $V_1 = 2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}\left(x_1^{3^0} + x_2^{3^0}\right)$

Vậy (3) đúng khi n = 1.

Giả sử (3) đúng khi n = k, ta có với n = k + 1, thì theo (2) có:

$$V_{k+1} = 4C_k^3 + 3V_k$$

Theo giả thiết quy nạp, thì:

$$V_{k+1} = 4.\frac{1}{8}\left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right)^3 + 3.\frac{1}{2}\left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right)^3$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(x_1^{3^k} + x_2^{3^k}\right) + 3(x_1x_2)^{3^{k-1}}\left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right)\right] + \frac{3}{2}\left(x_1^{3^{k-1}} + x_2^{3^{k-1}}\right) \qquad (4)$$

Do $x_1x_2 = -1$ và do 3^{k-1} là số nguyên lẻ $\Rightarrow (x_1x_2)^{3^{k-1}} = -1$, vậy từ (4) suy ra

$V_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_1^{3^k} + x_2^{3^k}\right).$

$\Rightarrow$ (3) cũng đúng khi $n = k + 1$. Theo nguyên lí quy nạp thì (3) đúng $\forall n$.

Vậy số hạng tổng của dãy số đã cho có dạng: $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(V_n + 1)$

hay $$u_n = \frac{1}{2\sqrt{6}}\left[(2+\sqrt{5})^{3^{n-1}} + (2-\sqrt{5})^{3^{n-1}} + 2\right],\ n = 1, 2, \ldots$$

Bài 2.

* Xét bài toán tổng quát: Tìm $\lim((k+1).\sqrt[n]{a} - k)^n$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $a > 0$

Cách 1: * Áp dụng bất đẳng thức Cô–si:

$$\sqrt[n]{a^{k+1}} + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{k} \geqslant (k+1)\sqrt[k+1]{\sqrt[n]{a^{k+1}}} = (k+1)\sqrt[n]{a}$$

$$\Rightarrow \left[(k+1)\sqrt[n]{a} - k\right]^n \leqslant a^{k+1} \qquad (1)$$

* Áp dụng bất đẳng thức Béc–nu–li:

$$\left[(k+1)\sqrt[n]{a} - k\right]^n =$$

$$= \left[\sqrt[n]{a^{k+1}}\left(1 + \frac{k+1}{\sqrt[n]{a^k}} - \frac{k}{\sqrt[n]{a^{k+1}}} - 1\right)\right]^n \geqslant a^{k+1}.\left[1 - n\left(\frac{k+1}{\sqrt[n]{a^k}} + \frac{k}{\sqrt[n]{a^{k+1}}}\right)\right]$$

$$= a^{k+1}.\left[1 - n\left(\frac{\sqrt[n]{a^{k+1}} - (k+1)\sqrt[n]{a^k} + k}{\sqrt[n]{a^{k+1}}}\right)\right]$$

$$= a^{k+1}.\left[1 - \frac{n(\sqrt[n]{a} - 1)^2(\sqrt[n]{a^{k+1}} + 2\sqrt[n]{a^{k+2}} + \ldots + (k-1)\sqrt[n]{a} + k)}{\sqrt[n]{a^{k+1}}}\right] \qquad (2)$$

Ta lại có: $a = (1 + \sqrt[n]{a} - 1)^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) > n\sqrt[n]{a} - 1)$

$\Rightarrow 0 < n(\sqrt[n]{a} - 1)^2 < a(\sqrt[n]{a} - 1)$

$\lim \sqrt[n]{a} = 1 \Rightarrow \lim n(\sqrt[n]{a} - 1)^2 = 0 \qquad (3)$

* Vậy từ (1), (2) và định lí "giới hạn kẹp" ta suy ra:

$$\lim[(k+1)\sqrt[n]{a} - k]^n = a^{k+1}$$

Bài 3.

a) * $f : [0; 1] \to [0; 1]$, $f'(x) > 0\ \forall x \in [0; 1]$ nên f tăng và liên tục trong $[0; 1]$; $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

* f liên tục: $[0; 1] \to [0; 1]$ nên $\exists\ (x_i)$ sao cho

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2004} = 1 \text{ và } f(x_i) = \frac{i}{2004},\ \forall I = \overline{0;2004}.$$

* Áp dụng định lí La-gơ-răng trong các đoạn $[x_{i-1}; x_i]$:

$$\exists a_i \in (x_{i-1}x_i) : f'(a_i) = \frac{f(x_1) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{1}{2004(x_i - x_{i-1})}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f'(a_i)} = 2004(x_i - x_{i-1})$$

Suy ra $\sum_{i=1}^{2004} \frac{1}{f'(a_i)} = 2004(x_{2004} - x_0) = 2004$

* Áp dụng bất đẳng thức Cô-si:

$$\sum_{i=1}^{2004} \frac{1}{f'(a_i)} \geqslant \frac{2004}{\sqrt[2004]{\prod_{i=1}^{2004} f'(a_i)}}$$

$\Rightarrow \prod_{i=1}^{2004} f'(a_i) \geqslant 1$. Đẳng thức xảy ra khi: $f'(a_i) = 1$, $\forall I = \overline{1;2004}$.

b) * Xét $F(x) = g(x) - x$, $F(x)$ liên tục trong $[0; 1]$ và $F(0).F(1) = [g(0) - 0].[g(1) \le 0$.

Suy ra $\exists x_0 \in [0; 1]$; $F(x_0) = 0 \Leftrightarrow \exists x_0 \in [0; 1]$; $g(x_0) = x_0$.

* Nếu $f(x_0) = x_0$ thì có điều cần chứng minh.

* Nếu $f(x_0) \neq x_0$: Xây dựng dãy (a_n) như sau

$$\begin{cases} a_1 = x_0 \\ a_2 = f(x_0) \\ a_n = f(a_{n-1}), n \geqslant 2 \end{cases}$$

f tăng: $[0; 1] \to [0; 1]$ nên dãy (a_n) bị chặn và tăng nếu $f(x_0) > x_0$; giảm nếu $f(x_0) < x_0$.

Vậy (a_n) hội tụ. Đặt $x_1 = \lim a_n = \lim f(a_{n-1}) = f(\lim a_{n-1}) = f(x_1) \in [0; 1]$.

* Chứng minh: $g(a_n) = a_n$, $\forall n \geq 1$ bằng quy nạp.

$$g(a_1) = f(x_0) = x_0 = a_1.$$

Giả sử $g(a_{n-1}) = a_{n-1}$

$\Rightarrow g(a_n) = f[f(a_{n-1})] = f[g(a_{n-1})] = f(a_{n-1}) = a_n$. (điều phải chứng minh)

* Suy ra: $g(x_1) = g(\lim a_n) = \lim[g(a_n)] = \lim(a_n) = x_1$

* Vậy tồn tại $x_1 \in [0; 1]$ để $f(x_1) = f(x_1) = x_1$.

Bài 4.

Với mọi k = 1, 2, 3, ... ta có:

$$a_k < a_{k+1} < \ldots < a_{2k-1} < 2_{2k} = a_k + k$$

suy ra $a_{k+1} = a_k + 1$

$\Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)$ $\forall n \in N^*$ (dãy cấp số cộng có d = 1)

* Nếu $a_1 = 0$ thì $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$ mâu thuẫn điều kiện c) nên loại.

* Nếu $a_1 = 1$ thì $a_n = n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Dãy số này thoả mãn điều kiện của bài toán. Vậy $a_{2004} = 2004$.

* Nếu $a_1 \geq 2$.

Gọi p là số nguyên tố nhỏ nhất thoả mãn $p > (a_1 + 1)! = (a_1 + 1)$

Đắt $n = p + 1 = a_1$ (*), ta có $n > (a_1 + 1)! + 2$ (1)

$a_n = a_1 + (n - 1) = a + (p - a_1) = p$ (nguyên tố)

Suy ra n nguyên tố (do điều kiện c)) (2)

Mặt khác từ (*) suy ra $n \leq p = 1 - 2 = p - 1$ (3)

mà $(a_1 + 1)! + 2$; $(a_1 + 1)! = 3$; ...; $(a_1 + 1) + (a_1 + 1)$ là những hợp số nên từ (1) và (2) suy ra: $n \geq (a_1 + 1)! + (a + 2) > p$ (4)

(3) và (4) mâu thuẫn nhau, vì vậy $a_1 \geq 2$ loại.

Tóm lại $a_{2004} = 2004$.

Bài 5.

a) Ta chứng minh $u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Thật vậy, $u_1 > 0$, $u_2 > 0$.

Giả sử $u_n > 0 \ \forall n \geq k$. Ta có $u_{k+1} = \dfrac{u_k^{\sqrt{3}}}{u_{k-1}} > 0$

Vậy $u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

- Ta lại có $u_1 = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = e^{\cos\frac{\pi}{6}}$

Giả sử $u_n = e^{\cos\frac{n\pi}{6}} \ \forall n \leqslant k$

$$\text{Ta có } u_{n+1} = \frac{u_n^{\sqrt{3}}}{u_{n-1}} = \frac{e^{\sqrt{3}\cos\frac{n\pi}{6}}}{e^{\cos\frac{(n-1)\pi}{6}}} = e^{2\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{n\pi}{6}-\cos\frac{(n-1)\pi}{6}} = e^{\cos\frac{(n+1)\pi}{6}}$$

Vậy $u_n = e^{\cos\frac{n\pi}{6}} \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

- Ta lại có $-1 \leq \cos\dfrac{n\pi}{6} \leq i$ và hàm $y = c^x$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{e} \leqslant e^{\cos\frac{n\pi}{6}} \leqslant e.$$

b) Ta có $v_n = \sqrt[n]{u_1.u2...u_n} = e^{\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\cos\frac{2\pi}{6} + ... + \cos\cos\frac{n\pi}{6}\right)}$

$$= e^{\frac{1}{2n\sin\frac{\pi}{12}}\left(\sin\frac{(2n+1)\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{n\sin\frac{\pi}{12}}\cos\frac{(n+1)\pi}{12}\sin\frac{n\pi}{12}}$$

Mặt khác, ta có $\dfrac{-1}{n.\sin\dfrac{\pi}{12}} \leqslant \dfrac{\cos\dfrac{(n+1)\pi}{12}\sin\dfrac{n\pi}{12}}{n.\sin\dfrac{\pi}{12}} \leq \dfrac{1}{n.\sin\dfrac{\pi}{12}}$

Mà $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1}{n.\sin\dfrac{\pi}{12}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n.\sin\dfrac{\pi}{12}} = 0$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = e^0 = 1$.

Bài 6.

Xét dãy (v_n) với $v_0 = \dfrac{1}{3}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{4}v_n^2 + \dfrac{3}{4}\sqrt{v_n}$ (1)

Bằng quy nạp ta chứng minh được $0 < v_n < 1$.

Ta có v_{n+1} $f(v_n)$ với $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{3}{4}\sqrt{x}$ là hàm tăng trên $\mathbb{R}^+$.

Do đó nếu $v_n > v_{n-1}$ thì $v_{n-1} = f(v_n) > f(v_{n-1}) = v_n$.

Suy ra (v_n) là dãy tăng và bị chặn trên tồn tại $\lim u_n = a \in \mathbb{R}$ $(0 < a \leq 1)$.

Lấy giới hạn hai vế của (1):

$$a = \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4}\sqrt{a} \Leftrightarrow t(t-1)(t^2+t-3) = 0$$

(với $t = \sqrt{a}$, $0 < t \leq 1$) suy ra $t = 1$ và $\lim v_n = 1$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $0 < u_n < 1$.

Ta chứng minh $v_n \leq \min(u_{2n}, u_{2n+1})$ (2)

Với $n = 0$ thì 2 đúng.

Giả sử $v_n \leq u_{2n}$, $v_n \leq u_{2n+1}$ thì

$$u_{2n+2} = \frac{1}{4}u_{2n+1}^2 + \frac{3}{4}\sqrt{u_{2n}} \geqslant \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{3}{4}\sqrt{v_n} = v_{n+1}$$

$$u_{2n+3} = \frac{1}{4}u_{2n+2}^2 + \frac{3}{4}\sqrt{u_{2n+1}} \geqslant \frac{1}{4}v_{n+1}^2 + \frac{3}{4}\sqrt{v_n} \geqslant \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{3}{4}\sqrt{v_n} = v_{n+1}$$

Suy ra $v_{n+1} \leq \min(u_{2n+2}, u_{2n+3})$, nên (2) đúng $\forall n \in \mathbb{N}$.

Do đó $v_n \leq u_{2n} < 1$ và $v_n \leq u_{2n+1} < 1$.

Mà $\lim v_n = 1$ nên $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = 1$.

Vậy $\lim u_n = 1$.

Bài 7.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - 2004$, $x \in \mathbb{R}$ có

$$|f(x)| = \left|\frac{x}{1 + x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}$$

Xét hàm số $g(x) - x \Rightarrow g'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Nên g(x) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $g(0).g(-2004) < 0 \Rightarrow \exists! b \in \mathbb{R} : f(b) = 0$. Theo định lí La-gơ-răng

$$\exists c \in \mathbb{R} : |f(x_n) - f(b)| = |f'(c)|\,|x_n - b| \le \frac{1}{2}|x_n - b|$$

$$\Rightarrow |x_{n+1} - b| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - b| \leqslant \ldots \leqslant \frac{1}{2^n}|a - b|.$$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = b$.

Bài 8.

Đặt $x_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$; $y_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{2}$ với $x_1 = 3$; $y_1 = 1$.

Khi đó ta có hệ thức:

$$\begin{cases} x_n = 3x_{n-1} = 4y_{n-1} \\ y_n = 2x_{n-1} + 3y_{n-1} \end{cases}$$

Theo cách đặt ta có $a_n = x_n + y_n$. Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$x_a + y_n = \frac{y_n^2 + 7}{x_n - y_n} \Leftrightarrow x_n^2 = 2y_n^2 + 7 \ \forall n \ge 7$$

Ta chứng minh bằng quy nạp

Khi n = 0 mệnh đề đúng.

Giả sử $x_{n-1}^2 = 2y_{n-1}^2 + 7$. Khi đó ta có:

$$x_n^2 - 2y_n^2 - 7 = (3x_{n-1} + 4y_{y-1})^2 - 2(2x_{n-1} + 3y_{n-1})^2 - 7$$

$$= x_{n-1}^2 - 2y_{n-1}^2 - 7 = 0$$

Vậy công thức đúng với n. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 9.

- $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{a}{b} < 1$
- Đặt $\frac{a}{b} = \cos\alpha \ (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$

$$a_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{b\cos\alpha + b}{2} = b\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$b_1 = \sqrt{a_1 b} = b\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = b\cos\frac{\alpha}{2}.\cos^2\frac{\alpha}{2^2}$$

$$b_2 = \sqrt{a_2 b_1} = b\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2^2}$$

....

$$a_n = b\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2^2}.\cos\frac{\alpha^{n-1}}{2}.\cos^{22}\frac{\alpha}{2^n}$$

$$b_n = b\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos\frac{\alpha}{2^n}$$

- $b_n = \dfrac{b}{2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^n}}\sin\alpha = \dfrac{\dfrac{\alpha}{2^n}}{\sin\dfrac{\alpha}{2^n}}.\dfrac{b\sin\alpha}{\alpha}$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}$$

- $a_n = b_n.\dfrac{\cos\alpha}{2^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n.\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\cos\alpha}{2^n}\right) = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}$$

- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{b\sin\alpha}{\alpha}$

Bài 10.

Đặt $f(x) = \ln\sqrt[n]{1+x^2} - 2004 = \dfrac{1}{n}\ln(1+x^2) - 2004$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{b(1+x^2)} \Rightarrow |f'(x)| \le \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Đặt $g(x) = x - f(x) \Rightarrow g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{n(1+x^2)} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Mà $g(0) = 2004$ và $g(-2004) = -\dfrac{1}{n}\ln(1+2004^2) < 0$

$\Rightarrow g(x) = 0$ có nghiệm.

Từ (1) $\Rightarrow g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất là a hay $g(a) = 0$.

$\Rightarrow a - f(a) = 0.$

Do đính lí La-gơ-răng: $\exists c \in \mathbb{R} : |f'(c)| = \left|\dfrac{f(u_n) - f(a)}{u_n - a}\right|$

$$\Rightarrow |f(u_n) - f(a)| = |f'(c)||u_n - a| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - a|$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - a| \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1 - a|$$

Tóm lại: $0 \leq |u_n - a| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$, lại có:

$$\lim 0 = \lim\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a| = 0$$

nên $\lim |u_n - a| = 0$. Vậy (u_n) hội tụ.

Bài 11.

Từ giả thiết dễ thấy $a_n > 0, \forall n$.

Ta có $a_n - a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_n^2}{a_n + 1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1} > 0, \forall n$ (*)

nên (a_n) là dãy giảm.

$$a_{1000} = a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_{1000} - a_{999}) =$$

$$= 2004 - \frac{a_0}{a_0 + 1} - \frac{a_1}{a_1 + 1} - \ldots - \frac{a_{999}}{a_{999} + 1}$$

$$= 2004 - 1000 + \frac{1}{a_0 + 1} + \frac{1}{a_1 + 1} + \ldots + \frac{1}{a_{999} + 1}$$

$\Rightarrow a_{1000} > 1004$ (do $a_n > 0$) (1)

Từ (*) ta suy ra

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{a_n + 1} > a_n - 1 > a_{n-1} - 2 > \ldots > a_0 - (n + 1)$$

$\Rightarrow a_{999} > 2004 - 999 = 1005$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_0 + 1} + \frac{1}{a_1 + 1} + \ldots + \frac{1}{a_{999} + 1} < \frac{1000}{1005 + 1} < 1$$

$\Rightarrow a_{1000} < 1005$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $[a_{1000}] = 1004$.

Bài 12.

Ta có: $1 \leq \dfrac{n^k(1 + n^k)}{1 + n^{2k}} \leqslant 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $k = 1, \ldots, n$

$$\Rightarrow n + 1 \le a_n \le 2n + 1 < 2(n + 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \frac{a_n}{n+1} < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$\Rightarrow 1 \le b_n < 2^{\frac{1}{n(n+1)}} < 2^{\frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (do công thức b_n).

Mà $2^{\frac{1}{n}} = (2.\underbrace{1.1...1}_{(n-1)\text{ số}})^{\frac{1}{n}} < \frac{2+n-1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

$$\Rightarrow 1 \le b_n < 1 + \frac{1}{n}$$

Do: $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$

Bài 13.

Ta có: $U_{n+1}U_{n+3} + U^2_{n+1} = U^2_{n+2} + U + U^2_{n+1} = U^2_{n+2} = U_{n+2}U_n$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+3} + U_{n+1}}{U_{n+2}} = \frac{U_{n+2} + U_n}{U_{n+1}}$$

Đặt $V_n = \frac{U_{n+2} + U_n}{U_{n+1}}$

Suy ra $V_1 = V_2 = V_3 = ... = V$ ($V \in \mathbb{Z}$)

Do đó $\frac{U_{n+2} + U_n}{U_{n+1}} = V_n = V_1 = \frac{U_3 + U_1}{U_2} = \frac{\frac{U_2^2 + U}{U_1} + U_1}{U_2}$

$$= \frac{U_1^2 + U_2^2 + U}{U_1U_2} \in \mathbb{Z}$$

Suy ra $U_{n+2} = V.U_{n+1} - U_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Vì U_1, U_2, $V \in \mathbb{Z}$ nên $U_3 = V.U_2$, $U_4 = V.U_3 - U_2$, ... đều thuộc $\mathbb{Z}$.

Vậy $U_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 14.

Ta có: $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)^{\frac{1}{2}} - 2004 = \frac{1}{2}\ln(1 + u_n^2) - 2004$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) - 2004$

Hàm f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = \frac{x}{1 + x^2}$

nên $|f'(x)| = \left|\dfrac{x}{1+x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $g(x) = x - f(x)$. Hàm $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có

$$g'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} > 0\,;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Do vậy $g(x)$ là hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g(0).g(-2004) < 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ có nghiệm duy nhất $x = b$.

Áp dụng định lí La-gơ-răng thì $\exists c \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$|u_{n+1} - b| = |f(u_n) - f(b)| = |f'(c)|.|u_n - b|$$

$$|u_{n+1} - b| \leqslant \frac{1}{2}.|u_n - b|$$

Từ đó $|u_{n+1} - b| \leqslant \dfrac{1}{2}.|u_n - b| \geqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^2.|u_{n-1} - b| \leqslant \ldots \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n.|a - b|$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = b$.

Bài 15.

Ta có $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Theo quy nạp $u_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

Từ giả thiết ta được: $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{u_n} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{u_n^2}}$.

Đặt $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ với $v_1 = 1$, $v_2 = 2\sqrt{2}$

Ta được $v_{n+1} = \sqrt{2}\,v_n + \sqrt{1 + v_n^2}$.

$$\Leftrightarrow v_{n+1}^2 - 2\sqrt{2}v_n v_{n+1} + v_n^2 = 1 \qquad (*)$$

Từ trên suy ra: $v_{n+1}^2 - 2\sqrt{2}v_{n+1}v_{n+2} + v_{n+1}^2 = 1 \qquad (**)$

Từ (*) với (**) ta được: $(v_{n+2} - v_n)(v_{n+2} + v_n - 2\sqrt{2}v_{n+1}) = 0$

$\Rightarrow v_{n+2} - 2\sqrt{2}v_{n+1} + v_n = 0$ (vì $v_n > 0$ và đồng biến)

Phương trình đặc trưng: $x^2 - 2\sqrt{2x} + 1 = 0$ có hai nghiệm là:

$$x_1 = \sqrt{2} - 1,\ x_2 = \sqrt{2} + 1$$

Số hạng tổng quát $v_n = A(x_1)^n + B(x_2)^n$

Từ $v_1 = 1$, $v_2 = 2\sqrt{2}$ suy ra $\begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Số hạng $v_n = -\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^n + \dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^n$

Vậy số hạng $u_n = \dfrac{2}{(\sqrt{2}+1)^n - 9\sqrt{2}-1)^n}$

Bài 16.

Ta phải chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử các số hạng $u_1, u_2, ..., u_{2004}$ đều khác nhau. Không mất tính tổng quát của bài toán ta giả sử $u_1 < u_2 < ... < u_{2004}$; lúc đó ta có $u_k \geq k$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{u_k}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}} < \dfrac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{2004} \dfrac{1}{\sqrt{u_k}} < \sum\limits_{k=1}^{2004} 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) = 2\sqrt{2004}$; mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy có ít nhất 2 số hạng của dãy số là bằng nhau.

Bài 17.

Dùng phương pháp phản chứng

Giả sử tồn tại để $u_n = a^3$, $a \in \mathbb{N}^*$

Ta có $3(n^2+n) + 7 = a^3$ (1)

Vì $3(n^2+n) = 3n(n+1)$ là số chẵn, từ (1) $\Rightarrow a^3$ là số lẻ.

$\Rightarrow$ a là số lẻ $\Rightarrow a = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

Thay $a = 2k+1$ vào (1) ta có:

$$3(n^2+n) + 7 = (2k+1)^2 \Leftrightarrow 3(n^2+n+2) = 8k^3 + 12k^2 + 6k \quad (2)$$

Do $3(n^2+n+2) \vdots 3 \Rightarrow 8k^3 + 12k^2 + 6k \vdots 3$

Mà $12k^3 + 6k \vdots 3 \Rightarrow$ suy ra $8k^3 \vdots 3$

Do $(8, 3) = 1$ suy ra $k^3 \vdots 3 \Rightarrow k \vdots 3$

Suy ra $k = 3l$, $l \in \mathbb{N}$ thay vào (2) ta có:

$$3(n^2+n+2) = 8.27l^3 + 12.9l^2 + 6.3l$$

hay $n^2 + n + 2 = 6[12l^3 + 6l^2 + l]$ (3)

Vế phải của (3) chia hết cho 3, còn vế trái n^2+n+2 không chia hết cho 3 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Thật vậy: $n = 3k$ thì $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 3.

$n = 3k + 1$ thì $n^2 + n + 2 = 9k^2 + 9k + 4$ không chia hết cho 3.

$n = 3k - 1$ thì $n^2 + n + 2 = 9k^2 - 3k + 2$ không chia hết cho 3.

Từ (3) $\Rightarrow$ điều vô lí.

Vậy không có phần tử nào của dãy số là lập phương của một số nguyên.

Bài 18.

Ta có $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2003u_n}{2004} \Leftrightarrow u_{n+1} = \dfrac{u_n(u_n - 1)}{2004} + u_n,\ n \in \mathbb{N}^*$

Vì $u_1 = 2$ nên ta có: $2 = u_1 < u_2 < u_3 < \dots < u_n < \dots$

Tức (u_n) là dãy tăng.

Ta giả sử dãy này bị chặn trên, lúc đó tồn tại số l sao cho:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l \qquad (\text{để ý } l > 2)$$

Khi đó $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2 + 2002u_n}{2004}$

$$\Rightarrow l = \frac{l^2 + 2003l}{2004} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l = 0 \\ l = 1 \end{array}\right.$$

Điều này vô lí vì $l > 2$. Như vậy dãy (u_n) không bị chặn.

Từ đó ta có: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n + \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = 0$

Từ giả thiết ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(u_n - 1)}{2004}$

$$\Leftrightarrow u_n(u_n - 1) = 2004(u_{n+1} - u_n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} = 2004\left[\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right]$$

Cho n lần lượt nhận các giá trị 1, 2, 3, ..., n rồi sau đó cộng n đẳng thức nhận được vế theo vế ta có:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{u_{i+1} - 1} = 2004\left(\frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right) = 2004\left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2004\left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right) = 2004$$

Bài 19.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt: $t_n = \max\{x_n, y_n, z_n\}$

$V_n = \min\{x_n, y_n, z_n\}$

+ Từ giả thiết, dễ thấy: $t_{n+1} \le t_n + \dfrac{1}{V_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (1)

và $$V_{n+1} \ge V_n + \frac{1}{t_n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad (2)$$

$\Rightarrow V_n \ge V_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{t_{n+1}}{V_{n+1}} \leqslant \dfrac{t_n}{V_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Do đó: $\dfrac{t_n}{V_n} \leqslant \dfrac{t_0}{V_0}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Vì vậy từ (1) và (2) ta có:

- $t_n^2 \leqslant t_{n-1}^2 + 2.\dfrac{t_{n-1}}{V_{n-1}} + \dfrac{1}{V_{n-1}^2} \leqslant t_{n-1}^2 + 2.\dfrac{t_0}{V_0} + \dfrac{1}{V_0^2}$, $\forall n \ge 1$

$$\Rightarrow t_n^2 \leqslant t_0^2 = n\left(2.\frac{t_0}{V_0} + \frac{1}{V_0^2}\right), \forall \ge 1$$

$$\Rightarrow t_n^2 \leqslant n\left(t_0 + \frac{1}{V_0}\right)^2, \forall n \ge 1 \Rightarrow t_n \le \sqrt{n}\left(t_0 + \frac{1}{V_0}\right), \forall n \ge 1 \qquad (3)$$

- $V_n^2 \geqslant V_{n-1}^2 + 2. + \dfrac{1}{t_{n-1}^2} \le V_{n-1}^2 + 2.\dfrac{V_0}{t_0}$, $\forall n \ge 1$

$$\Rightarrow V_n^2 > V_0^2 + 2n.\frac{V_0}{t_0} > 2n.\frac{V_0}{t_0}, \forall n \ge 1 \Rightarrow V_n > \sqrt{n}\sqrt{\frac{2V_0}{t_0}} \qquad (4)$$

Do $V_n \le x_n \le t_n$, $\forall n \ge 1$, nên từ (3) và (4) ta được:

$$s\sqrt{n} \leqslant x_n \leqslant t\sqrt{n}, \ \forall n \ge 1 \text{ với } s = \sqrt{\frac{2V_0}{t_0}} \text{ và } t = t_0 + \frac{1}{V_0}$$

Bài 20.

* $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow (U_n)$ tăng.

$$\frac{1}{k!} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \ \forall k \ge 2$$

$$\Rightarrow U_n < 2 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 3 - \frac{1}{n} < 3 \ ; \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Vậy (U_n) hội tụ.

* $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n + \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!}$

$$= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leqslant 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$\Rightarrow (V_n)$ giảm. $V_n > U_n > ... > U_1 = 2; \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Vậy (V_n) hội tụ.

* Vì $V_n = U_n + \frac{1}{n!}$ và $\lim\frac{1}{n!} = 0$ nên $\lim V_n = \lim U_n$.

* Giả sử $\lim V_n = \lim U_n = \frac{m}{N} \in \mathbb{Q}^+$, vì $V_n > U_n$; (V_n) giảm, (U_n) tăng nên ta có:

$U_n < \frac{m}{N} < V_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Cho n = N ta được:

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!} < \frac{m}{N} < \frac{1}{N!} + \sum_{k=0}^{N}\frac{N!}{k!} < m.(N-1)!, 1 + \sum_{k=0}^{N}\frac{N!}{k!}$$

Vậy tồn tại một số nguyên $m.(N-1)!$ nằm giữa 2 số nguyên liên tiếp

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{N!}{k!} \text{ và } 1 + \sum_{k=0}^{N}\frac{N!}{k!} : \text{mâu thuẫn.}$$

Vậy $\lim V_n = \lim U_n \in \mathbb{Q}$.

Bài 21.

Đặt $y_n = \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + n + 1}$. Vậy ta cần tính

$$\lim_{n\to\infty}[\cos(\pi n.y_n) + \sin(\pi n.y_n)]$$

Do n(n + 1) là số chẵn nên ta có:

$$\cos(\pi n.y_n) = \cos[-\pi n.y_n + n(n+1)\pi]$$

$$= \cos\pi n(n + 1 - y_n)$$

$$= \cos\left[\pi n.\frac{(n+1)^3 - y_n^3}{(n+1)^2 + y_n(n+1) + y_n^2}\right]$$

$$= \cos\left[\frac{2\pi n^2}{(n+1)^2 + y_n(n+1) + y_n^2}\right]$$

$$= \cos\left[\frac{2\pi}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{y_n}{n}.\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{y_n}{n}\right)^2}\right].$$

Tương tự có: $\sin(\pi n.y_n) = -\sin\left[\frac{2\pi}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{y_n}{n}.\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{y_n}{n}\right)^2}\right]$

Ta có: $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{n} = 1$. Vậy $\lim_{n\to\infty}\cos(\pi n.y_n) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

và $\lim_{n\to\infty}\sin(\pi n.y_n) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy ta có: $\lim\limits_{n\to\infty}[\cos(\pi n.y_n) + \sin(\pi n.y_n)] = -\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Bài 22.

* Lập luận được $\alpha = u_1 < u_2 < u_3 < \dots u_n$.

* Chứng minh dãy $\{u_n\}$ không bị chặn trên $\Rightarrow \lim\dfrac{1}{u_n} = 0$.

* Đặt $V_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{u_i}{u_{i+1} - 1}$.

* Từ giả thiết suy ra $2003(u_{n+1} - u_n) = u_n(u_n - 1)$

$$\Rightarrow 2003\left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right) = \frac{u_n}{u_{n+1} - 1}.$$

* Suy ra $V_n = 2003\left(\dfrac{1}{\alpha - 1} - \dfrac{1}{u_{n+1} - 1}\right)$

Suy ra $\lim V_n = \dfrac{2003}{\alpha - 1}$

Bài 23.

Từ cách cho dãy ta có

$$\left.\begin{array}{l} u_3 = u_2 - u_1 \\ u_4 = -u_1 \\ u_5 = -u_2 \\ u_6 = -u_2 + u_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{6} u_i = 0 \qquad (1)$$

Bằng quy nạp toán học ta chứng minh công thức sau:

$$u_i = u_{6k+i}\ \forall k \in \mathbb{N} \text{ và } I = \overline{1,6} \qquad (2)$$

- Với $k = 0$ hiển nhiên công thức đúng.
- Giả sử công thức đúng với $k = n$. Tức là

$$u_i = u_{6n+i},\ i = \overline{1,6}$$

Ta chứng minh công thức đúng với $k = n + 1$.

Thật vậy ta có

- $u_{6(n+1)+1} = u_{6n+7} = u_{6n+6} - u_{6n+5} = u_6 - u_5 = u_1$
- $u_{6(n+1)+2} = u_{6n+8} = u_{6n+7} - u_{6n+6} = u_1 - u_6 = u_2$
- $u_{6(n+1)+3} = u_{6n+9} = u_{6n+8} - u_{6n+7} = u_2 - u_1 = u_3$

Tương tự: • $u_{6(n+1)+4} = u_3 - u_2 = u_4$

- $u_{6(n+1)+5} = u_4 - u_3 = u_5$
- $u_{6(n+1)+6} = u_5 - u_4 = u_6$

Vậy công thức được chứng minh.

Do (1) và (2) nên ta suy ra $S_{6n} = \sum_{i=1}^{6n} u_i = 0\ n \in \mathbb{N}^*$

Từ đó: $S_{2003} = S_{2004} - u_{2004} = 0 - u_6 = u_2 - u_1 = S_{2003}^2 - S_{2003} + 1$

$$\Rightarrow S_{2003}^2 - 2S_{2003} = 1 = 0 \Leftrightarrow S_{2003} = 1..$$

Bài 24.

Với n ≥ 1, áp dụng bất đẳng thức Cô–si

$$u_{n+1} + (1 - u_n) \geq 2\sqrt{u_{n+1}(1 - u_n)} > 2.\frac{1}{2} = 1$$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (u_n)$ là dãy tăng. lại theo giả thiết (u_n) bị chặn nên tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Gọi $a = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Theo giả thiết, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1}(1 - u_n) > \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_{n+1}(1 - \lim_{n\to\infty} u_n) \geqslant \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow a(1 - a) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0 \Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

Bài 25.

Với $\forall x \in [0; 1]$ ta có $\sin x \leq x$.

Ta có: $a^0 = 1 \Rightarrow 0 < a_1 = \sin 1 < 1 = a_0$. Quy nạp $\Rightarrow 0 < a_n < a_{n-1} < ... < a_1 < a_0 = 1$ nên $[a_n]$ giảm và bị chặn dưới bởi 0.

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n}$$

Áp dụng giới hạn:

$$\lim_{n\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{n\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{n\to 0} \frac{2x - \sin 2x}{2x\sin^2 x + x^2 \sin 2x} = \frac{1}{3}$$

Suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_n^2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n - (n-1)}{\dfrac{1}{a_n^2} - \dfrac{1}{a_{n-1}^2}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{a_n^2} - \dfrac{1}{a_{n-1}^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{1}{\text{ain}^2 a_{n-1}} - \dfrac{1}{a_{n-1}^2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{3}} = 3$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n.a_n^2 = 3$

Bài 26.

Từ giả thiết ta suy ra:

$$\begin{cases} a_{n+2}.a_n = a_{n+1}.n_{n+2} + p \\ a_{n+4}.a_{n+1} = a_{n+2}.a_{n+3} + p \end{cases}$$

Suy ra: $(a_{n+4} + a_{n+2})a_{n+1} = (a_{n+2} + a_n)a_{n+3}$

hay $$\frac{a_{n+4} + a_{n+2}}{a_{n+3}} = \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} \text{ ; } \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (*)$$

Từ (*) suy ra:

$$\begin{cases} \dfrac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{a_3 + a_1}{a_2} = 3 & \text{nếu n lẻ} \\ \dfrac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{a_4 + a_2}{a_3} = \dfrac{p+3}{2} & \text{nếu n chẵn} \end{cases}$$

hay $$\begin{cases} a_{n+2} = 3a_{n+1} = a_n & \text{nếu n lẻ} \\ a_{n+2} = \dfrac{p+3}{2}a_{n+1} - a_n & \text{nếu n chẵn} \end{cases}$$

Tổng quát:

$$\begin{cases} a_{2n+3} = 3a_{2n+2} - a_{2n+1} \\ a_{2n+2} = \dfrac{p+3}{2}a_{2n+1} - a_{2n} \end{cases}$$

Do đó với $a_1 = a_2 = 1$; $a_3 = 2$, mọi số hạng của (a_n) đều là số nguyên khi $\dfrac{p+3}{2}$ nguyên $\Leftrightarrow$ p là số lẻ.

Bài 27.

Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2}{2003} \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 2003\left(\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + \ldots + \frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = 2003\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}}\right) = 2003\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

Từ giả thiết, ta có (u^n) là dãy đơn điệu tăng, do đó nếu nó bị chặn thì

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a > 1 \qquad (1)$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_n^2}{2003} + u_n\right) \Rightarrow a = \dfrac{a^2}{2003} + a \Rightarrow a = 0$ (trái với (1))

Vậy (u_n) không bị chặn, suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{u_n} = 0$

Vì vậy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+\frac{u_3}{u_4}+\ldots+\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}2003\left(1-\frac{1}{u_{n+1}}\right)=2003$

Bài 28.

Không thể suy ra được.

Chẳng hạn ta xét dãy $x_n = \cos(\pi\log_2\log_{2n})$, với $n > 1$ và x_1 tuỳ ý. Ta chứng minh nếu $a \geq 1$; $b \geq 1$; $c \geq 0$ là các số nguyên thì

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + x_{an^2+nb+c}) = 0$$

Ta có khi $n > 1$ thì:

$$x_n + x_{n^2} = \cos(\pi\log_2 n) + \cos(\pi\log_2\log_2 n^2)$$

$$= \cos(\pi\log_2\log_2 n) + \cos(\pi\log_2\log_2 n + \pi) = 0$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\{\cos[\pi\log_2\log_2(an^2+bn+c)] - \cos(\pi\log_2\log_2 n^2)\} = 0$

Thật vậy ta dễ dàng chứng minh được $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.

Do đó $\left|\cos[\pi\log_2\log_2(an^2+nc+c)] - \cos(\pi\log_2\log_2 n^2)\right| \leq$

$$\leq \left|\pi\log_2\log_2(an^2+bn+c) - \pi\log_2\log_2 n^2\right| \leq$$

$$\leq \pi\left|\log_2\log_2[(a+n+c)n^2] - \log_2\log_2 n^2\right| \leq$$

$$\leq \pi\left|\log_2[2\log_2 n + \log_2(a+b+c)] - \log_2(2\log_2 n)\right|$$

$$= \pi\left|\log_2\left(1+\frac{\log_2(a+b+c)}{2\log_2 n}\right)\right| \to 0,\ n\to\infty$$

Trong khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$ vì $|x_n| = 1$ khi $n = 2^{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Bài 29.

Trước hết ta chứng minh đẳng thức:

$$\frac{u_n - 2003}{u_n + 2003} = \left(\frac{a-2003}{a+2003}\right)^{2^n}$$

+ Với n = 1

$$\frac{u_1 - 2003}{u_1 + 2003} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{2003^2}{u_0}\right) - 2003}{u_0 + \frac{2003^2}{u_0} + 2003}\ \frac{u_0^2 - 2.2003u_0 + 2003^2}{u_0^2 + 2.2003u_0 + 2003^2}$$

$$= \frac{(u_0 - 2003)^2}{(u_0 + 2003)^2} = \frac{(a-2003)^2}{(a+2003)^2}$$

+ Giả sử đẳng thức đúng với n = k ta có: $\frac{u_k - 2003}{u_k + 2003} = \left(\frac{a - 2003}{a + 2003}\right)^{2^k}$

+ Ta chứng minh đẳng thức đúng với n = k + 1, nghĩa là chứng minh:

$$\frac{u_{k+1} - 2003}{u_{k+1} + 2003} = \left(\frac{a - 2003}{a + 2003}\right)^{2^{k+1}}$$

Ta có: $$\frac{u_{k+1} - 2003}{u_{k-1} + 2003} = \frac{\frac{1}{2}\left(u_k + \frac{2003^2}{u_k}\right) - 2003}{\frac{1}{2}\left(u_k + \frac{2003^2}{u_k}\right) + 2003} = \frac{(u_k - 2003)^2}{(u_k + 2003)^2} =$$

$$= \left(\frac{u_k - 2003}{u_k + 2003}\right)^2 = \left[\left(\frac{a - 2003}{a + 2003}\right)^{2^k}\right]^2 = \left(\frac{a - 2003}{a + 2003}\right)^{2^{k+1}}$$

Vậy đẳng thức đúng với mọi n nguyên dương.

Ta có: $\left|\frac{a - 2003}{a + 2003}\right| < 1$ và $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{a - 2003}{a + 2003}\right)^{2n} = 0$

hay $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n - 2003}{u_n + 2003} = 0$

Đặt $V_n = \frac{u_n - 2003}{u_n + 2003}$ suy ra $U_n = \frac{1 + V_n}{1 - V_n}.2003$

Do $\lim\limits_{n \to \infty} V_n = 0$.

Vậy $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = 2003$

Bài 30.

Ta có $$\begin{cases} u_1(1 + q^1 + q^2 + ... + q^{n-1}) = a \\ \frac{1}{u_1}\left(1 + \frac{1}{q^1} + \frac{1}{q^2} + ... + \frac{1}{q^{n-1}}\right) = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = u_1 \frac{a^n - 1}{q - 1} \quad (1) \\ h = \frac{1}{u_1} \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1}{\frac{1}{q} - 1} \quad (2) \end{cases}$$

$$P = u_1 u_2 ... u_n = u_1 u_1 q u_1 q^2 ... u_1 q - 1 = u_1^n q^{1+2+...+(n-1)} = u_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$\Rightarrow p^2 = a_1^{2n}q^{n(n-1)} \qquad (3)$$

Từ (1) và (2) ta được $\frac{a}{b} = u_1^2.q^{n-1} > 0$ do $q > 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n = u_1^{2n}q^{n(n-1)} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow p^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^n \Leftrightarrow |P| = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}}$

do $u_1 > 0$ và $q > 0$ nên $P = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{2}}$

Câu 31.

$$\begin{cases} U_0 = 2003 \\ 2^n.U_{n+1} = \left|2^n.U_n - 1\right| \end{cases} \qquad (1)$$

* Ta chứng minh: $U_n > 2^{1-n}$ (2)

$$(1) \Leftrightarrow U_{n+1} = \left|u_n - 2^{-n}\right|$$

Chứng minh (2) bằng phương pháp quy nạp:

- $U_1 = \left|U_0 - 2^0\right| = \left|2003 - 1\right| = 2002 > 1$
- Giả sử (2) đúng với n = k, ta có: $U_k > 2^{1-k}$ (3)

Ta có $U_{k+1} = \left|U_k - 2^{-k}\right| - 2^{-k} > 2^{1-k} = 2^{-k}$ (theo (2))

$$\Rightarrow U_{k+1} > 2^{1-(k+1)} \Rightarrow \text{(2) đúng với } n = k + 1.$$

Theo nguyên lí quy nạp thì bất đẳng thức (2) đúng $\forall n \in \mathbb{N}$.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow U_{n+1} = U_n - 2^{-n}$

$$\Rightarrow U_2 = U_1 - 2^{-1}$$
$$U_3 = U_2 - 2^{-2}$$
$$U_{n-1} = U_{n-2} = 2^{2-n}$$
$$U_n = U_{n-1} - 2^{1-n}$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta có:

$$U_n = U_1 - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-n+k} \qquad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-n+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-}}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - 2^{1-n} \text{ (cấp số nhân)}$$

$$\text{Từ (4)} \Rightarrow U_n = 2002 - 1 + 2^{1+n} = 2001 + 2^{1-n} = 2001 + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 2001 + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2001$$

Bài 32.

Ta có: $f(n) = [(n^2+1)+n]^2 + 1$

$$= (n^2+1)^2 + 2n(n^2+1) + n^2 = 1$$

$$= (n^2+1)(n^2+2n+2) = (n^2+1)[(n+1)^2+1]$$

Do đó: $\dfrac{f(2n-1)}{f(2n)} = \dfrac{(4n^2-4n+2)(4n^2+1)}{(4n^2+1)(4n^2-4n+2)} = \dfrac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1}$

Suy ra $u_n = \dfrac{1^2+1}{3^2+1}\cdot\dfrac{3^3+1}{5^2+1}\cdot\dfrac{5^2+1}{7^2+1}\cdots\dfrac{(2n-1)^2+1}{(2n+1)^2+1} = \dfrac{1}{2n^2+2n+1}$

$$\Rightarrow n\sqrt{u_n} = \frac{n}{\sqrt{2n^2+2n+1}}$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

§7. HÌNH KHÔNG GIAN

A. ĐỀ BÀI

Bài 1.

Cho một tứ diện ABCD có mặt cầu nội tiếp với bán kính r không đổi.

Gọi R_A, R_B, R_D lần lượt là bán kính của mặt cầu bàng tiếp ứng với đỉnh A, B, C, D của tứ diện ABCD.

Hãy xác định tứ diện ấy để $(R_A + R_B + R_C + R_D)$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 2.

Cho điểm M cố định nằm trong góc tam diện Oxyz cố định. Các mặt phẳng qua M song song với các mặt tam diện cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Mặt phẳng (α) di động qua M và cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C khác 0.

a) Chứng minh: $\dfrac{OA_1}{OA} + \dfrac{OB_1}{OB} + \dfrac{OC_1}{OC} = 1$

b) Tìm vị trí của (α) sao cho: $\dfrac{1}{V_{OMAB}} + \dfrac{1}{V_{OMBC}} + \dfrac{1}{V_{OMCA}} - \dfrac{\sqrt{e}}{V_{OABC}}$ đạt giá trị lớn nhất?

Bài 3.

Cho tam giác nhọn ABC, M là trung điểm BC, P là một điểm trên đoạn AM sao cho PM = BM. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ P xuống BC; Q là giao điểm của AB với đường thẳng qua H và vuông góc với PB: R là giao điểm của đường thẳng qua H và vuông góc với PC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QHE tiếp xúc với BC tại H.

Bài 4.

Cho tứ diện OABC vuông tại O. Gọi α, β, γ là góc tạo bởi đường cao xuất phát từ O với các cạnh OA, OB, OC.

Chứng minh:

$$3^{\sin^2\alpha} + 3^{\sin^2\beta} + 3^{\sin^2\gamma} \geqslant \cos^2\alpha . 3^{2-\cos^2\alpha} + \cos^2\beta . 3^{2-\cos^2\beta} + \cos^2\gamma / 3^{2-\cos^2}$$

Bài 5.

Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB và thoả mãn điều kiện A_1B_1 // AM, B_1C_1 // BM, C_1A_1 // CM.

Chứng minh rằng $S(A_1B_1C_1) \leq \frac{1}{3}S(ABC)$.

Bài 6.

Cho tứ diện vuông OABC với OA = ON = OC = a

a) Xác định mặt phẳng (P) sao cho tổng diện tích hình chiếu các mặt của tứ diện lên (P) đạt giá trị lớn nhất.

b) (P) hợp với (BOC), (COA), (AOB) các góc nhọn α, β, γ. Chứng tỏ $\in + \beta + \gamma < \pi$.

Bài 7.

Cho (d) và (*l*) là các đường thẳng chéo nhau trong không gian. Gọi A, B là các điểm lần lượt ở trên (d) và (*l*) sao cho AB là đường vuông góc chung của (d) và (*l*). Gọi C, D là các điểm di động lần lượt trên (d) và (*l*) sao cho CD có độ dài không đổi, đồng thời C không trùng với A và D không trùng với B. Chứng minh rằng tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD ở trên một đường tròn cố định và tâm của đường tròn này là trung điểm của AB.

Bài 8.

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Gọi G_a, G_b, G_c, G_d là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC.

Đặt: $AF_a = m_a$; $BG_b = m_b$; $CG_c = m_c$; $DG_d = m_d$

Chứng minh rằng: $R \geq \frac{3}{16}(m_a + m_b + m_c + m_d)$.

Bài 9.

Cho tứ diện ABCD có trong tậm G và nội tiếp trong mặt cầu tâm O. Các đường thẳng AG. BG. CG. DG lần lượt cắt mặt cầu tại điểm thứ hai A', B', C', D'. Chứng minh rằng:

$$AA' + BB' + CC' + DD' \geq \frac{2}{\sqrt{6}}(AB + AC + AD + BC + BD = CD)$$

Bài 10.

Cho tứ diện SABC có thể tích V. Lấy M nằm trong tam giác ABC, qua M dựng các đường thẳng song song với SA, SB, SC các đường thẳng này cắt mp(SBC), mp(SCA) lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Xác định điểm M biết rằng thể tích $MA_1B_1C_1$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 11.

Cho tứ diện OABC vuông tại O. Gọi α, β, δ lần lượt là góc giữa đường cao OH với các cạnh OA, OB, OC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos^2\delta} + \frac{\cos\beta + \cos\delta}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos\delta + \cos\alpha}{\cos^2\beta}$$

Bài 12.

Cho tứ giác lồi ABCD không chứa trong mp(P). Gọi A', B', C', D' lần lượt là hình chiếu xuống mp(P) theo phép chiếu song song của A, B, C, D. Chứng minh rằng các tứ diện $ABCD'$ và $A'B'C'D$ có thể tích bằng nhau.

Bài 13.

Trong một tam giác ABC, những tam giác nào làm cho biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất.

$$p = \frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}}$$

Bài 14.

Cho tứ diện ABCD với AB = CD = a; BC = AD = b; AC = BD = c. M là điểm tuỳ ý trong không gian. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA + MB + MC + MD.

Bài 15.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cố định cạnh a và thể tích không đổi. Tìm vị trí của S để diện tích xung quanh nhỏ nhất.

Bài 16.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Điểm M thuộc đoạn BC', điểm N thuộc đoạn AB'. MN tạo với mặt phẳng (ANCD) một góc α.

Chứng minh rằng: $MN \geq \dfrac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha}$.

Bài 17.

Tứ diện ABCD có cạnh AB = x, các cạnh còn lại bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích của tứ diện ABCD.

Bài 18.

Cho hai mặt cầu (S_1) và (S_2) bán kính khác nhau tiếp xúc ngoài nhau. Các mặt cầu này nằm trong một mặt nón (C). Mỗi mặt cầu tiếp xúc với mặt nón theo một đường tròn. Trong mặt nón còn có n hình cầu như nhau xếp thành một vòng sao cho mỗi một trong chúng tiếp xúc với mặt nón (C), tiếp xúc (S_1), (S_2) và tiếp xúc với hai hình cầu hai bên. Tìm n?

Bài 19.

Trong không gian cho bốn tia Ox, Oy, Oz, Ot sao cho các góc tạo bởi hai tia bất kì đều bằng nhau. Trên các tia Ox, Oy, Oz, Ot lần lượt lấy các điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng với mọi điểm M trong không gian ta có;

$$MA + MB + MC + MD \geq OA + OB + OC + OD$$

Bài 20.

Cho hình lập phương nội tiếp trong hình cầu S(O; R) với R = a. Trong hình lập phương ấy lại nội tiếp một hình cầu $S_1(O; R_1)$. Qua trung điểm của hai cạnh liên tiếp của hình lập phương ta dựng một mặt phẳng (α) tiếp xúc với hình cầu $S_1(O; R_1)$. Mặt phẳng (α) cắt hình lập phương theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích của thiết diện đó theo a.

Bài 21.

Cho tứ diện OABC có 3 góc phẳng ở O đều vuông. Gọi x, y, z lần lượt là các góc nhị diện cạnh BC, CA, AB của tứ diện. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$E = \sqrt{\sin^4 x + \frac{1}{\sin^4 x}} + \sqrt{\sin^4 y + \frac{1}{\sin^4 y}} + \sqrt{\sin^4 z + \frac{1}{\sin^4 z}}$$

Bài 22.

Hỏi có thể xếp vào hình lập phương cạnh 1 hai hình tứ diện đều cạnh $\frac{3}{4}\sqrt{2}$ sao cho miền trong của hai hình tứ diện đó không có điểm chung nào hay không?

Bài 23.

Đáy hình chóp S.ABCD là hình thang cân ABCD có đáy AB = a, góc nhọn bằng α. Đường cao hình chóp SO = h (với O ở ngoài ABCD). AO cắt CD tại trung điểm K của CD. Tính góc tạo bởi mặt bên (SBC) và đáy (ABCD) nếu AO: OK = 4 : 1 và $\widehat{AOB} = 90^0$.

Bài 24.

Có tồn tại hay không một hình chóp tứ giác đều có thể tích V = 2004 và các cạnh, diện tích toàn phần đều là số nguyên.

Bài 25.

Cho một góc tam diện có không quá một góc phẳng là vuông. Qua đỉnh của nó ta vẽ 3 đường thẳng, mỗi đường đều vuông góc với một cạnh của góc tam diện và nằm trong mặt của tam diện không chứa cạnh đó. Chứng minh rằng 3 đường thẳng ấy cũng nằm trong một mặt phẳng.

Bài 26.

Cho tứ diện ABCD nội tiếp trong hình cầu tâm O, bán kính R với tâm O nằm trong tứ diện. Gọi A′, B′, C′, D′ lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AO, BO, CO, DO với các mặt đối diện (BCD), (CDA), (DAB), (ABC).

Chứng minh: $AA' + BB' + CC' + DD' \geq \dfrac{16R}{3}$.

Bài 27.

Cho tứ diện ABCD với AB = CD = a, BC = DA = b và AC = BD = c.

a) Tính thể tích tứ diện ABCD theo a, b, c.

b) Tìm vị trí điểm M trong không gian sao cho tổng $\sum = MA + MB + MC + MD$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 28.

Cho tứ diện ABCD nội tiếp mặt cầu tâm O, bán kính R. Hãy xác định vị trí của điểm M trên mặt cầu sao cho $S = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 29.

Chứng minh rằng:

Một tứ diện thoả mãn hai điều kiện: năm cạnh có độ dài nhỏ hơn 1, còn cạnh thứ sáu có độ dài tuỳ ý thì thể tích của nó nhỏ hơn $\dfrac{1}{8}$.

Bài 30.

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC.

$$\alpha = \widehat{(SA, ABC}\,;\ \beta = \widehat{(SBC, ABC}\,;\ \gamma = \widehat{(SAB, SBC}\,;\ \alpha; \beta; \gamma \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right).$$

Giả sử α, β, γ thay đổi: a = γ ≥ 2β, đồng thời dựng được thiết diện qua BC và vuông góc với SA tại D. Chứng minh:

$\dfrac{V_{SBCD}}{V_{ABCD}}$ đạt giá trị lớn nhất ⇔ α, β, γ là cấp số cộng.

Bài 31.

Cho tứ diện đều SABC. Qua đường cao SO của tứ diện dựng một mặt phẳng cắt các mặt bên theo 3 đường thẳng tạo với mặt đáy của tứ diện các góc α, β, γ.

Chứng minh rằng: $tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma = 12$.

Bài 32.

Cho tứ diện ABCD có tổng các góc phẳng ở đỉnh A bằng 180^0 và diện tích các tam giác ABC, ABD, ACD bằng nhau và bằng S, hình chiếu vuông góc của A trên mp(BCD) thuộc miền tam giác BCD.

Gọi u, v, ω lần lượt là góc tạo bởi mp(BCD) với các mặt (ABC), (ABD), (ACD). Chứng minh rằng:

$$\sin^2 u + \sin^2 v + \sin\omega \le \frac{8}{3}$$

Bài 33.

Cho một số hữu hạn hình cầu giao nhau tạo thành một hình cố thể tích là 27. Chứng minh rằng: hoặc tồn tại một hình cầu hoặc tồn tại một số hữu hạn hình cầu đôi một không giao nhau sao cho thể tích của nó hoặc tổng thể tích của chúng lớn hơn 1.

Bài 34.

Cho tứ diện ABCD có AB.AC.AD = 54081; Lấy O là điểm bất kì thuộc miền trong tam giác BCD. Từ O kẻ các đường thẳng lần lượt song song với AB, AC, AD cắt (ACD), (ABD), (ABC) lần lượt tại B_1, D_1, C_1.

Chứng minh rằng: $OB_1, OC_1, OD_1 \le 2003$.

Bài 35.

Cho tứ diện ABCD có tính chất: mặt cầu nội tiếp của tứ diện tiếp xúc với mặt (ABC) tại tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC, tiếp xúc với mặt (BCD) tại trực tâm H của tam giác BCD và tiếp xúc với mặt (ACD) tại trọng tâm G của tam giác ACD. Chứng minh ABCD là tứ diện đều.

Bài 36.

Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Một mặt phẳng (F) thay đổi, luôn song song với hai đáy, cắt các đoạn thẳng AB_1, BC_1, CD_1 và DA_1 lần lượt tại các điểm M, N, R, Q. Hãy xác định vị trí của (P) sao cho tứ giác MNRQ có diện tích bé nhất.

Bài 37.

Cho tứ giác lồi ABCD, AC cắt BD ở O. Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là bán kính nội tiếp các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA. Chứng minh rằng tứ giác ABCD ngoại tiếp được một đường tròn khi và chỉ khi:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$$

Bài 38.

Cho tứ diện ABCD có các cạnh xuất phát từ A đôi một vuông góc với nhau. Gọi a là cạnh lớn nhất xuất phát từ và r là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện. Chứng minh rằng: $a \ge (3 + \sqrt{3})r$.

Bài 39.

Cho tứ diện ABCD có AB = BC = 2a, AC = BD = 2b, AB.CD = $4c^2$. Gọi M là điểm tuỳ ý trong không gian, đặt $f(M) = (MA + MB + MC + MD)^2$. Chứng minh rằng:

$$f(M) \geq 8(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bài 40.

Cho tứ diện vuông OABC đỉnh O. Gọi R, r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp tứ diện.

Chứng minh: $\frac{R}{r} \geq \frac{3\sqrt{3} + 3}{2}$. Khi nào đẳng thức xảy ra.

Bài 41.

Cho hình chóp O.ABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OB + OC = OA. Gọi $\widehat{OAB} = m, \widehat{OAC} = n, \widehat{BAC} = p$. Chứng minh:

$tg^2m = tg^2n + tg^2p > 1$

Bài 42.

Cho góc tứ diện Sabcd chứng minh:

Mp(Sca) $\perp$ mp(Sbd) $\Leftrightarrow \cos\alpha.\cos\delta = \cos\beta.\cos.\cos\varphi$

Với α, β, φ lần lượt là góc giữa (Sa, Sb), (Sb, Sc), (Sc, Sd), (Sd, Sa).

Bài 43.

Cho tam giác OAB cố định. Ot là đường thẳng chuyển động trong không gian và luôn đi qia O; gọi C và D là hình chiếu của B và a trên Ot. Xác định vị trí của Ot sao cho thể tích V_{ABCD} lớn nhất.

Bài 44.

Cho ABCD là tứ diện gần đều với AB = CD = a, AD = BC = b, AC = BD = c, S là diện tích toàn phần của tứ diện, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \leq \frac{9}{S^2}$$

Bài 45.

Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ cạnh a. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của B′ trên mp(BC′D) và mp(A′DC′).

a) Chứng minh rằng các điểm B′, P, C′, Q cùng nằm trên một mặt phẳng.

b) Chứng minh rằng PQ vuông góc với mp(AB′C′) và tìm khoảng cách giữa PQ và AB′.

Bài 46.

Cho tứ diện ABCD có tâm mặt cầu ngoại iếp là O. Tìm các điểm M trong không gian sao cho 4 trọng tâm của 4 tứ diện MBCD, MACD, MABF và MABC cách đều điểm O.

Bài 47.

Cho hình chóp S.ABCD, gọi A′, B′, C′ và D′ là trung điểm của các cạnh bên. α là mặt phẳng cắt hình chóp cụt A′B′C′D′.ABCD theo mặt thiết diện MNKPQI là lục giác đều, trong đó M, N, J, P, Q, I và U lần lượt là giao của α với các cạnh BC, CD, DD′, D′A′, A′B′, BB′ và A′S.

Tính tỉ số thể tích của các tứ diện UA′QP và UAIJ.

Bài 48.

Cho tứ diện ABCD có thể tích V và điểm M ở trong tứ diện. Lấy M_1 đối xứng với M qua (BCD), rồi kê qua M_1 mặt phẳng song song (BCD). Mặt phẳng vừa kê tạo với mặt (BCD) và các mặt còn lại của tứ diện một hình chóp cụt. Gọi Q_1, W_2, W_3, W_4 là thể tích của hình chóp cụt tạo bởi (BCD), (ACD), (ABD), (ABC). Tìm vị trí của M sao cho $\sum_{i=1}^{4} W_i$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 49.

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Trên hai tia Bm, Dn cùng vuông góc với mặt phẳng (P) tại B, D và cùng ở một phía đối với (P); ta lấy lần lượt hai điểm M, N sao cho BM = x và DN = y ($x > 0$, $y > 0$).

a) Tính thể tích V của tứ diện ACMN theo a, x, y.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của V khi nhị diện [M, AC, N] là một nhị diện vuông.

Bài 50.

Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ với G là trọng tâm. A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 là các giao điểm tương ứng của mặt cầu ngoại tiếp $A_1A_2A_3A_4$ với GA_1, GA_2, GA_3, GA_4. Chứng minh rằng:

$$GA_1, GA_2, GA_3, GA_4 \le A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{GA'_1}+\frac{1}{GA'_2}+\frac{1}{GA'_3}+\frac{1}{GA'_3} \le \frac{1}{GA_1}+\frac{1}{GA_2}+\frac{1}{GA_3}+\frac{1}{GA_4} \qquad (2)$$

Dấu bằng xảy ra khi nào? Trong trường hợp đó, chứng minh rằng:

$MA_1 + MA_2 + MA_3 + MA_4 \ge 44R$ với M là điểm tuỳ ý ở trong tứ diện.

Các đề bài tiếp theo đây không có hướng dẫn giải

Bài 51.

Cho tứ diện ABCD. Lấy H ở miền trong tứ diện, (α) là mặt phẳng tuỳ ý. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C, D trên (Δ); V_1, V_2, V_3, V_4 là thể tích các tứ diện HBCD, HACD, HABD, HABC. Ta kí hiệu:

$$\vec{x} = V_1\overrightarrow{AM} + V_2\overrightarrow{BN} + V_3\overrightarrow{CP} + V_4\overrightarrow{DQ}$$

Xác định vị trí của (α) để độ lớn $|\vec{x}|$ ngắn nhất.

Bài 52.

Cho 3 điểm A, B, C lần lượt nằm trên ba cạnh Ox, Oy, Oz của góc tam diện vuông Oxyz sao cho $OA^2 + OB^2 + OC^2 = k^2$ ($k > 0$ là số dương cho trước). Gọi D là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật OADB và M là điểm di động trên CD.

a) Với mỗi vị trí của A, B, C gọi d là giá trị nhỏ nhất của tổng MA + MB. Hãy tính d.

b) Xác định vị trí A, B, C để d đạt giá trị lớn nhất.

Bài 53.

Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi A, B, C là ba góc của tam giác ABC và α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi OA, OB, OC và mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin 2A} = \frac{\cos^2\beta}{\sin 2B} = \frac{\cos^2\gamma}{\sin 2C}$$

Bài 54.

Cho tứ diện ABCD có cạnh bằng 1. Các điểm M, N lần lượt di động trên các đoạn AB, AC sao cho mp(DMN) ⊥ mp(ABC). Xác định vị trí của các điểm M, N để tứ diện ADMN có diện tích toàn phần lớn nhất, nhỏ nhất.

Bài 55.

Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Một mặt phẳng (P) thay đổi song song với hai đáy của lăng trụ, cắt các đoạn thẳng AB_1, BC_1, CD_1, DA_1 lần lượt ở các điểm M, N, P, Q. Hãy xác định vị trí của mặt phẳng (P) sao cho tứ giác MNPQ có diện tích lớn nhất.

Bài 56.

Cho hình chóp S.ABCD. Đáy ABCD là một tứ giác có đường chéo BD chia thành hai tam giác có diện tích bằng nhau, AB = 1, BC = CD, $SA + SD = \sqrt{2}$. Thể tích hình chóp bằng $\frac{1}{6}$.

Chứng minh rằng hình cầu có bán kính $R = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ có thể đặt được trong hình chóp.

Bài 57.

Cho tứ diện ABCD có một cạnh lớn hơn a. Các cạnh còn lại đều không lớn hơn a. Gọi V là thể tích của nó. Chứng minh rằng: $V \le \frac{a^3}{8}$.

Bài 58.

Cho khối chóp S.ABC có đáy ABC cố định, thể tích V không đổi và hình chiếu H của S trên mp(ABC) nằm trong tam giác ABC.

Gọi $x = h.AH.S_1$, $y = h.BH.S_2$, $x = h.CH.S_3$ với S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các tam giác BHC, CHA, AHB và $h = SH$.

Xác định vị trí của S để biểu thức sau có giá trị lớn nhất.

$$E = (x + y + z)(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)$$

Bài 59.

Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi (O; R); (I; r) lần lượt là mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi h_i là đường cao kẻ từ đỉnh A_i ($i = \overline{1,4}$.

Chứng minh rằng: $(OI^2) = R^2 - r^2\left(\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \dfrac{(A_iA_j)^2}{h_ih_j}\right)$.

Bài 60.

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A′B′C′D′, cạnh AB = x thoả mãn điều kiện: với R, r, h, V lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp, đường cao kẻ từ A′ và thể tích của tứ diện A′AB′D′ có

$$\frac{V(h - r)}{R^2.r.h} \geqslant \frac{2}{3}$$

Bài 61.

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn có bán kính R. Tính theo R thể tích tứ diện SABC thoả mãn các điều kiện sau:

(i) SA = BC, SB = AC, SC = AB.

(ii) Bán kính mặt cầu nội tiếp trong hình chóp SABC đạt giá trị lớn nhất.

Bài 62.

Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c. Lấy M là điểm bên trong tứ diện và gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là hình chiếu của M trên các mặt phẳng (BCD), (ACD), (ABD), (ABC). Tính giá trị nhỏ nhất của $MA_1^2 + MB_1^2 + MC_1^2 + MD_1^2$ theo a, b, c.

Bài 63.

Cho ngũ giác đều ABCDE nội tiếp trong đường tròn (O). Trên cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ của O lấy điểm M bất kì ($M \neq A$, $M \neq B$). Chứng minh;

$$MA + MB + MD = MC + ME$$

Bài 64.

Chứng minh rằng trong một tứ diện:

Tổng các góc phẳng ở mỗi đỉnh tam diện bằng nhau khi và chỉ khi tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp của tứ diện trùng nhau.

Bài 65.

Cho tứ diện ABCD sao cho AB, BC, CA đều nhỏ hơn cạnh DA, BD, DC. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của PD. Trong đó điểm P thoả mãn điều kiện.

$$PD^2 = PA^2 \;\; PB^2 + PC^2$$

Bài 66.

Cho tứ diện ABCD, gọi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ là 6 góc nhị diện của 6 cạnh tứ diện. Chứng minh rằng:

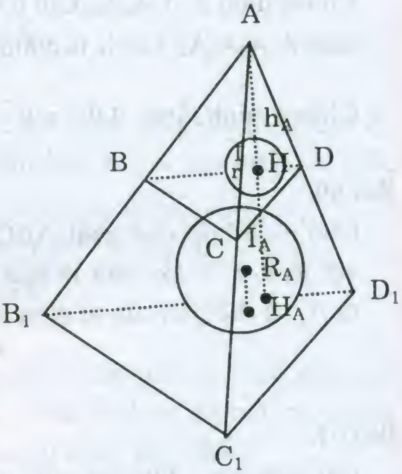
$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 + \cos\alpha_4 + \cos\alpha_5 + \cos\alpha_6 \le 2 .$$

B. HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

Dựng mặt phẳng song song với mp(BCD) và tiếp xúc với mặt cầu bàng tiếp ứng với đỉnh A có bán kính R_A cắt các đường thẳng AB, AC và AD lần lượt tại B_1, C_1 và D_1.

Từ A dựng đường thẳng vuông góc với mp(BCD) cắt (BCD) tại H và $(B_1C_1D_1)$ tại H_A.



Đặt: $AH = h_A$, ta có:

$AH_A = h_A + 2R_A$

$AB_1C_1D_1$ là hình vị tự của ABCD có tâm A và tỉ số vị tự là: $\dfrac{AH_A}{AH}$.

Do đó $\dfrac{r}{R_A} = \dfrac{h_A}{h_A + 2R_A} = \dfrac{h_A - 2r}{h_A} \Rightarrow \dfrac{r}{R_A} = 1 - \dfrac{2r}{h_A}$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_A} = \frac{1}{r} - \frac{2}{h_A}$$

Thực hiện tương tự như trên, h_B, h_C, h_D lần lượt là đường cao của tứ diện kẻ từ B, C và D.

Ta được: $\dfrac{1}{R_B} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{2}{h_B}$

$$\frac{1}{R_C} = \frac{1}{r} - \frac{2}{h_C}$$

$$\frac{1}{R_D} = \frac{1}{r} - \frac{2}{h_D}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Nên } \dfrac{1}{R_A} + \dfrac{1}{R_B} + \dfrac{1}{R_C} + \dfrac{1}{R_D} = \dfrac{4}{r} - 2\left(\dfrac{1}{h_A} + \dfrac{1}{h_B} + \dfrac{1}{h_C} + \dfrac{1}{h_D}\right) \\ \text{Mà } \dfrac{1}{h_A} + \dfrac{1}{h_B} + \dfrac{1}{h_C} + \dfrac{1}{h_D} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_D} = \frac{2}{r}$$

Vì $(R_A + R_B + R_C + R_D)\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_D}\right) \geq 16$

Do đó: $R_A + R_B + R_C + R_D \geq 8r$ (1)

$R_A + R_B + R_C = 8r \Leftrightarrow R_A = R_B = R_C = R_D \Leftrightarrow h_A = h_B = h_C = h_D$

$\Leftrightarrow D(\Delta ABC) = S(\Delta ACD) = S(\Delta ADB) = S(\Delta BCD)$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $(R_A + R_B + R_C + R_D)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi tứ diện ABCD có diện tích các mặt đều bằng nhau.

Vậy tứ diện ABCD có diện tích các mặt đều bằng nhau.

Bài 2.

a) * Theo giả thiết suy ra OM là đường chéo của hình hộp có cạnh OA_1, OB_1, OC_1.

* Theo tính chất hình hộp:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$$

$$= \frac{OA_1}{OA}\overrightarrow{OA} + \frac{OB_1}{OB}\overrightarrow{OB} + \frac{OC_1}{OC}\overrightarrow{OC}$$

* Do M, A, B, C đồng phẳng nên ta có:

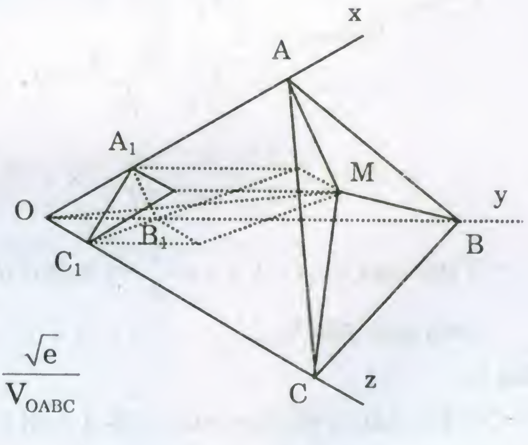
$$\frac{OA_1}{OA} + \frac{OB_1}{OB} + \frac{OC_1}{OC} = 1$$

b) * Đặt $V_0 = V_{OA_1B_1C_1} = V_{OMA_1B_1} = V_{OMB_1C_1} = V_{OMC_1A_1}$;

$$x = \frac{OA_1}{OA};\ y = \frac{OB_1}{OB};\ z = \frac{OC_1}{OC}$$

$\Rightarrow x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$.

* Áp dụng tính chất tỉ số thể tích:



$$\frac{V_0}{V_{OABC}} = xyz;$$

$$\frac{V_0}{V_{OMAB}} = yz;$$

$$\frac{V_0}{V_{OMCA}} = zx$$

$$* \ T = \frac{1}{V_{OMAB}} + \frac{1}{V_{OMBC}} + \frac{1}{V_{OMCA}} - \frac{\sqrt{e}}{V_{OABC}}$$

$$= \frac{1}{V_0}\left(\frac{V_0}{V_{OMAB}} + \frac{V_0}{V_{OMBC}} + \frac{V_0}{V_{OMCA}} - \frac{\sqrt{e}V_0}{V_{OABC}}\right)$$

$$= \frac{1}{V_0}(xy = yz + zx - \sqrt{e}.xyz) = \frac{1}{V_0}[x(y + z) + yz(1 - \sqrt{e}.x)]$$

* Vai trò x, y, z như nhau nên giả thiết rằng:

$$0 < x \le y \le z; x + y + z = 1 \Rightarrow 0 < x \le \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow T \le \frac{1}{V_0}[x(y + z) + \frac{1}{4}(y + z)^2(1 - \sqrt{2}.x)]$$

$$= \frac{1}{V_0}[x(1 - x) + \frac{1}{4}(-1x)^2(1 - \sqrt{e}.x)]$$

$$(1 + \sqrt{e}.x > 0,\ \forall x \in (0; \frac{1}{3}], \sqrt{e} = \sqrt{2,7} < 3)$$

* Xét $f(x) = x(1 - x) + \frac{1}{4}(1 - x)^2(1 - \sqrt{e}.x)$ trong $(0; \frac{1}{3}]$.

x		$\frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}}$		0		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↗	max	↘

$$f'(x) = -\frac{3}{4}\sqrt{e}.x^2 + (\sqrt{e} - \frac{3}{2})x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{e}}{4}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}} < 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow f(x) \le f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{e}}{27},\ \forall x \in (0; \frac{1}{3}] \Rightarrow \max T = \frac{1}{V_0}\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{e}}{27}\right)$$

* T đạt max $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3} \Leftrightarrow mp(\alpha) // mp(A_1B_1C_1)$. Khi đó M là trọng tâm tam giác ABC).

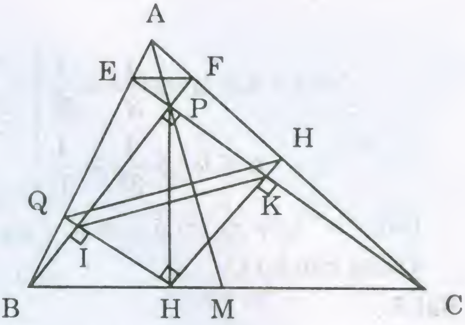
Bài 3.

Gọi $E = AB \cap PC$; $F = AC \cap PB$; $I = QH \cap BP$; $K = RH \cap PC$.

Do MP = MB = MC nên $BP \perp PC$

$\Rightarrow$ HQ // CE và HR // BF

$$\Rightarrow \frac{IQ}{IH} = \frac{PE}{PC}; \frac{KR}{KH} = \frac{PE}{PB} \quad (1)$$



Áp dụng định lí Xê–va với 3 đường AM, BF, CE trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{MB}{MC}.\frac{FC}{FA}.\frac{EA}{EB} = 1$$

suy ra $\frac{EA}{EB} = \frac{FA}{FC} \Rightarrow EF \, // \, BC \Rightarrow \frac{PE}{PC} = \frac{PF}{PB}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{IQ}{IH} = \frac{KR}{KH} \Rightarrow IK \, // \, QR$ (3)

Tứ giác PIHK là hình chữ nhật (Vì có 3 góc I, P, K vuông) do đó: $\widehat{QHR} = 1v$ và PH cắt IK tại trung điểm của IK (4)

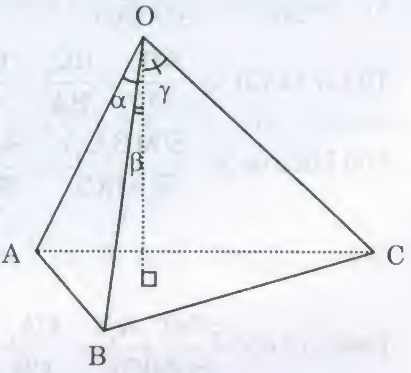
Từ (3) và (4) suy ra PH cắt QR tại trung điểm O Của QR mà PH $\perp$ BC nên đường tròn ngoại tiếp tam giác QHR tiếp xúc với BC tại H.

Bài 4.

Ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

nên $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma =$

$$= \frac{OH^2}{OA^2} + \frac{OH^2}{OB^2} + \frac{OH^2}{OC^2} = 1$$



Đặt $a = \cos^2\alpha$, $b = \cos^2\beta$, $c = \cos^2\gamma$ thì $a + b + c = 1$ và $\sin^2\gamma = 1 - c$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{3}{3^a} + \frac{3}{3^b} + \frac{3}{3^c} \geqslant \frac{9a}{3^a} + \frac{9b}{3^b} + \frac{9c}{3^c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3^a}(1 - 3a) + \frac{1}{3^b}(1 - 3b) + \frac{1}{3^c}(1 - 3c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3^a}(b + c - 2a) + \frac{1}{3^b}(c + a - 2b) + \frac{1}{3^c}(a + b - 2c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3^a} - \frac{1}{3^b}\right)(b - a) + \left(\frac{1}{3^b} - \frac{1}{3^c}\right)(c - b) + \left(\frac{1}{3^c} - \frac{1}{3^a}\right)(a - c) \geqslant 0$$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì ta có $y = \frac{1}{3^x}$ là hàm số nghịch biến nên:

$$\left.\begin{array}{l} a \geqslant b \Rightarrow \dfrac{1}{3^a} \leqslant \dfrac{1}{3^b} \\ a \leqslant b \Rightarrow \dfrac{1}{3^a} \geqslant \dfrac{1}{3^b} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{3^a} - \frac{1}{3^b}\right)(b-a) \geqslant 0$$

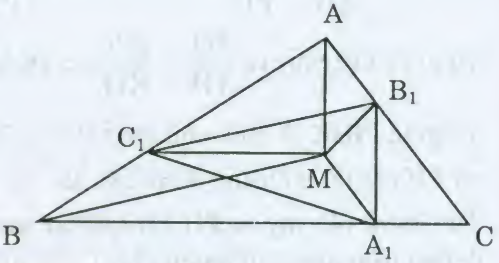
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \cos^2\beta = \cos^2\gamma$ hay tứ diện OABC vuông cân tại O.

Bài 5.

Vì $MB \,//\, B_1C_1$ nên $S(BB_1C_1) = S(MB_1C_1)$.

Vậy ta có:

$$\frac{AB_1}{AC} = \frac{S(AB_1B)}{S(ABC)} = \frac{S(AB_1C_1) + S(BB_1C_1)}{S(ABC)} = \frac{S(AB_1C_1) + S(MB_1C_1)}{S(ABC)} = \frac{S(AB_1MC_1)}{S(ABC)} \quad (1)$$



Tương tự như vậy ta có:

$$\frac{BC_1}{BA} = \frac{S(BC_1mB_1)}{S(ABC)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{AB_1}{AC} + \dfrac{BC_1}{BA} + \dfrac{CA_1}{CB} = 1$ (3)

Mặt khác ta có: $\dfrac{S(MB_1C_1)}{S(ABC)} = \dfrac{S(BB_1C_1)}{S(ABC)} = \dfrac{S(BB_1C_1)}{S(BB_1A)} \cdot \dfrac{S(BB_1A)}{S(ABC)}$

$$= \left(0;\ \frac{1}{2}\right) \quad (4)$$

Tương tự có: $\dfrac{S(MC_1A_1)}{S(ABC)} = \dfrac{CA_1}{CB} \cdot \dfrac{BC_1}{BA}$

$$\frac{S(MA_1B_1)}{S(ABC)} = \frac{AB_1}{AC} \cdot \frac{CA_1}{CB} \quad (5)$$

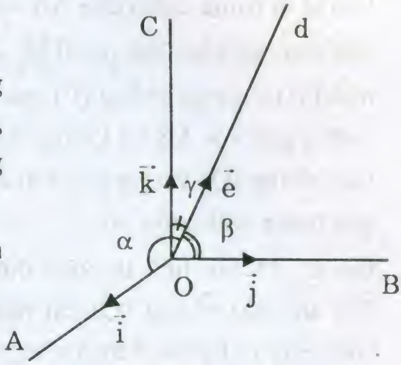
Từ (4), (5) $\Rightarrow \dfrac{S(A_1B_1C_1)}{S(ABC)} = \dfrac{BC_1}{BA} \cdot \dfrac{AB_1}{AC} + \dfrac{CA_1}{CB} \cdot \dfrac{BC_1}{BA} + \dfrac{AB_1}{AC} \cdot \dfrac{CA_1}{CB} \le$

$$\le \frac{1}{3}\left(\frac{AB_1}{AC} + \frac{BC_1}{BA} + \frac{CA_1}{CB}\right)^2 = \frac{1}{3} \text{ (theo (3))}$$

Suy ra $S(A_1B_1C_1) \le \dfrac{1}{3} S(ABC)$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{AB_1}{AC} = \dfrac{BC_1}{BA} = \dfrac{CA_1}{CB} \Leftrightarrow$ M là trọng tâm ΔABC.

Bài 6.



a) Xét một pháp tuyến của (P) là đường thẳng d qua O. (P) hợp với (BOC), (COA), (AOB) các góc α, β, γ tương ứng là góc hợp bởi d với OA, OB, OC.

Gọi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, $\vec{e}$ lần lượt là các véctơ đơn vị OA, OB, OC và d.

Ta có:

$$\vec{e} = \cos\alpha'.\vec{i} + \cos\beta.\vec{j} + \cos\gamma'.\vec{k}$$

với $\alpha' = e - 2 = \cos 2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma'$ (1)

Mà $\alpha, \beta, \gamma \le 90^0$ nên α bằng hay bù với α', $\cos^2\alpha' = \cos^2\alpha$. Tương tự đối với β, γ nên từ (1) $\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (2)

Do $S_{OAB} = S_{OBC} = S_{OCA} = \dfrac{a^2}{2}$, nên tổng diện tích hình chiếu các mặt tứ diện lên (P) là

$S = \dfrac{a^2}{2}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + S_{ABC}\cos\varphi$ với φ là góc hợp bởi (P) với (ABC).

Mà $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \sqrt{3(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)} = \sqrt{3}$ và $\cos\varphi \le 1$,

nên $S \le \sqrt{3}\dfrac{a^2}{2} + S_{ABC}$

S max khi $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$, $\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow$ (P) song song hay trùng với (ABC).

b) Từ (2) $\Rightarrow \cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cos^2\gamma = 0$ (3)

Giả sử $\alpha + \beta + \gamma \ge \pi$, $\dfrac{\pi}{2} \geqslant \gamma \geqslant \pi - (\alpha + \beta) \geqslant 0$

$\Rightarrow \cos\gamma \le \cos[\pi - (\alpha + \beta)] = -\cos(\alpha + \beta)$ (4)

nên từ (3) suy ra $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cos^2(\alpha + \beta) \ge 0$

$\Rightarrow 2\cos(\alpha + \beta)[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \ge 0$

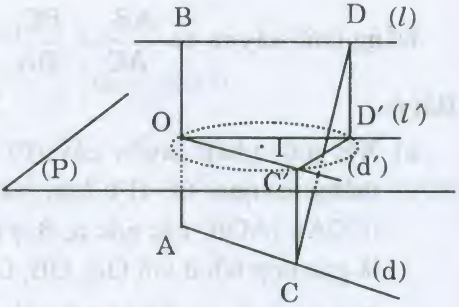
$\cos(\alpha + \beta)\cos\alpha.\cos\beta \ge 0$ (5)

Mà (4) $\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) \le -\cos\gamma < 0$.

Và $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$ nên (5) không thể xảy ra.

Suy ra $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Bài 7.



Gọi O là trung điểm của AB và I là tâm của mặt cầu. Thế thì $\widehat{IOA} = 90^0$, nên I ở trên mặt phẳng (P) qua O và vuông góc với AB và I cũng ở trên mặt phẳng (Q) vuông góc với AC và qua trung điểm của nó.

Gọi C′, D′ lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C, D đến mặt phẳng (P). Thế thì mặt phẳng (Q) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là trung trực của OC′. Suy ra I phải ở trên trung trực này.

Tương tự, I phải ở trên trung trực của OD′, vì thế nó phải là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OC′D′. Nhưng ta có:

$$CC' = DD' = OA,$$

từ đó $\quad CD'^2 = C'D'^2 + AB^2$

suy ra C′D′ có độ dài không đổi $\left|CD^2 - AB^2\right|$.

Góc C′OD′ cũng cố định, vì nếu ta lấy (d′) là đường thẳng song song với (d) và đi qua O rồi lấy (l′) là đường thẳng song song với (l) qua O, thì (d′) và (l′) đều ở trong mặt phẳng (P), C ở trên (d′) và D ở trên (l′).

Do đó $OI = \dfrac{C'D'}{2\sin C'OD'}$, nó là số không đổi.

Bài 8.

Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp ABCD. Ta có:

$$4R^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = (\vec{OG} + \vec{GA})^2 + \ldots + (\vec{OG} + \vec{GD})^2$$

(với G là trọng tâm tứ diện ABCD).

Do: $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$

$$\Rightarrow 4R^2 = 4\vec{OG}^2 + \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2 + \vec{GD}^2 + 2\vec{OG}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD})$$

$$\Leftrightarrow 4R^2 = 4OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + CD^2 \qquad (1)$$

Theo tính chất trọng tâm tứ diện:

$$GA = \frac{3}{4}m_a = AG_a;\ GB = \frac{3}{4}m_b$$

$$GC = \frac{3}{4}m_c;\ GD = \frac{3}{4}m_d$$

$$(1) \Leftrightarrow 4R^2 = 4OG^2 + \frac{9}{16}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)$$

$$\Rightarrow 4R^2 \geqslant \frac{9}{16}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)$$

Mặt khác theo B.C.S.

$$(m_a + m_b + m_c + d_d)^2 \leq 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)$$

$$\Rightarrow 4R^2 \geqslant \frac{9}{16}.\frac{1}{4}(m_a + m_b + m_c + m_d)^2$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{3}{16}(m_a + m_b = m_c + m_d)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} G \equiv O \\ m_a = m_b = m_c = m_d \end{cases}$

$\Rightarrow$ ABCD là tứ diện đều.

Bài 9.

Đặt $S = AB^2 + AC^2 + AD^2 = BC^2 + CD^2 + BD^2$

+ Ta có $AA'.AG = (AG + GA')AG = AG^2 + GA.GA'$

Mặt phẳng qua tâm O và AA′ cắt mặt cầu theo đường tròn lớn bán kính R.

Dễ thấy $GA.GA' = R^2 - OG^2$

Vì thế: $AA'AG = AG^2 + (R^2 - oG^2) \geq 2\sqrt{AG^2(R^2 - OG^2)}$

Hay $AA' \geq \sqrt{4R^2 - 4OG^2}$

+ Do G là trọng tâm tứ diện nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Từ đó

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 =$$

$$= (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA})^2 = (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC})^2 = (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OD})^2$$

$$= 4GO^2 + 4R^2 + 2GO(\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$= 4GO^2 + 4R^2 + 2\overrightarrow{GO}.4\overrightarrow{OG}\,4$$

Vậy $GA^2 + FB^2 + GC^2 + GD^2$

$$= 4R^2 + 4OG^2 - 8OG^2 = 4(R^2 - OG^2)(2)$$

+ Từ (1) và (2) ta được: $AA' \geq \sqrt{GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2}$

Dễ chứng minh

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$$

$$= \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2)$$

Như thế: $AA' \geq \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 + BD^2}$

$$\geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{6}(AB + AC + AD + BC + CD + BD)^2}$$

Thành thử $AA' \geq \dfrac{1}{2\sqrt{6}}(AB + AC + AD + BC + BD + CD)$

Tương tự, $BB' \geq \dfrac{1}{2\sqrt{6}}(AB + AC + AD + BC + BD + CD)$

$$CC' \geq \frac{1}{2\sqrt{6}}(AB + AC + AD + BC + BD + CD)$$

$$DD' \geq \frac{1}{2\sqrt{6}}(AB + AC + AD + BC + BD + CD)$$

* Cộng bốn bất đẳng thức trên ta có

$$AA' + BB' + CC' + DD' \geq \frac{2}{\sqrt{6}}(AB + AC + AD + BC + BD + CD)$$

+ Dấu đẳng thức xảy ra khi ABCD là tứ diện đều.

Bài 10.

$AM \cap BC = P$, $BM \cap AC = Q$, $CM \cap AB = R$.

Do định lí Xê–va ta có:

$$\frac{PM}{PA} + \frac{QM}{QB} + \frac{RM}{RC} = 1 \Rightarrow \frac{MA_1}{SA} + \frac{MB_1}{SB} + \frac{MC_1}{SC} = 1$$

Do góc tam diện S bằng góc tam diện M nên:

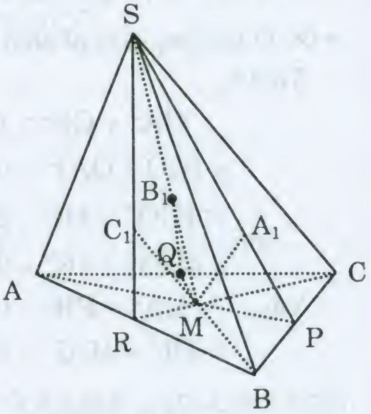
$$\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = \frac{MA_1}{SA} \cdot \frac{MB_1}{SB} \cdot \frac{MC_1}{SC}$$

$$\leq \left[\frac{1}{3}\left(\frac{MA_1}{SA} + \frac{MB_1}{SB} + \frac{MC_1}{SC}\right)\right]^3 = \frac{1}{27}$$

Do đó $V_{MA_1B_1C_1}$ lớn nhất

$$\Leftrightarrow \frac{MA_1}{SA} = \frac{MB_1}{AB} = \frac{MC_1}{SC} = \frac{1}{3}$$

Kết luận: M là trọng tâm tam giác ABC.



Bài 11.

Đặt $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, $z = \cos\delta \Rightarrow x = \dfrac{OH}{OA}$, $y = \dfrac{OH}{OB}$, $z = \dfrac{OH}{OC}$

Vì: $\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{OH^2} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$\Rightarrow 0 < x, y, z < 1$ do đó α, β, δ đều nhọn.

Ta có: $T = \dfrac{x + y}{z^2} + \dfrac{y + z}{x^2} + \dfrac{z + x}{y^2}$

Xét $(x+y+z)T = (x+y+z)\left(\frac{x+y}{z^2} + \frac{y+z}{x^2} + \frac{z+x}{y^2}\right)$

$$= \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \left(\frac{x+y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y+z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z+x}{y}\right)^2$$

$$\geq \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y}\right)^2$$

$$\geq 2 + 2 + 2 + \frac{1}{3}6^2 = 18 \qquad \text{(a)}$$

(Bất đẳng thức Cô–si và B.C.S).

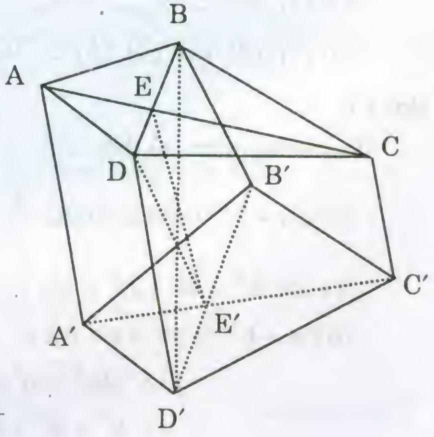
Ngoài ra: $0 < x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} = \sqrt{3}$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra $T \geq \frac{18}{\sqrt{3}}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow OA = OB = OC$.

Vậy T đạt GTNH bằng $\frac{18}{\sqrt{3}}$ khi tứ diện OABC vuông cân tại O.

Bài 12.



$\left.\begin{array}{l}\text{+ E là giao điểm của AC và BD} \\ \text{E là giao điểm của A′C và B′D}\end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ E′ là hình chiếu của E lên mp (P)

$\Rightarrow$ AA′ // BB′ // CC′ // EE′.

+ Tứ diện ABCD′ gồm hai tứ diện có chung đáy là ΔBD′E nên

$$V_{ABCD'} = V_{ABED'} + V_{CBED'}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABED'}.h_1 + \frac{1}{3}S_{\Delta BED'}.h_2$$

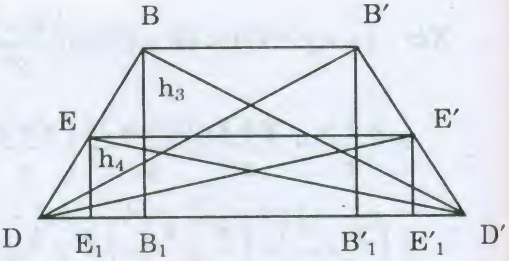
(Với $h_1 = AH$, $h_2 = CK$ trong đó $AH \perp (BED')$ và $CK \perp (BED')$

$$\Rightarrow V_{ABCD'} = \frac{1}{3}(h_1 + h_2)S_{\Delta BED'}. \qquad (1)$$

+ Tương tự tứ diện A′B′C′D gồm hai tứ diện có chung đáy là ΔB′E′D.

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}(h'_1 + h'_2)S_{AB'E'D}$$

(Với $h'_1 = A'H'$, $h'_2 = C'K'$ trong đó $A'H' \perp (B'E'D)$ và $C'K' \perp (B'E'D)$



+ Ta có $AA' \,//\, (BB'DD')$ và $CC' \,//\, (BB'DD')$

$\Rightarrow h'_1 = h_1$ và $h'_1 = h_2$

$$\Rightarrow V_{A'B'C'D} = \frac{1}{3}(h_1 + h_2).S_{AB'E'D} \qquad (2)$$

+ Ta cần chứng minh $D_{ABED'} = S_{AB'E'D}$

+ Vì $BB' \,//\, DD' \,//\, EE'$ nên vẽ BB_1, BB'_1, EE_1, $E'E'_1$ vuông góc với DD'.

$\Rightarrow B'B'_1 = BB_1 = h_3$, $EE_1 = E'E'_1 = h_4$.

+ Ta có $S_{ABED'} = S_{ABDD'} - S_{AEDD'} = \frac{1}{2}DD'.h_3 - \frac{1}{2}DD'.h_4$

$$S_{ABED'} = \frac{1}{2}(h_3 - h_4).DD' \qquad (3)$$

+ $S_{AB'E'D} = S_{AB'DD'} - S_{AE'DD'} = \frac{1}{2}DD'.h_3 - \frac{1}{2}DD'.h_4$

$$S_{AB'E'D} = \frac{1}{2}(h_3 - h_4).DD' \qquad (4)$$

Từ (3), (4) $\Rightarrow S_{ABED'} = S_{AB'E'D}$ (5)

Từ (1), (2), (3), (4), (5) $\Rightarrow V_{ABCD'} = S_{A'B'C'}$ (điều phải chứng minh).

Bài 13.

* Ta chứng minh hệ thức sau:

Nếu $a + b \geq 0$ thì ta được: $\frac{a^3 + b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$

Ta có: $a^2 - ab + b^2 \geqslant ab$ $(\forall a, b)$

Mà $a + b \geq 0 \Rightarrow 3(a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq 3ab(a + b)$

$$\Rightarrow 3(a^2 + b^3) \geqslant 3a^2b + 3ab^2$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3(a^3 + b^3) \geqslant a^3 + 3a^2b + 3aeè + b^3$$

$$\Rightarrow 4(a^2 = b^3) \geqslant (a + b)^3 \Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \quad (1)$$

$$\text{* Để ý: } \begin{cases} \cos\frac{A - B}{2} \geqslant 1 \\ \sin\frac{A + B}{2} = \cos\frac{C}{2} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \leqslant 2\cos\frac{C}{2} \qquad (2)$$

Áp dụng (1) ở phần trước ta được:

$$\left[\frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B}}{2}\right]^3 \leqslant \frac{\sin A + \sin B}{2} \leqslant \cos\frac{C}{2} \text{ do } (2)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B}}{2} \leqslant \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}} \qquad (3)$$

Tương tự, ta được: $\dfrac{\sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{2} \leqslant \sqrt[3]{\cos\dfrac{A}{2}}$ (4)

$$\frac{\sqrt[3]{\sin C} + \sqrt[3]{\sin A}}{2} \leqslant \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} \qquad (5)$$

Cộng (3), (4), (5) theo vế, ta được:

$$\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C} \le \sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow p \le 1$$

Dấu "=" trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow \cos\dfrac{A-B}{2} = \cos\dfrac{B-C}{2} = \cos\dfrac{C-A}{2} = 1$

$$\Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Bài 14.

Vì ABCD là tứ diện gần đầu nên trọng tâm của tứ diện trùng tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD. Do đó ta có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$$

OA = OB = OC = OF = R (bán kính mặt cầu ngoại tiếp ABCD)

Ta có: $MA = \dfrac{1}{R}\left|\overrightarrow{MA}\right|.\left|\overrightarrow{OA}\right| \geqslant \dfrac{1}{R}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OA} =$

$$= \frac{1}{R}(\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OA}).\overrightarrow{OA} = \frac{1}{R}\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA} + R$$

Tương tự: $MA \ge \dfrac{1}{R}\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB} + R$

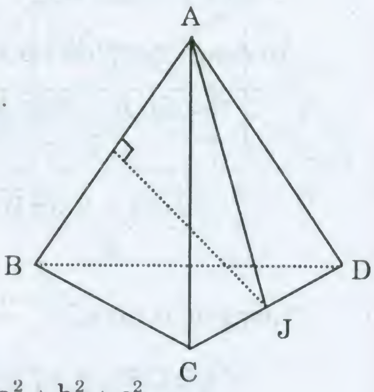
$$MC \ge \frac{1}{R}\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC} + R$$

$MD \ge \dfrac{1}{R}.\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD} + R$

Do đó: $MA + MB + MC + MD \ge \dfrac{1}{R}.\overrightarrow{MO}\underbrace{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})}_{0} + 4R = 4R$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M = O$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.



Ta có: $\Delta ACD = \Delta BCD$ (c – c – c)

$\Rightarrow AJ = JB \Rightarrow \Delta AJB$ cân tại $J \Rightarrow JI \perp AB$.

Ta có: $AJ^2 = \dfrac{b^2 + c^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$

$$\Rightarrow IJ^2 = AJ^2 - IA^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow OI^2 = \frac{b^2 + c^2}{8} - \frac{a^2}{8}$$

$$\Rightarrow OA^2 = OI^2 + IA^2 = \frac{b^2 + c^2}{8} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}$$

$$\Rightarrow R = OA = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$$

Vậy: $\text{Min}(MA + MB + MC + MD) = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)} \Leftrightarrow M = O$.

Bài 15.

Thể tích hình chóp $V = \dfrac{1}{3}hs_{ABCD} \Rightarrow h = \dfrac{3V}{S_{ABCD}}$ không đổi.

Xác định S chỉ cần xác định chân đường cao H.

Dựng $HM \perp AB$, $HN \perp BC$, $HP \perp DC$, $HQ \perp AD$.

Đặt $HM = x$, $HN = y$, $HP = z$, $HQ = t$.

$SH \perp (ABCD) \Rightarrow SM$ có hình chiếu $HM \forall AB \Rightarrow SM \perp AB$.

Tương tự $SN \perp BC$, $SP \perp DC$, $SQ \perp AD$

$$\Rightarrow S_{xq} = S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SDC} + S_{SAD}$$

$$= \frac{1}{2}(AB.SM + BC.SN + CD.SP + AD.SQ)$$

$$S_{xq} = \frac{1}{2}(a\sqrt{x^2 + h^2} + a\sqrt{y^2 + h^2} + a\sqrt{z^2 + h^2} + a\sqrt{t^2 + h^2}$$

$S_{xq} =$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{(ax)^2 + a^2h^2} + \sqrt{(ay)^2 + a^2h^2} + \sqrt{(az)^2 + a^2.h^2} + \sqrt{(at)^2 + a^2.h^2}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức hình học ta có:

$$S_{xq} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{(ax + ay + ax + at)^2 + (4ah)^2}\right)$$

Nếu điểm H nằm ngoài hình thoi ABCD thì

$$ax + ay + az + at > 2S_{ABCD}$$

Nếu điểm H nằm trong hình thoi ABCD hay ở trên cạnh hình

$$ax + ay + az + at = 2\,S_{ABCD}$$

Vậy $S_{xq} \geq \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{4S^2_{ABCD} + 16a^2h^2}\right).$

Dấu bằng xảy ra nếu và chỉ nếu H nằm trong hình thoi và

$$\frac{ax}{ah} = \frac{ay}{ah} = \frac{az}{ah} = \frac{at}{ah}.$$

$\Leftrightarrow x = y = z = t$

$\Leftrightarrow$ H là tâm đường tròn nội tiếp hình thoi.

$\Leftrightarrow$ H trùng với tâm O của hình thoi.

Vậy S_{xq} nhỏ nhất khi $SO \perp (ABCD)$ và $SO = h$.

Bài 16.

Gọi M′ và N′ lần lượt là hình chiếu vuông góc của M và N trên mặt phẳng (ABCD). P là giao điểm của (MN) và (M′N′). Ta có M′ thuộc cạnh BC, N′ thuộc cạnh AB và theo giả thiết $\widehat{MPM} = \alpha$. Không mất tính tổng quát, giả sử M gần mặt phẳng (ABCD) hơn, tức là $MM' < NN'$.

Ta có $MM' = BM'$, NN'

$= AN' = a - BN'$

$MN\cos\alpha = (PN - PM)\cos\alpha$

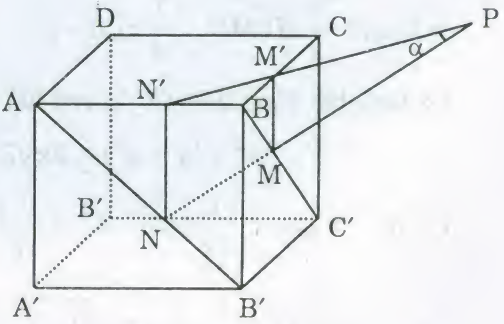
$= PN' - PM' = MN'$

$= \sqrt{BM'^2 + BN'^2}$ (1)

$MN\sin\alpha = (PN - PM)\sin\alpha$

$= NN' - MM' = M'N'$

$= a - (BM' = BN')$ (2)



Từ (1) và (2), ta được:

$$MN(\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha) = \sqrt{2(BM'^2 + BN'^2} + a - (BM' + BN')$$

$$\geq (BM' + BN') + a - (BM' + BN') = a$$

hay $MN \geq \dfrac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha} = \dfrac{a}{\sqrt{3}\sin(\alpha + \varphi)}$

$\left(\text{tg}\varphi = \sqrt{2},\ \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$BM' = BN' \Leftrightarrow B'M = B'N = BM'\sqrt{2}.$$

Do đó: $\begin{cases} MN\cos\alpha = BN'\sqrt{2} \\ MN\sin\alpha = -2BN' \end{cases} \Rightarrow BM' = BN' = \dfrac{a}{2+\sqrt{2}\text{tg}\alpha}$

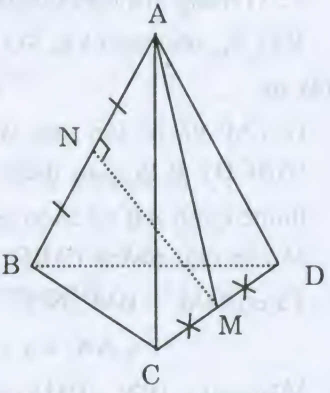
Vậy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $BM = B'N = \dfrac{a}{\sqrt{2}+\text{tg}\alpha}$.

Bài 17.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB, ΔACD và ΔBCD là các tam giác đều nên:

$$\begin{cases} AM \perp CD \\ BM \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABM)$$

$$V_{ABCD} = V_{CABM} + V_{DABM} = \frac{1}{3}S_{ABM}$$



Mặt khác: $AM = BM = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta AMB$ cân tại M

$\Rightarrow MN \perp AB$

$\Rightarrow MN^2 = AM^2 - AN^2 = \dfrac{3-x^2}{4}$

$\Rightarrow MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{3-x^2}$

$\Rightarrow S_{ABM} = \dfrac{1}{2}aB.MN = \dfrac{1}{4}x\sqrt{3-x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho hai số không âm x và $\sqrt{3-x^2}$:

$$x^2 + (x - x^2) \geq 2x\sqrt{3-x^2}$$

Ta có: $\quad V_{ABCD} = \dfrac{1}{12}x\sqrt{3-x^2} \leq \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{x^2+(3-x^2)}{2}\right) = \dfrac{1}{8}$

$$\text{Max}V = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \sqrt{3-x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$\Leftrightarrow MN = AN \Leftrightarrow \Delta AMB$ vuông cân tại $M \Leftrightarrow (ACD) \perp (BCD)$.

Bài 18.

Giả sử có $S_1(A.\ R_1)$, $S_2(B, R_2)$ và hình cầu nhỏ (D, r).

Hạ DE ⊥ AB.

S, A, B, E thẳng hàng và nằm trên trục của hình nón.

Các tâm của n hình cầu nhỏ tạo thành một đa giác đều phẳng n cạnh có tâm chính là E.

Ta có: $\dfrac{r}{DE} = \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \qquad (1)$

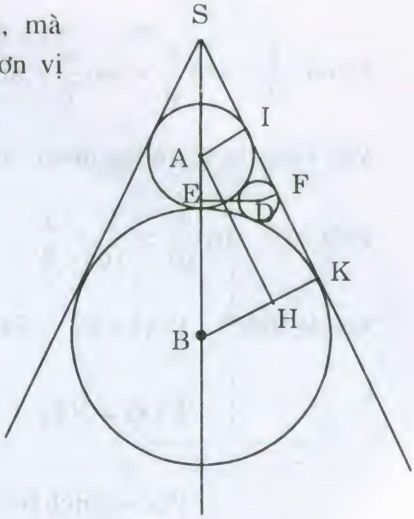
Áp dụng công thức Hê–rông trong ΔADB:

$$AB.DE = 2\sqrt{(R_1 + R_2 + r)R_1R_2r}$$

$$\Rightarrow DE^2 = \frac{4(R_1 + R_2 + r)R_1R_2r}{(R_1 + R_2)^2}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{DE^2}{r^2} = \dfrac{3(R_1 + R_2 + r)R_1R_2r}{r(R_1 + R_2)^2} = \dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$

Từ đây, để cho dễ dàng trong tính toán, mà không ảnh hưởng đến bài toán, ta chọn đơn vị sao cho: $R_1 + R_2 = 2$.



Ta có: $\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{n}\right)} = \left(1 + \dfrac{2}{r}\right)R_1R_2$

Gọi α là góc giữa trục hình nó và đường sinh của hình nón. Xét đường sinh đi qua S và tiếp điểm F của mặt cầu (D, r) với hính nón.

Ta có: $R_1 = AI = SA\sin\alpha;$

$R_2 = BK = SB\sin\alpha$

$\Rightarrow R_2 - R_1 = (R_1 + R_2)\sin\alpha = 2\sin\alpha$

$\Rightarrow R_1 = 1 - \sin\alpha;\ R_2 = 1 + \sin\alpha$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \left(1 + \frac{2}{r}\right)\cos^2\alpha \qquad (3)$$

Kẻ $AH \perp BK \Rightarrow AH = IF + FK$

$$\Rightarrow \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2} =$$

$$= \sqrt{(R_1 + r)^2 - (R_1 - r)^2} + \sqrt{(R_2 + r)^2 - (R_2 - r)^2} \text{ (Định lí Pi–ta–go)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4R_1R_2} = \sqrt{4R_1r} + \sqrt{4R_2r}$$

$$\Rightarrow \sqrt{r} = \frac{\sqrt{R_1R_2}}{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\cos^2\alpha}{2(1 + \sqrt{R_1R_2})} = \frac{\cos^2\alpha}{2(1 + \cos\alpha)} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \cos\alpha = -2 + \dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$.

Do $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < -2 + \dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{n}}$,1 là điều kiện cần và đủ để tồn tại α.

Từ đó ta có điều kiện của n là: $2 < \dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{n}} < 3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} < \sin\dfrac{\pi}{n} < \dfrac{1}{2}$

Ta có: $\dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} > \sin\dfrac{\pi}{7} > \sin\dfrac{\pi}{8} > \sin\dfrac{\pi}{9} > \sin\dfrac{\pi}{10} > 0$

Mặt khác, ta sẽ chứng minh: $\sin\dfrac{\pi}{9} > \dfrac{1}{3} > \sin\dfrac{\pi}{10}$.

Thật vậy: $\sin\dfrac{\pi}{10} > \dfrac{1}{10} < \dfrac{1}{3}$

Xét đa thức: $P(x) = 4x^3 - 3x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$P'(x) = 3(4x^2 - 1) < 0, \forall x \in \left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P(x) \text{ nghịch biến trên } \left(0;\ \dfrac{1}{2}\right).$$

Mà $P\left(\sin\dfrac{\pi}{9}\right) = 0 < P\left(\dfrac{1}{3}\right)$ và $0 < \sin\dfrac{\pi}{9}$, $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{2} \downarrow \sin\dfrac{\pi}{9} > \dfrac{1}{3}$.

Vậy n chỉ có thể lấy các giá trị 7, 8 hoặc 9.

Bài 19.

Lấy các điểm A_0, B_0, C_0, D_0 theo thứ tự trên các tia Ox, Oy, Oz, Ot sao cho $OA_0 = OB_0 = OC_0 = OD_0 = 1$ thì $A_0B_0C_0D_0$ là tứ diện đều có O là trọng tâm, nên:

$$\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OB_0} + \overrightarrow{OC_0} + \overrightarrow{OD_0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{OB}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{OC}.\overrightarrow{OC} + \frac{1}{OD}.\overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

- Ta có:

$$Ma = \frac{MA.OA}{OA} \geqslant \frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OA}}{OA} = \frac{(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).\overrightarrow{OA}}{OA} = \frac{1}{OA}.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MO} + OA$$

Tương tự: $MB \geq \dfrac{1}{OB}.\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{MO} + OB$

$$MC \geq \frac{1}{OC}.\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{MO} + OC$$

$$MD \geq \frac{1}{OD}.\overrightarrow{OD}\overrightarrow{MO} + OD$$

Từ đó:

$MA + MB + MC + MD$

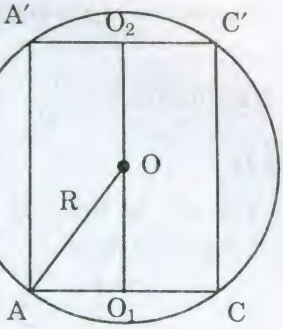
$$\geq \overrightarrow{MO}\left(\frac{1}{OA}.\overrightarrow{OA} + \frac{1}{OB}.\overrightarrow{OB} + \frac{1}{OC}.\overrightarrow{OC} + \frac{1}{OD}.\overrightarrow{OD}\right) + OA + OB + OC + OD$$

hay $\quad MA + MB + MC + MD \geq OA + OB + OC + OD$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv O$

Bài 20.

Hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ nội tiếp trong hình cầu S(O; R), cắt hình lập phương đó theo mặt phẳng chéo AA′C′C sẽ cắt mặt cầu theo đường tròn lớn qua tâm O (hình vẽ) và O là trung điểm của O_1O_2.



Ta có $O_1O_2 = AA'$.

Gọi x là độ dài cạnh hình lập phương.

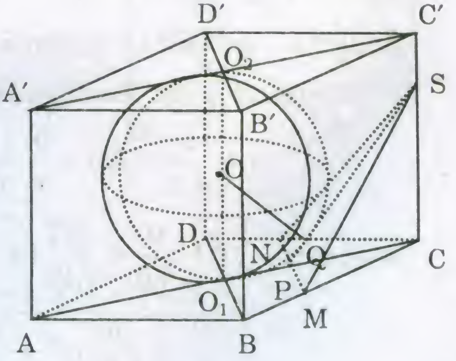
Xét tam giác OAO_1 vuông tại O_1, ta có

$$O_1A = \frac{x\sqrt{2}}{2};\ O_1O = \frac{O_1O_2}{2} = \frac{x}{2} \text{ và } OO_1^2 = O_1A^2 = OA^2$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{2x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}.$$

Do vậy độ dài cạnh của hình lập phương là $x = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Hình cầu $S_1(O; R_1)$ nội tiếp hình lập phương ABCD. A′B′C′D′ sẽ tiếp xúc với các mặt của hình lập phương tại tâm các mặt đó. Gọi M, N là trung điểm của hai cạnh liên BC và CD; và P là giao điểm của MN và AC. Mặt chéo AA′C′C cắt hình cầu S_1 theo đường tròn lớn. Qua P dựng tiếp tuyến PQ với đường tròn đó, PQ chéo dài cắt CC′ tại S. Vậy thiết diện là ΔSMN.



Ta có $\text{dt}\Delta SMN = \dfrac{\text{dt}\Delta CMN}{\cos\varphi}$ với $\varphi = \widehat{SPC}$.

Nhận thấy $\widehat{SPC} = O_1OQ$ vì cùng bù với góc $\widehat{O_1PQ}$.

Suy ra $\widehat{POO_1} = \dfrac{\varphi}{2}$ với $\text{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{O_1P}{OO_1} = \dfrac{\frac{x\sqrt{2}}{4}}{\frac{x}{2}}$ hay $\text{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\text{tg}\varphi = \dfrac{2\text{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 - \text{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$. Biết $\cos^2\varphi = \dfrac{1}{1 + \text{tg}^2\varphi} = \dfrac{1}{9}$

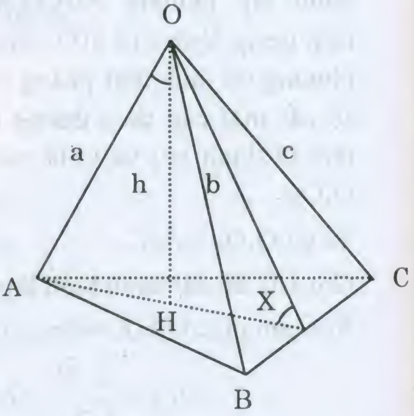
$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{3}$ (góc φ nhọn nên $\cos\varphi > 0$).

Vậy $\text{dt}\Delta SMN = \dfrac{3x^2}{8} = \dfrac{a^2}{2}$.

Bài 21.

(Với các kí hiệu đã ghi trên hình vẽ), ta chứng minh được:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \qquad (1)$$



Ta có $\cos x = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{h^2}{a^2}$

Tương tự $\cos^2 y = \dfrac{h^2}{b^2}$; $\cos^2 z = \dfrac{h^2}{c^2}$

Cộng từng vế có:

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{h^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1 \text{ (do (1))}$$

Suy ra $\sin^2 x = \sin^2 y + \sin^2 z = 2$.

Đặt $\sin^2 x = \alpha$; $\sin^2 y = \beta$; $\sin^2 z = \gamma$ lúc đó $\alpha, \beta, \gamma \in (0; 1)$ và $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta có:

$$\alpha + \frac{9}{4.\alpha} = \left|1.\alpha + \frac{9}{4}.\frac{1}{\alpha}\right| \leq \sqrt{\frac{97}{16}(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2})}$$

Tương tự có $\quad \beta + \dfrac{9}{4.\beta} \leqslant \sqrt{\dfrac{97}{16}(\beta^2 + \dfrac{1}{\beta^2})}$

$$\frac{9}{4.\gamma} \leqslant \sqrt{\frac{97}{16}(\gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2})}$$

Cộng từng vế ta được

$$E\frac{\sqrt{97}}{4} \geqslant a + \beta + \gamma + \frac{9}{4}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \geqslant 2 + \frac{9}{4}.\frac{9}{2} = \frac{97}{8}$$

Suy ra $E \geq \frac{\sqrt{97}}{2}$,

Dấu "=" chỉ xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{\alpha}{1} = \dfrac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{9}{4}} \\ \dfrac{\beta}{1} = \dfrac{\frac{1}{\beta}}{\frac{9}{4}} \\ \dfrac{\gamma}{1} = \dfrac{\frac{1}{\gamma}}{\frac{9}{4}} \\ \alpha = \beta = \gamma \\ a + \beta + \gamma = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{4}{9} \\ \beta^2 = \dfrac{4}{9} \\ \gamma^2 = \dfrac{4}{9} \\ \alpha = \beta = \gamma = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

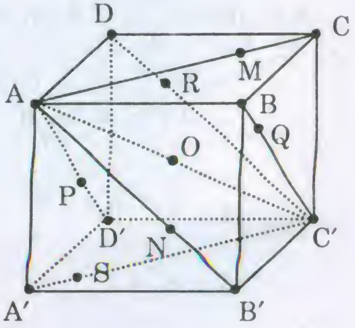
$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin x = \sin y = \sin z = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\Leftrightarrow x = y = z \approx 54^0 44'8''$

Vậy $\text{MinE} = \frac{\sqrt{97}}{2}$ với OABC là tứ diện vuông cân.

Bài 22.

Có thể xếp được hai tứ diện đều thoả mãn yêu cầu đề ra. Ta chỉ ra cách sắp xếp như sau:



Giả sử hình lập phương đã cho là ABCD.A′B′C′D′. Trên các đoạn AC, AB′, AD′ lần lượt lấy M, N, P sao cho:

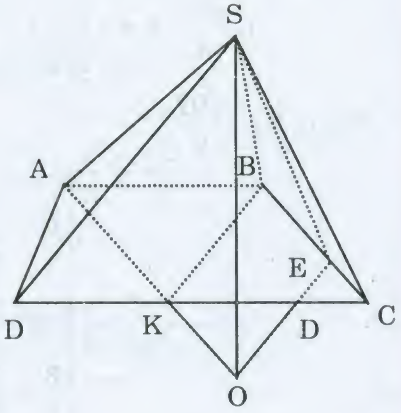
$$AM = AN = AP = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

Khi đó AMNP là tứ diện đều cạnh $\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

Tương tự, trên C′B, C′D, C′A′ lần lượt lấy Q, R, S sao cho:

$$C'Q = C'R = C'S = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

Bài 23.



$OK = x$, $OA = 4x$

$AK = BK = 4x - x = 3x$

$OB = \sqrt{(3x)^2 - x^2} = 2x\sqrt{2}$

Đặt $\widehat{ABO} = \beta$

$$\Rightarrow \sin\beta = \frac{OA}{AB} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\widehat{OBE} = \varphi = 180^0 - \alpha - \arcsin\beta.$$

kẻ $OE \perp BC$, $OE = OB\sin\varphi$

$\Rightarrow SE \perp BC$

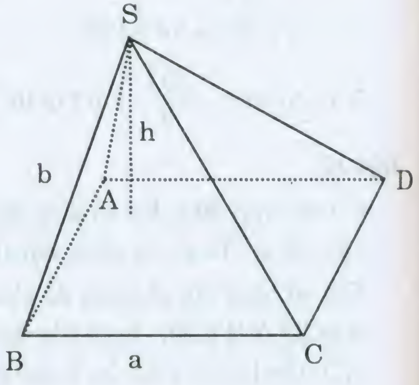
$\Rightarrow ((SBC),(ABCD)) = \widehat{SEO}$

$$tg\widehat{SEO} = \frac{SO}{OE} = \frac{h}{OB\sin(\alpha + ar\sin\beta)}$$

Mà $AB = a = 2x\sqrt{6} \Rightarrow x = \frac{a}{2\sqrt{6}} \Rightarrow OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $tg\widehat{SEO} = \frac{3h}{a\sqrt{3}\sin(\alpha + \arcsin\beta)}$.

Bài 24.



Gọi a, b, h, S lần lượt là cạnh đáy, cạnh bên, chiều cao, diện tích toàn phần.

Theo giả thiết ta có a, b, $S \in \mathbb{N}^*$ và:

$$b = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}, V = a^2h \Rightarrow a^2h = 2004$$

$$S = a^2 + 2a\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \in \mathbb{N}^*$$

Đặt $\begin{cases} x = 2a^2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \in \mathbb{N}^* \\ y = a^3 \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Ta có: $x^2 - y^2 = 4a^4\left(h^2 + \frac{a^2}{4}\right) - a^6 = 4a^4h^2 = 4008^2 \Rightarrow x^2 - y^2$ chính phương.

$x^2 + y^2 = 4h^2a^4 2a^6 = (2a^2b)^2 \Rightarrow x^2 + y^2$ chính phương (do $2a^2b \in \mathbb{N}^*$).

Do không tồn tại hai số tự nhiên, x, y thoả $x^2 + y^2$ va2 $x^2 - y^2$ là chính phương.

Vậy không tồn tại một hình chóp thỏa mãn đề bài.

Bài 25.

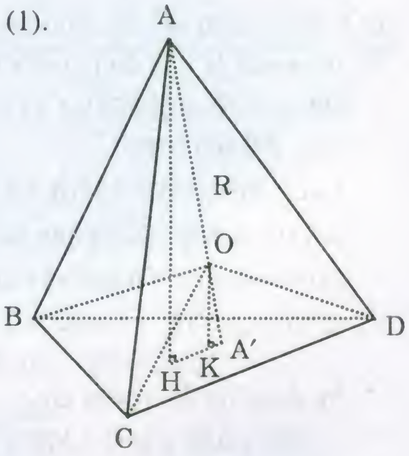
- Gọi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là các vectơ chỉ phương của các đường thẳng chứa các cạnh của góc tam diện, suy ra $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đôi một trong cùng phương. Theo giả thiết nên các số sau có ít nhất hai số khác 0.

  $\alpha = \vec{a},\ \vec{b},\ \beta = \vec{h},\ \vec{c},\ \gamma = \vec{c},\ \vec{a}$

- Các vectơ sau: $\vec{n} = \beta\vec{a} - \gamma\vec{b}$, $\vec{m} = \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$, $\vec{p} = \alpha\vec{c} - \beta\vec{a}$ (*) khác $\vec{0}$. Ta có $\vec{n}.\vec{c} = \vec{m}.\vec{a} = \vec{p}.\vec{b} = 0$ Các véc tơ $\vec{n}$, $\vec{m}$, $\vec{p}$ khác $\vec{0}$ và đồng thời chúng là các vectơ chỉ phương của các mặt của tam diện, nên chúng là các vectơ chỉ phương của các đường thẳng kẻ từ đỉnh của tam diện vuông góc với các cạnh nằm trong các mặt bên không chứa các cạnh ấy.
- Từ (*) $\Rightarrow$ $\vec{n} + \vec{m} + \vec{p} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ các vectơ $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ đồng phẳng $\Rightarrow$ các đường thẳng nói trên cùng song song với một mặt phẳng chung, mà chúng cùng đi qua một điểm $\Rightarrow$ các đường thẳng này cùng nằm trong một mặt phẳng.

Bài 26.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và O trên (BCD).



Ta có: $\dfrac{V_{OBCD}}{V_{ABCD}} = \dfrac{OK}{AH} = \dfrac{OA'}{AA'}$ (1).

Tương tự $\dfrac{V_{OCDA}}{V_{ABCD}} = \dfrac{OB'}{BB'}$ (2)

$$\frac{V_{ODAB}}{V_{ABCD}} = \frac{OC'}{CC'} \quad (3)$$

$$\frac{V_{OABC}}{V_{ABCD}} = \frac{OD'}{DD'} \quad (4)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3), (4):

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AA' - R}{AA'} + \frac{BB' - R}{BB'} + \frac{CC' - R}{CC'} + \frac{DD' - E}{DD'} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'} = \frac{3}{R} \quad 1)$$

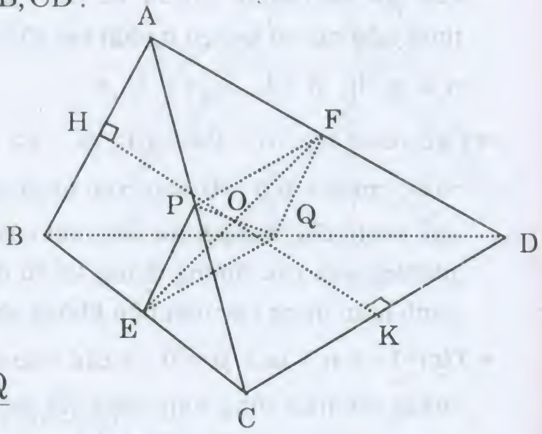
Theo bất đẳng thức Cô–si:

$$(AA' + BB' + CC' + DD')\left(\frac{1}{AA'} + \frac{1}{BB'} + \frac{1}{CC'} + \frac{1}{DD'}\right) \geq 16$$

$$\Rightarrow AA' + BB' + CC' + DD' \geq \frac{16R}{3}.$$

Bài 27.

a) $V = \frac{1}{6}AB.CD.\text{đ}AB, CD).\sin\widehat{AB, CD}$.



Gọi H, K, E, F, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.

Chứng minh HK là đoạn vuông góc chung của AB, CD $\Rightarrow$ d(AB, CD) = HK.

+ Chứng minh tứ giác EPFQ là hình thoi.

$$\Rightarrow \sin(\widehat{AB, CD}) = \frac{2.EF.PQ}{a^2}$$

Tính: HK, EF, PQ

$$\Rightarrow V = \frac{\sqrt{2}}{12}.\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}.$$

b) Chứng minh bổ đề: Nếu đoạn AB song song hoặc chứa trong mặt phẳng (α) và M là một điểm tuỳ ý trong mặt phẳng (α) thì:

MA + MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M = M_1 (M_1 là hình chiếu của trung điểm H của đoạn AB lên (α)).

Ta có: $MA + MB \geq M_1A + M_1B$

Gọi (α) là mặt phẳng qua M, song song với AB và CD. Ta có:

(α) vuông góc với HK và (α) cắt HK tại M_1

$$\Rightarrow M_1 = \underset{(\alpha)}{hc}(H) = \underset{(\alpha)}{hc}(K) = \underset{(HK)}{hc}(M)$$

Áp dụng bổ đề trên ta có:

$$MA + MB + MC + MD \geq M_1A + M_1B + M_1C + M_1D \qquad (1)$$

Gọi $O = \underset{(EF)}{hc}(M_1)$ ta được O là giao điểm của hai đường chéo HK, EF của hình thoi HFKE

$$\Rightarrow M_1A + M_1B + M_1C + M_1D \geq OA + OB + OC + OD \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$MA + MB + MC + MD \geq OA + OB + OC + OD = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Vậy MA + MB + MC + MD nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là trung điểm của đoạn HK và $\min(MA + MB + MC + MD) = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Bài 28.

Gọi G là trọng tâm tứ diện. Đặt $d = OG$, $0 \le d < \mathbb{R}$. Ta có:

$$S = 4GM^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2,\ \forall M \in \mathbb{R}^3$$

Cho $M \equiv O \Rightarrow 4R^2 = 4.OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$

$$\Rightarrow S = 4[(R^2 - d^2) + GM^2],\ \forall M \in S(O, R)$$

Mặt khác có: $R - d = OM - GO \le GM \le OM + OG = R + d$

$$\Rightarrow (R - d)^2 \le GM^2 \le (R + d)^2$$

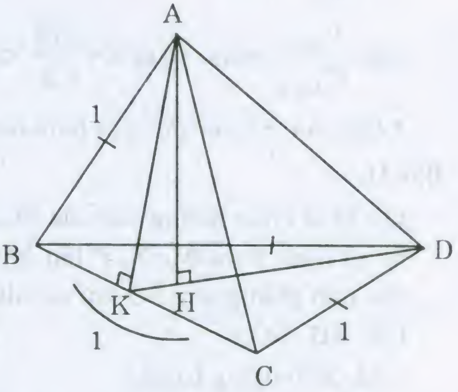
Nếu $GM = R \Leftrightarrow d = 0 \Leftrightarrow G \equiv O \Leftrightarrow ABCD$ là tứ diện gần đều:

lúc đó $s = 8R^2$, $\forall M \in S(O; R)$.

Nếu $GM \ne R \Leftrightarrow d \ne 0 \Leftrightarrow ABCD$ là tứ diện gần đều thì

$S_{max} = 4[(R^2 - d^2) + (r - d)^2] = 8R(R - d)$ khi M là giao điểm của tia OG với mặt cầu (G thuộc đoạn OM).

Bài 29.



+ Xét tứ diện có năm cạnh bằng 1 và cạnh còn lại bằng a tuỳ ý. Ta có thể tích của tứ diện này là $V_1 < \frac{1}{8}$.

Thật vậy:

$$V_1 = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.AH < \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.AK = \frac{1}{8}$$

+ Dễ nhận thấy tứ diện thoả mãn đề bài có thể tích nhỏ hơn V_1, suy ra điều phải chứng minh.

Bài 30.

* Đặt $a = AB$, $h = SH$ (H là tâm ABC). Tính được $tg\beta = 2tg\alpha$;

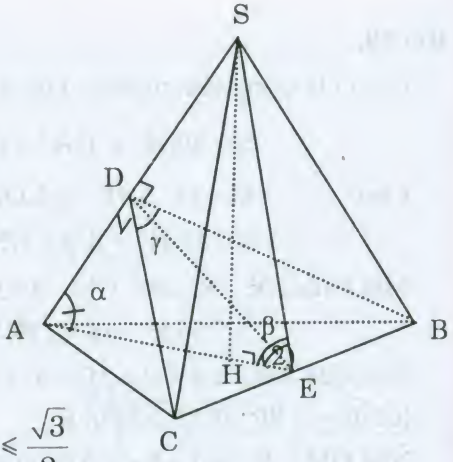
$$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}\sin\alpha} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{2\sqrt{3}\sin\alpha}{1 + 3\sin^2\alpha}$$

* $\alpha + \gamma \ge 2\beta \Leftrightarrow 2\beta - \alpha - \gamma \Leftrightarrow \sin(2\beta - \in) \le \sin\gamma$

$$\Leftrightarrow \frac{2tg\beta}{1 + tg^2\beta}.\cos\alpha - \frac{1 - tg^2\beta}{1 + tg^2\beta}.\sin\alpha \leqslant \frac{2\sqrt{3}\sin\alpha}{1 + 3\sin^2\alpha}$$

$$tg^2\alpha \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

* $AD = a\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$;



$SD = SA - AD$

$$= \frac{a\sqrt{3}}{3\cos\alpha} - \frac{a\sqrt{3}.\cos\alpha}{2}$$

$$= \frac{a\sqrt{3}(2 - 3\cos^2\alpha)}{6\cos\alpha} \ldots$$

D thuộc đoạn SA khi $\cos^2\alpha < \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow tg^2\alpha > \frac{1}{2} \ldots$

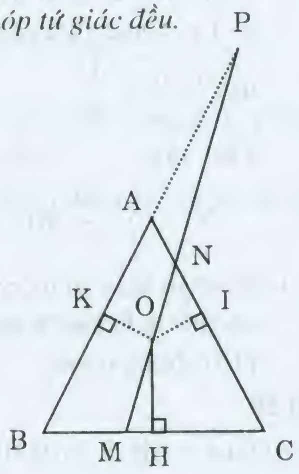
Vậy điều kiện của bài toán là: $\frac{1}{2} < tg^2\alpha \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

$* \ \frac{V_{SBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{SD}{AD} = \ldots = \frac{2}{3}tg^2\alpha - \frac{1}{3} \leqslant \frac{\sqrt{3}-1}{3}$

Vậy $\frac{V_{SBCD}}{C_{ABCD}}$ max $\Leftrightarrow tg^2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \gamma = 2\beta \Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$ là cấp số cộng.

** Chi chú: Có thể đưa bài toán tương tự cho hình chóp tứ giác đều.*

Bài 31.



Gọi O là chân đường cao của tứ diện đều SABC hạ từ định S và M, N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng qua SO với các đường thẳng BC, CA, AB. Ta có:

+ M, N, P thẳng hàng,

+ Do α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi các đoạn SM, SN, SP với các hình chiếu của chúng: OM, ON, OP trên mp(ABC) nên:

$$tg\alpha = \frac{SO}{OM};\ tg\beta = \frac{SO}{ON};\ tg = \frac{SO}{OP}$$

+ Đường cao $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ (với a là cạnh của tứ diện đều SABC).

Do đó $tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2} = \frac{18}{a^2}$ (*)

Vì O nằm trong tam giác nên M, N, P nằm về hai phải của O. Không mất tính tổng quát, ta giả sử M ở về một phía, còn N và P ở về phía kia đối với O (N và P có thể trùng A). Kẻ OH ⊥ BC, OI ⊥ AC, OK ⊥ AB.

Gọi $\varphi_1 = \widehat{HOM}; \varphi_2 = \widehat{ION};\ \varphi_3 = \widehat{KOP}$.

Do $OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos\varphi_1}, ON = \dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos\varphi_2},\ OP = \dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos\varphi_3}$

Và $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 120^0$, $\varphi_1 + \varphi_2 = 60^0$ nên $\varphi_2 = 60^0 - \varphi_1$, $\varphi_3 = 60^0 + \varphi_1$

Do đó

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{OP^2} = \frac{12}{a^2}[(\cos^2\varphi_1 + \cos^2(60^0 - \varphi_1) + \cos^2(60^0 + \varphi_1)] = \frac{18}{a^2}$$

(Vì $\cos^2\varphi_1 + \cos^2(60^0 - \varphi_1) + \cos^2(60^0 + \varphi_1) =$

$$= \frac{1}{2}[1 + \cos 2\varphi_1 + 1 + \cos(120^0 - 2\varphi_1) + 1 + \cos(120^0 - 2\varphi_1)]$$

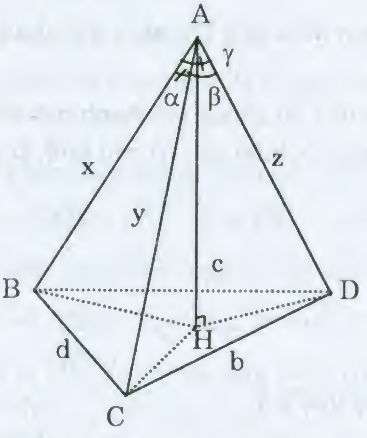
$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\cos 2\varphi_1 + 2\cos 120^0.\cos 2\varphi_1\right] = \frac{3}{2})$$

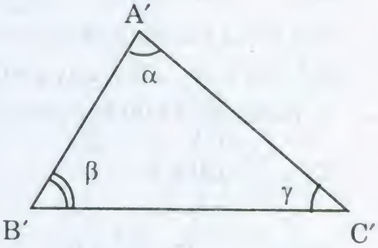
Vậy (*) được chứng minh nên bài toán đã cho được chứng minh.

Bài 32.

Đặt: $AB = x$, $AC = y$, $AD = z$, $BC = d$, $CD = b$, $BD = c$

$\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{CAD} = \beta$, $\widehat{DAB} = \gamma$





Theo giả thiết: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

$$dt(ABC) = dt(ABD) = dt(ACD)$$

$$\Rightarrow xy\sin\alpha = yz\sin\beta = xz\sin\gamma = 2S$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{z} = \frac{\sin\beta}{x} = \frac{\sin\gamma}{y} \qquad (1)$$

Xét tam giác A′B′C′ có $\hat{A}' = \alpha$, $B'C' = z$, $\hat{B}' = \beta$, $\hat{C}' = \gamma$

Theo định lí hàm số sin: $\dfrac{\sin\alpha}{z} = \dfrac{\sin\beta}{A'C'} = \dfrac{\sin\gamma}{A'B'}$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow A'C' = x$, $A'B' = y$

$$\Rightarrow \Delta A'B'C' = \Delta ABC \Rightarrow d = z$$

Tương tự $b = x$, $c = y$.

Vậy ABCD là tứ diện gần đều.

Gọi $H = hcA/(BCD)$, ta có:

$$\cos u = \frac{dt(HBC)}{dt(ABC)},\ \cos v = \frac{dt(HBD)}{dt(ABD)},\ \cos\omega = \frac{dt(HCD)}{dt}(ACD)$$

$$\Rightarrow \cos u + \cos v + \cos\omega = \frac{dt(HBC) + dt(HBD) + dt(HCD)}{dt(BCD)} = 1$$

Theo BĐT Bu-nhi-a-côp-xki:

$$\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 \omega \geqslant \frac{1}{3}(\cos u + \cos v + \cos\omega)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin^2 u) + (1 - \sin^2 v) + (1 - \sin^2 \omega) \geqslant \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 u + \sin^2 v + \sin^2 \omega \leqslant \frac{8}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi tứ diện ABCD là tứ diện đều.

Bài 33.

Trong tất cả các hình cầu đã cho ta chọn hình cầu lớn nhất. Gọi bán kính của hình cầu này là R_1.

Xét tất cả các hình cầu giao với hình cầu này thì chúng tạo thành một hình cầu có thể tích là V_1. Hình này có thể chứa trong một hình cầu có bán kính là $2R_1$ và do số hình cầu là hữu hạn nên ta có:

$$V_1 < \frac{4}{3}\pi(3R_1)^3$$

Do đó: $\frac{1}{27}V_1 < \frac{4}{3}\pi R_1^3$ (1)

nếu $V_1 = 27$ thì hình cầu lớn nhất có thể tích > 1 (*)

nếu $V_1 < 27$ thì ta bỏ tất cả các hình cầu vừa xét và ta xét các hình cầu còn lại. Trong các hình cầu còn lại ta xét hình cầu lớn nhất. Giả sử bán kính của nó là R_2 ta lại được

$$\frac{1}{27}V_2 < \frac{4}{3}\pi R_2^2 \qquad (2)$$

Lí luận như trên ta có: $\frac{1}{27}V_3 < \frac{4}{3}\pi R_3^3$ (3)

....

$$\frac{1}{27}V_m < \frac{4}{3}\pi R_m^3 \qquad (m)$$

Do số hình cầu là hữu hạn nên sau m hữu hạn bước chọn các hình cầu đã cho đều được xét hết.

Cộng (1), (2), ..., (m) và kết hợp với (*) thì bài toán được chứng minh.

Bài 34.

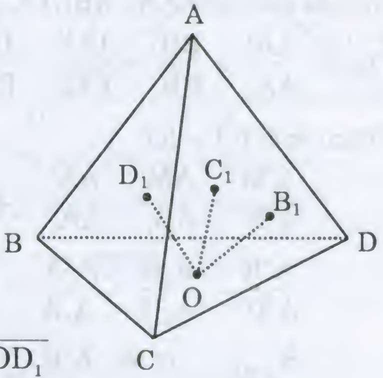
Ta có: $OB_1 \,//\, BA \Rightarrow OB_1$; BA cùng tạo với (ACD) một góc bằng nhau

$$\Rightarrow \frac{OB_1}{BA} = \frac{d(O;\ ACD)}{d(B;\ ACD)} = \frac{V_{O.ACD}}{V_{B.ACD}} = \frac{V_{O.ACD}}{V_{ABCD}}$$

Tương tự:

$$\Rightarrow \frac{OC_1}{CA} = \frac{V_{O.ABD}}{V_{ABCD}};\ \frac{OD_1}{DA} = \frac{V_{O.ABC}}{V_{ABCD}}$$

Nên: $\frac{OB_1}{AB} + \frac{OC_1}{AC} + \frac{OD_1}{AD} = 1$



Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{OB_1}{AB} + \frac{OC_1}{AC} + \frac{OD_1}{AD} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{OB_1.OC_1.OD_1}{AB.AC.AD}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OB_1.OC_1.OD_1}{AB.AC.AD} \leqslant \frac{1}{27} \Leftrightarrow OB_1.OC_1.OD_1 \leqslant \frac{54081}{27}$$

$$\Leftrightarrow OB_1.OC_1.OD_1 \leq 2003$$

Đẳng thức xảy ra khi O là trọng tâm tam giác BCD.

Bài 35.

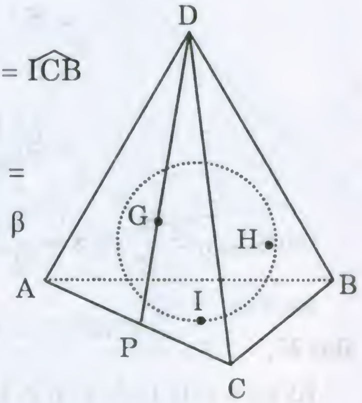
Vì I là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC nên

$\alpha = \widehat{IAB} = \widehat{IAC}$; $\beta = \widehat{IBC} = \widehat{IBA}$; $\gamma = \widehat{ICA} = \widehat{ICB}$

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\Delta IAC = \Delta GAC$; $\Delta IBC = \Delta HBC$ suy ra $\alpha = \widehat{GAC}$; $\beta = \widehat{HBC}$; $\gamma = \widehat{GCA} = \widehat{HCB}$. Trong tam giác ABC ta có: $\alpha + \beta + \gamma = 90^0$, suy ra trong ΔBCD ta có

$\alpha = \widehat{HBD} = \widehat{HCD}$, $\beta = \widehat{HDC}$; $\gamma = \widehat{HDB}$

Mặt khác $\Delta HCD = \Delta GCD$ suy ra $\alpha = \widehat{GCD}$, $\beta = \widehat{GDC}$.



Gọi P là trung điểm của AC ta có $\widehat{OGC} = \alpha + \beta$ suy ra $\widehat{GPC} = 180^0 - (\alpha + \beta + \gamma) = 90^0$.

Vậy DP là đường cao vừa là đường trung tuyến của ΔDAC. Vậy ΔDAC cân đỉnh D suy ra ΔGAC cân đỉnh G. Từ đó $\alpha = \gamma$ nghĩa là $\widehat{HCD} = \widehat{HCB}$ kéo theo CH là phân giác của góc DCB. Từ đó ΔDCB cân ở C, vậy CB = CD. Mặt khác ΔABC cân ở B nên BA = BC. Vậy DA = DC = BA. Mặt khác d $\alpha = \gamma$

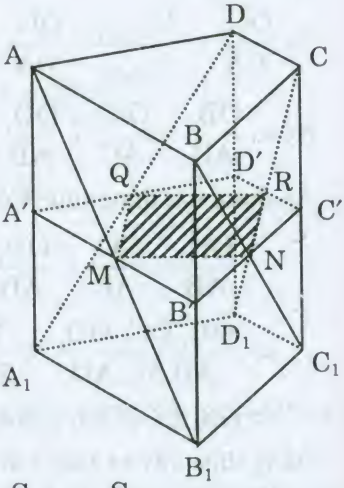
nên $\widehat{GCA} = \widehat{GCD}$ vậy ΔCAD cân ở C, ngoài ra ΔCAD còn cân ở D nên là tam giác đều suy ra $\beta = 30^0$. Chứng minh tương tự $\alpha = \gamma = 30^0$ vậy ΔABC và ΔBCD đều suy ra 6 cạnh của tứ diện bằng nhau.

Vậy ABCD là tứ diện đều.

Bài 36.

(P) cắt các cạnh AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 tại A', B', C', D'.

Ta có $\dfrac{AA'}{AA_1} = \dfrac{BB'}{BB_1} = \dfrac{CC'}{CC_1} = \dfrac{DD'}{DD_1} = x$. Gọi $S = S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'}$.



Theo định lí Ta–lét

$$\frac{A'M}{A'B'} = \frac{AM}{AB_1} = \frac{AA'}{AA_1} = x;$$

$$\frac{A'R}{A'D'} = \frac{A_1R}{A_1D} = \frac{A_1A'}{A_1A} = 1 - x$$

$$\Rightarrow \frac{S_{A'MR}}{S_{A'B'D'}} = \frac{A'M}{A'B'}.\frac{A'R}{A'D'} = x(1-x) \qquad (1)$$

Tương tự, $S_{B'MN} = x(1-x)S_{B'A'C'}$;

$$S_{C'NQ} = x(1-x)S_{C'B'D'};$$

$S_{D'QR} = x(1-x)S_{D'C'A'}$. Suy ra

$$\begin{aligned} S_{MNRQ} &= S_{A'B'C'D'} - S_{A'MR} - S_{B'MN} - S_{C'NQ} - S_{D'QR} \\ &= S - x(1-x)[S_{A'B'D'} + S_{B'A'C'} + S_{C'B'D'} + S_{D'C'A'}] \\ &= S - 2x(1-x)S = S(1 - 2x + 2x^2) \\ &= S\left[\frac{1}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right] \geqslant \frac{S}{2} \end{aligned}$$

$\min S_{MNRQ} = \dfrac{S}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow A'$ là trung điểm $AA_1 \Leftrightarrow$ (P) song song cách đều hai đáy.

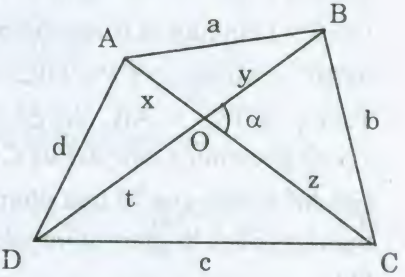
Bài 37.

Kí hiệu a, b, c, d, x, y, z, t lần lượt là độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, OA, OB, OC, OD và $\alpha = \widehat{BOC}$.

Ta có: $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_4}$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y+a}{xy\sin\alpha} + \frac{z+t+x}{zt\sin\alpha} = \frac{y+z+b}{yz\sin\alpha} = \frac{x+t+d}{xt\sin\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{a}{xy}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{c}{zt}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{b}{yz}+\frac{1}{x}+\frac{1}{t}+\frac{d}{xt}$$



$$\Leftrightarrow \frac{a}{xy}+\frac{c}{zt}=\frac{b}{yz}+\frac{d}{xt}$$

$\Leftrightarrow axt + cyx = bxt + dyz$

$\Leftrightarrow (azt + cyx)^2 = (bxt + dyz)^2$

$\Leftrightarrow a^2z^2t^2 + c^2y^2x^2 + 2acxyzt$

$= b^2x^2t^2 + d^2y^2z^2 + 2bdxtzt$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha)z^2t^2 + (z^2 + t^2 + 2zt\cos\alpha)x^2y^2 + 2acxyzt =$

$= (y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha)x^2t^2 + (x^2 + t^2 - 2xt\cos\alpha)y^2z^2 + 2bdxtzt$

$\Leftrightarrow 2zt\cos\alpha 2xy\cos\alpha + 2ax = -2xt\cos\alpha - 2yz\cos\alpha + 2bd$

$\Leftrightarrow (c^2 - z^2 - t^2) + (a^2 - x^2 - y^2) + 2ac$

$= (d^2 - x^2 - t^2) + (b^2 - y^2 - z^2) + 2bd$

$\Leftrightarrow (a + c)^2 = (b + d)^2 \Leftrightarrow a + c = b + d$

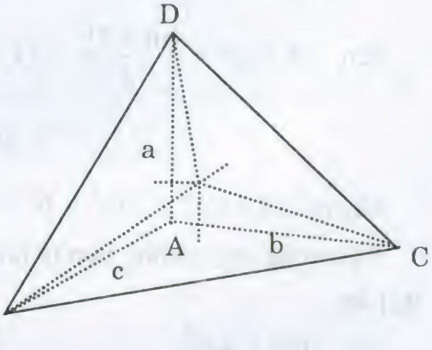
$\Leftrightarrow$ ABCD là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn.

Bài 38.

Giả sử AB = c; AC = b. Gọi h là chiều cao xuất phát từ A.

Ta chứng minh $h \le \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Thật vậy, dễ dàng chứng minh khi a = b = c thì $h = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ và nếu b < a hay c < a thì $h < \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.



Gọi O là tâm của hình cầu nội tiếp tứ diện và V là thể tích ta có:

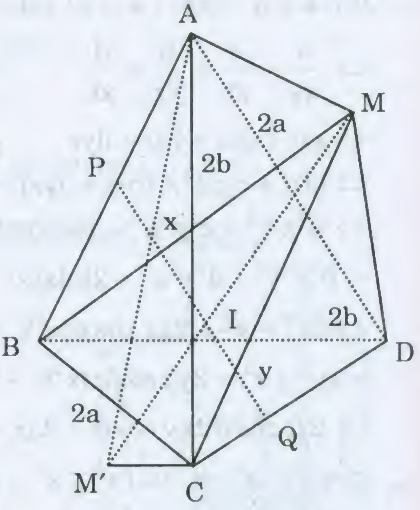
$$\frac{V(OABC) + V(OACD) + V(OABD) + V(OBCD)}{V(ABCD)} = 1$$

$$\frac{r}{b}+\frac{r}{c}+\frac{r}{a}+\frac{r}{h} = 1 \geqslant \frac{3r}{a}+\frac{r}{h} \geqslant \frac{3r}{a}+\frac{r\sqrt{3}}{a}$$

$$1 \ge \left(\frac{3+\sqrt{3}}{a}\right)r$$

Suy ra điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi a = b = c.

Bài 39.



Đặt AB = m, CD = n $\Rightarrow$ $mn = 4c^2$

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD.

$\Delta ABC = \Delta BAD \Rightarrow CP = DP \Rightarrow PQ \perp CD$

Tương tự $PQ \perp AB$, do đó PQ là đường vuông góc chung của AB và CD.

Gọi M′ là ảnh của M qua phép đối xứng trục $Đ_{PQ}$ và I là giao điểm của MM′ và PQ.

Ta có: $f(M) = (MA\ \ M'A + MC + M'C)^2$
$\geq (2AI + 2CI)^2$

hay $f(M) \geq 4(AI + CI)^2$

Đặt IP = x, IQ = y.

Nếu I nằm trong đoạn PQ thì PQ = x + y, ta có:

$$AI + CI = \sqrt{x^2 + \frac{m^2}{4}} + \sqrt{y^2 + \frac{n^2}{4}} \geqslant \sqrt{(x+y)^2 + \frac{(m+1)^2}{4}}$$

(Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki)

mà $\frac{1}{4}m^2 = BQ^2 - PQ^2 = BQ^2 - (x+y)^2$

nên $$(x+y)^2 + \frac{(m+1)^2}{4} = (x+y)^2 + \frac{1}{4}(m^2 + n^2) + \frac{mn}{2}$$
$$= BQ^2 =+ \frac{1}{4}n^2 + \frac{mn}{2} = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$$

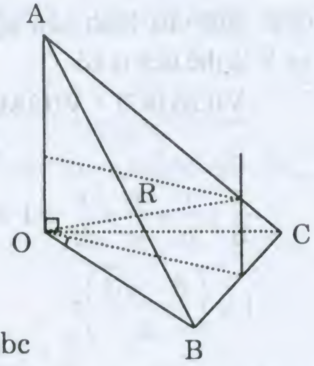
Suy ra $(AI + CI)^2 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$ và $f(M) \geq 8(a^2 + b^2 + c^2)$

Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có $f(M) \geq 8(a^2 + b^2 + c^2)$

Bài 40.

Đặt OA = a,
OB = b,
OC = c

$\Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



$$r = \frac{3V}{S\beta TP} = \frac{\frac{1}{2}abc}{\frac{1}{2}(ab + bc + ca) + \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

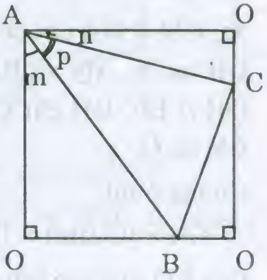
$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{2abc}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} \geqslant \frac{(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + \sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}})\sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}}{2abc} = \frac{3\sqrt{3} + 3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c $\Rightarrow$ OABC là tứ diện vuông cân.

Bài 41.

Khai triển diện tích toàn phần của hình chóp xếp lại, ta được một hình vuông.



Khi đó $m + n + p = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ tgm.tgn + tgn. tgp + tgm.tgp = 1

Mà $(tgm - tgm)^2 + (tgn - tgp)^2 + (tgp - tgm)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow tg^2m + tg^2n + tg^2p \geq$ tgm.tgn.tgp + tgp.tgm = 1

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ tgm = tgn = tgp $\Leftrightarrow m = n = p = \frac{\pi}{6}$.

Lúc đó $OB = OC = OA.\frac{\sqrt{3}}{3}$: Vô lí vì OB + OC = OA.

Vậy: $tg^2n + tg^2p > 1$.

Bài 42.

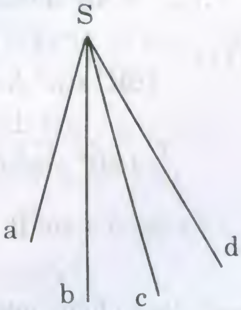
Gọi A, B, C, D lần lượt thuộc Sa, Sb, Sc, Sd và $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ lần lượt là các vectơ đơn vị thuộc Sa, Sb, Sc, Sd.

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mp(Sac)

$\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ đồng phẳng với $\vec{e}_2$, $\vec{e}_4$

$\Leftrightarrow$ $\exists$x, y không đồng thời bằng 0:

$\vec{n} = x\vec{e}_2 + y\vec{e}_4$



(Sac) có $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}.\vec{e}_1 = 0 \\ \vec{n},\vec{e}_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x.\vec{e}_2 + y.\vec{e}_4).\vec{e}_1 = 0 \\ x.\vec{e}_2 + y.\vec{e}_4).\vec{e}_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x.\cos\alpha + y.\cos\varphi = 0 \\ x.\cos\beta + y.\cos\delta = 0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

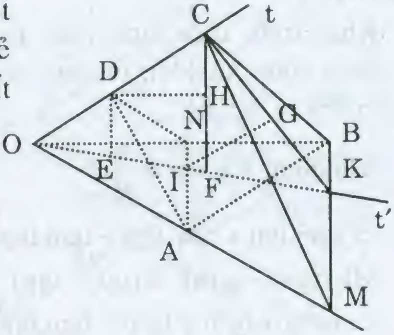
$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\varphi \\ \cos\beta & \cos\delta \end{vmatrix} = 0$ (vì hệ (I) $\exists$x, y không đồng thời bằng 0 là nghiệm)

$\Leftrightarrow$ cosα.cosδ = cosβ.cosφ (điều phải chứng minh).

Bài 43.

Ta có: $V_{ABCD} = \left|V_{COAB} - V_{DAOB}\right| = \dfrac{1}{3}S_{AOB}\left|CE - CF\right|$ (1^*)

Gọi Ot′ là hình chiếu của Ot lên mặt phẳng (OAB), E và F lần lượt là hình chiếu của D và C lên (OAB); E, F ∈ Ot′, α là góc tạo bởi Ot và mp(OAB) ⇒ $\alpha = \widehat{tOt'}$.



Kẻ CM // DA cắt OA tại M, kẻ DN // CB cắt OB tại N, AN và BM cắt Ot′ tại I và K, kẻ DH // EF, DH cắt CF tại H; kẻ IG // Ot cắt CK tại G.

Chứng minh

$CH = IG.\sin\alpha = IK.\cos\alpha.\sin\alpha$ (2^*)

Gọi β là góc tạo bởi Ot′ và AB.

Chứng minh Ik = AB.cosβ (3^*)

Từ (1^*), $(2^*0$, $(3^*) \Rightarrow V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}S_{OAB}.AB.\sin 2\alpha.\cos\beta$

Suy ra V_{ABCD} đạt giá trị lớn nhất khi sin2α và cosβ cùng đạt giá trị lớn nhất, tức là khi $\beta = 0^0$ và $\alpha = 45^0$. Lúc này Ot′ ≡ Δ với Δ qua O và Δ // AB.

Suy ra Ot nằm trong (Q) chứa Δ và (Q) ⊥ (OAB) và Ot hợp với Δ góc 45^0.

Bài 44.

Chứng minh: $\dfrac{1}{a^2b^2} + \dfrac{1}{b^2c^2} + \dfrac{1}{c^2a^2} \leqslant \dfrac{9}{S^2}$ (1)

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có:

$a = 2R.\sin A,\ b = 2R.\sin B,\ c = 2R.\sin C$

$S_{ABC} = AR^2\sin A.\sin B.\sin C$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{16R^4\sin^2 A.\sin^2 B} + \frac{1}{16R^4\sin^2 B.\sin^2 C} +$$

$$+ \frac{1}{16R^4\sin^2 A.\sin^2 C} \leqslant \frac{9}{16.4R^4\sin^2 A.\sin^2 B.\sin^2 C}$$

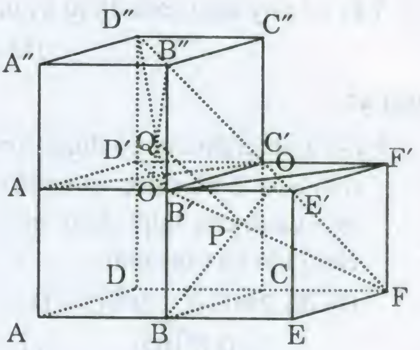
$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

- Ta dễ dàng chứng minh được $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \dfrac{9}{4}$.

Bài 45.

Dựng hình lập phương BEFC.B′E′F′C bên ngoài hình lập phương ABCD.A′B′C′D′ như hình vẽ

a) Gọi O là tâm của B'E'F'C' và P là giao điểm củ B'F và BO.



Hiển nhiên $C'E' \perp (BFF'B')$

nên $B'P \perp C'E'$ (1)

Tương tự: $BE' \perp (B'EFC')$

hay $B'P \perp BE'$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow B'P \perp (BC'E')$

mà $(BC'E') \equiv (BC'D)$

nên $B'P \perp (BC'D)$.

Tương tự, dựng hình lập phương A'B'C'D'.A''B''C''D'' như hình vẽ.

Gọi O' là tâm A'B'C'D' và Q là giao điểm của B'D' và B'O', ta cũng có $B'Q \perp (A'DC')$.

Vậy ta có 4 điểm P, Q, B', C' cùng nằm trên mp(B'D''F).

b) Ta có $AB' \perp B'C'$, $DC' \perp FD''$ (3)

Mà AB' song song DC' nên $AB' \perp FD''$ (4)

Từ (3) và (4) ta có: AB' (B'FD''). Suy ra $PQ \perp AB'$ (5)

Mặt khác PQ song song FD'', mà $FD'' \perp B'C'$ hay $PQ \perp B'C'$. Tư (5) và (6) ta có $PQ \perp (AB'C')$.

Gọi S là giao điểm của PQ và B'C'.

Khoảng cách giữa PQ và AB' là B'S. mặt khác: trong tam giác B'D''F ta có

$$\frac{B'Q}{B'D''} = \frac{B'P}{B'F} = \frac{PQ}{FD''} = \frac{B'S}{B'C'} = \frac{1}{3} \Rightarrow B'S = \frac{1}{3}a$$

Bài 46.

Gọi F là trọng tâm của tứ diện ABCD.

Ta đặt $\vec{x} = \overrightarrow{OM} + 4\overrightarrow{OG}$.

Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tứ diện MBCD, MACD, MABD, MABC.

Ta có: $4\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + 4\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \vec{x} - \overrightarrow{OA}$

Tương tự ta có $4\overrightarrow{OB'} = \xi - \overrightarrow{OB}$; $4\overrightarrow{OC'} = \vec{x} - \overrightarrow{OC}$; $4\overrightarrow{OD'} = \vec{x} - \overrightarrow{OD}$

Theo đề ta có: $OA' = OB' = OC' = OD'$

$$\Leftrightarrow 16\overrightarrow{OA'}^2 = 16\overrightarrow{OB'}^2 = 16\widehat{OC}'^2 = 16\overrightarrow{OD'}^2$$

$$\Leftrightarrow (\vec{x} - \overrightarrow{OA})^2 = (\vec{x} - \overrightarrow{OB})^2 = (\vec{x} - \overrightarrow{OC})^2 = (\vec{x} - \overrightarrow{OD})^2$$

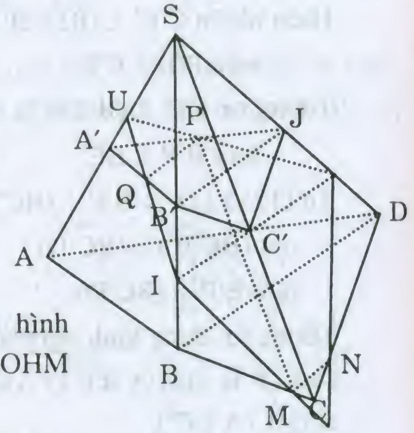
$$\Leftrightarrow \vec{x}.\overrightarrow{OA} = \vec{x}.\overrightarrow{OB} = \vec{x}.\overrightarrow{OC} = \vec{x}.\overrightarrow{OD}$$

Do đó $\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + 4\overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = 5\overrightarrow{GO}$ (1)

Vậy có duy nhất một điểm M thoả mãn đề bài xác định bởi (1)

$$(M = V_G^5(O)).$$

Bài 47.



* Do hình chóp cụt có đúng 6 mặt nên mỗi mặt của hình chóp cụt phải chứa đúng một cạnh của thiết diện, nên IJ là đường chéo lớn của lục giác.

Do đó 2MN // = 2PPQ // IJ

$\Rightarrow$ IJ // BD (1)

* Gọi O là tâm của lục giác và H, H′ là hình chiếu của O trên hai đáy thì ΔOH′P = ΔOHM

$\Rightarrow$ OH = OH′ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ I, J là trung điểm của BB′, DD′.

* Đặt BD = 4a $\Rightarrow$ B′D′ = 2a, IJ = 3a và MN = PQ = $\dfrac{3a}{2}$.

$$\text{Suy ra } \frac{PQ}{B'D'} = \frac{A'Q}{A'B'} = \frac{3}{4} \text{ và } \frac{MN}{BD} = \frac{CM}{CB} = \frac{3}{8}$$

* Áp dụng định lí Mê–nê–la–uýt cho ΔSA′B′ và 3 điểm U, Q, I ta được

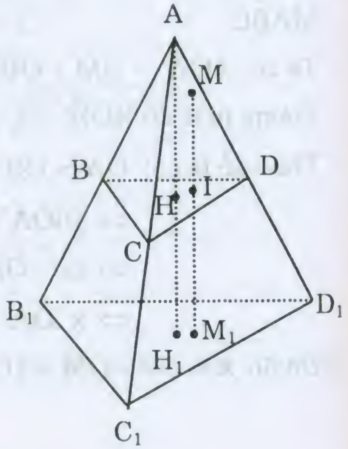
$$\frac{SU}{UA'}.3.\frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \text{U là trung điểm của SA}'.$$

* Vậy $\dfrac{V_{UA'QP}}{V_{UAIJ}} = \dfrac{1}{12}$.

Bài 48.

Gọi B_1, C_1, D_1 tương ứng là giao điểm của các tia AB, AC, AD với mặt phẳng qua M_1 và song song (BCD). Giả sử $MM_1 \cap (BCD) = \{I\}$. Kẻ AH $\perp$ (BCD) và giả sử $AH \cap (B_1C_1D_1) = \{H_1\}$. Kí hiệu $V_1 = V(MBCD)$.

Do hình chóp ABCD và $AB_1C_1D_1$ đồng dạng nên:



$$\frac{V(AB_1C_1D_1)}{V} = \left(\frac{AH_1}{AH}\right)^3$$

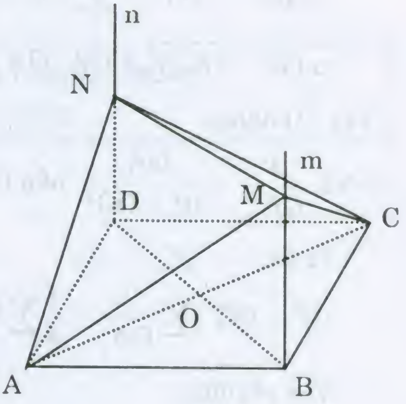
$$\Rightarrow \frac{V + W_1}{V} = \left(\frac{AH + HH_1}{AH}\right)^3 = \left(1 + \frac{MI}{AH}\right)^3$$

$$1 + \frac{W_1}{V} = \left(1 + \frac{V_1}{V}\right)^2;$$

$$\frac{W_1}{V} = \left(\frac{V_1}{V}\right)^3 + 3\frac{V_1^2}{V^2} + 3\frac{V_1}{V}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} W_i = 3V + \frac{3}{V}\sum_{i=1}^{4} V_i^2 + \frac{1}{V^2}\sum_{i=1}^{4} V_i^3$$

Bài 49.



a) Chứng minh đúng $AC \perp (MON)$

Lí luận đúng

$$V = V_{AOMN} + V_{COMN} = \frac{1}{3}.AC.S_{OMN}$$

Tính được $S_{OMN} = (x + y).\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy: $V = \frac{(x + y).a^2}{6}$.

b) Nhị diện [M, AC, N] là nhị diện vuông

$\Leftrightarrow \widehat{MON} = 90^0$

Ta có: $\widehat{MON} = 90^0 \Leftrightarrow MN^2 = OM^2 + ON^2 \Leftrightarrow xy = \frac{1}{2}a^2$.

Theo bất đẳng thức Cô–si: $V = \frac{(x + y).a^2}{6} \geqslant \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy: $\min V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ khi $x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 50.

Gọi O và R tương ứng là tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Ta có: $GA_i.GA'_i = R^2 - OG^2 \Leftrightarrow GA'_i = \frac{R^2 - OG^2}{GA_i}$ với $i = \overline{1,4}$.

Vậy: * (1) $\Leftrightarrow (GA_1.GA_2.GA_3.GA_4)^2 \leq (R^2 - OG^2)^4$

$\Leftrightarrow (R^2 - OG^2)^2 \geq (GA_1.GA_2.GA_3.GA_4)$ (3)

Ta có: $\sum GA_i^2 = \sum(\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG})^2$ với $\sum = \sum_{i=1}^{4}$

$$= \sum OA_i^2 + \sum OG^2 - 2\overrightarrow{OG}\sum\left(\overrightarrow{OG} + \underbrace{\overrightarrow{OA_i}}_{0}\right)$$

$$= 4R^2 + 4OG^2 - 8OG^2 = 4R^2 - 4OG^2$$

$$4\sum GA_1^2 \geqslant (\sum GA_i)^2$$

$$\sum GA_i \sum \frac{1}{GA_i} \geqslant 16$$

Suy ra:

$$4(R^2 - OG^2) = \sum GA_i^2 \geqslant \frac{1}{4}(\sum GA_i)^2 \geqslant \frac{1}{4}.16.\sqrt{GA_1.GA_2.GA_3.GA_4}$$

$$\Rightarrow (R^2 - OG^2)^2 \geqslant GA_1.GA_2.GA_3.GA_4$$

Vậy (3) đúng.

* Và $\frac{1}{GA'_i} = \frac{GA_i}{R^2 - OG^2}$ nên (2) $\Leftrightarrow \frac{\sum GA_i}{R^2 - OG^2)}.\sum \frac{1}{GA_1} \geqslant \sum GA_1$ (4)

Ta có:

$$(R^2 - OG^2)\sum \frac{1}{GA_i} = \frac{1}{4}\sum GA_i^2.\sum \frac{1}{GA_i} \geqslant \frac{1}{16}(\sum GA_i)^2.\sum \frac{1}{GA_i} \geqslant \sum GA_i$$

Vậy (4) đúng.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow GA_1 = GA_2 = GA_3 = GA_4 \Leftrightarrow G = O$

* $\forall M$, ta có: $MA_i = \frac{1}{R}\left|\overrightarrow{MA_i}\right|\left|\overrightarrow{OA_i}\right| \geqslant \frac{1}{R}\overrightarrow{MA_i}.\overrightarrow{OA_i}$

$$= \frac{1}{R}(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}).\overrightarrow{OA_i} = \frac{1}{R}\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA_i} + \frac{1}{R}.R^2$$

$$\sum MA_i \geqslant \frac{1}{R}\sum \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA_i} + 4R = \frac{1}{R}\overrightarrow{MO}\sum \underbrace{\overrightarrow{OA_i}}_{0} + 4R \Rightarrow \sum MA_i \geqslant 4R$$

PHẦN 3. ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ MÔN TOÁN

NĂM 2007

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HOÁ
TRƯỜNG THPT BỈM SƠN

Câu 1. Cho dãy số (U_n) xác định như sau:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{2007} + U_n \quad \text{với} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Chứng minh dãy số (U_n) không bị chặn và tính:

$$\lim \left(\frac{U_1}{U_2} + \frac{U_2}{U_3} + \frac{U_3}{U_4} + \ldots + \frac{U_n}{U_{n+1}} \right)$$

Câu 2. Tìm hàm số f(x) xác định với $\forall x \in R$ thoả mãn:

$$\begin{cases} f(0) = 30^4, \quad f(\frac{\pi}{2}) = 2007 \\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).\cos y \quad \text{với} \quad \forall x, y \in R \end{cases}$$

Câu 3. Cho tứ diện ABCD có BC = DA = a, CA = DB = b và AB.DC = c^2. P là một điểm nào đó trong không gian.

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: f(P) = PA + PB + PC + PD.

Câu 4. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_2) \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_3) \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_4) \\ x_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{9} \cos(\pi x_1) \end{cases}$$

Câu 5. Tìm tất cả số nguyên a, b, c thoả mãn điều kiện $1 < a < b < c$ và $(abc - 1)$ chia hết cho $(a-1)(b-1)(c-1)$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG TRỊ
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1. Cho $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, $\{x\} = x - [x]$. Tìm tất cả các số thực $x \neq 0$ sao cho ba số: $x, [x], \{x\}$ lập thành cấp số nhân.

Câu 2. Trong hình vuông ABCD lấy các điểm P và Q sao cho $\widehat{QAP} = \widehat{PCQ} = 45^0$, ($\widehat{BAP} < \widehat{BAQ}$, $\widehat{BCP} < \widehat{BCQ}$). Chứng minh rằng $PQ^2 = BP^2 + QD^2$.

Câu 3. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng:

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right]$$

với $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x.

Câu 4. Cho hai dãy số $a_0, a_1, a_2, \ldots$ và $b_0, b_1, b_2, \ldots$

Với $a_0, b_0 > 0$ và $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2b_n}$, $b_{n+1} = b_n + \dfrac{1}{2a_n}$.

Chứng minh rằng: $\operatorname{Max}\left\{a_{2006}; b_{2006}\right\} > \sqrt{2007}$.

Câu 5. Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; \ldots; 99; 100\}$ và A là tập hợp con có 11 phần tử của X. Chứng minh rằng tồn tại hai tập hợp con khác rỗng không giao nhau của A sao cho tổng các phần tử của chúng bằng nhau.

Câu 6. Cho các số thực dương a, b và số thực x.

Chứng minh: . $a^{\sin^2 x}.b^{\cos^2 x} < a + b$

Câu 7. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. $BH = R\sqrt{2}$ là đường cao của tam giác ABC. D và E là hình chiếu vuông góc của H lên AB và BC. Chứng minh đường thẳng DE đi qua O.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NAM
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM

Câu 1. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} e^{x-y} = \dfrac{y}{x} \\ 10\sqrt{x^6+1} = 3(y^4+2) \\ 0 < x, y \end{cases}$$

Câu 2. Cho $(a_1, a_2, \ldots, a_{2007})$ là một hoán vị của $(1, 2, \ldots, 2007)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S_{2007} = \sum_{i=1}^{2007} \left|a_{i+1} - a_i\right|, \qquad (a_{2008} = a_1)$$

Câu 3. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, L lần lượt là các điểm chia đoạn BC, CA, AB theo tỷ số -2006, -2007, -2008; P, Q, R lần lượt là giao điểm của AM với BN, BN với CL và CL với AM. Gọi I là một điểm thuộc miền trong tam giác PQR; kí hiệu x, y, z lần lượt là khoảng cách từ I đến BC, CA, AB của tam giác ABC. Tìm vị trí của I để cho x.y.z đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4. Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$ thoả mãn:

a) f liên tục trên R

b) Với mỗi bộ gồm 2007 số bất kì $x_1 < x_2 < ... < x_{2007}$, ta có:

$$f(x_{1004}) \geq \frac{1}{2006}(f(x_1) + ... + (x_{1003}) + f(x_{1005}) + ... + f(x_{2007})).$$

Câu 5. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là tứ giác nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi E, F lần lượt là những điểm di động trên cạnh AB và CD sao cho $\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD}$ ($E \neq A$, $F \neq C$). Gọi P là điểm trên đoạn EF sao cho $\frac{PE}{PF} = \frac{AB}{CD}$.

Chứng minh rằng tỷ số thể tích $\frac{V_{S.APD}}{V_{S.BPC}}$ không phụ thuộc vào việc chọn điểm E và F.

Câu 6. Cho $f: R \to R$ khả vi cấp hai. Số thực dương a thoả mãn:

a) $f(a) = f(-a) = 0$

b) $f'(a) \leq 0$

c) $f(x) + f''(x) > 0$, với mọi x thuộc $(-a; a)$.

Chứng minh rằng: $a > \pi/2$.

Câu 7. Chứng minh rằng với mọi số thực $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, ta có:

$$\text{Max}\{|2\sin^2 x|, |\cos x.\sin 2x|, |\sin 2x(\sin x + 1)|\} \ |(\sqrt{5} - 1)|\sin x.\cos x|.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒNG THÁP
TRƯỜNG THPT THỊ XÃ SA ĐÉC

Câu 1.

1) Định k để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $(x-1)^2 = 2|x-k|$

2) Định k để phương trình sau có ba nghiệm:

$$4^{-|x-k|}\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x}.\log_{\frac{1}{2}}(2|x-k| + 2) = 0$$

Câu 2. Tìm tất cả các nghiệm thuộc đoạn [0; 1] của phương trình:

$$8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1.$$

Câu 3. Cho tứ diện SABC, trên SA, SB lấy M, N sao cho 2SM = MA; SN = 2NB. Một mặt phẳng (α) qua M và N, song song với SC chia tứ diện thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó.

Câu 4. Tìm giới hạn sau: $A = \lim\limits_{x \to 0}\left[\dfrac{\sqrt[n]{1+\alpha x}.\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}\right]$, với $\alpha\beta \neq 0$, $m, n \in Z^{+}$.

Câu 5. Cho tứ giác ABCD có ba cạnh AB = BC = CD = a. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác ABCD.

Câu 6. Chứng minh rằng nếu đồ thị hàm số $y = f(x)$, $x \in R$ đối xứng qua điểm $A(x_0, y_0)$ và qua đường thẳng $x = b$, $(b \neq x_0)$ thì f(x) là hàm số tuần hoàn.

Câu 7. Cho $x, y > 0$ và $x + y = 1$, $A > 0$ cho trước. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$S = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{A}{xy}.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NINH THUẬN
TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN

Câu 1. Tìm tất cả các cặp số (x,y) thỏa mãn phương trình:

$$2007^{\sin^2 x} + 2007^{\cos^2 x} = 2009 + \cos 2y.$$

Câu 2. Cho bất phương trình:

$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2 + 2ax + 20} + 2).\log_6(x^2 + 2ax + 22) + \log_a 4 \geq 0$ với a là tham số. Tìm a để bất phương trình có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm đó.

Câu 3. Cho tứ diện ABCD có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau tại A và I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. (α) là mặt phẳng đi qua I và (α) vuông góc với AI. Chứng minh điều kiện cần và đủ để điểm M nằm trên mặt phẳng (α) là: $MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3MA^2$.

Câu 4. Cho dãy số (x_n) với $x_n = 4n^2 + 38n$ với $n \in IN$

Tìm lim $\{\sqrt{x_n}\}$

Với kí hiệu $\{x\}$ là phần lẻ của x.

Câu 5. Cho tam giác ΔABC có đỉnh A cố định. Hai điểm B và C thay đổi sao cho AB = 2 và AC = 5. Dựng tam giác đều BCD sao cho điểm D ở khác phía đối với A đối với BC. Hãy xác định góc $\alpha = \widehat{BAC}$ để đoạn AD có độ dài lớn nhất.

Câu 6. Cho hàm f: $N^* \to N^*$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

a) f tăng.

b) $f(2n) = f(n) + n$, $\forall n \in N^*$

c) f(n) chính phương thì n chính phương.

Tính: f(2007)

Câu 7. Một thư viện sau khi khai trương được đúng 10 ngày. Nhân viên thư viện cho biết:

1) Mỗi ngày có đúng 8 người đến đọc sách.

2) Không có người nào đến thư viện 1 ngày quá 1 lần.

3) Trong 2 ngày bất kỳ của 10 ngày đó thì có ít nhất là 15 người khác nhau cùng đến thư viện.

Căn cứ đồng thời cả 3 điều kiện mà nhân viên thư viện cung cấp. Hãy cho biết số người tối thiểu đã đến thư viện trong 10 ngày nói trên là bao nhiêu?

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KON TUM
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KON TUM

Câu 1. Giải và biện luận phương trình theo tham số m:

$$\log_2 \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-m} = x - m - \sqrt{x^2-3x+2} \quad (1)$$

Câu 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} e^{y^2-x^2} = \dfrac{x^2+1}{y^2+1} & (1) \\ 3\log_3(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2)+1 & (2) \end{cases}$

Câu 3. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD cắt tứ diện ABCD theo một thiết diện. Tìm tỷ số thể tích giữa hai khối do thiết diện chia tứ diện theo k, với k là tỷ số khoảng cách từ AB, CD đến mặt phẳng (P).

Câu 4. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2 \\ u_{n+1} = u_n(u_n - 1) + 2,\ n = 2,3,4,... \end{cases}$$

Đặt $S_n = \left(u_1^2+1\right)\left(u_2^2+1\right)\left(u_3^2+1\right)...\left(u_n^2+1\right) - 1$ với n = 1, 2, 3...

Chứng minh với mọi n = 1, 2, 3...., S_n là số chính phương.

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ AD vuông góc với BC. Đường thẳng nối tâm các đường tròn nội tiếp của các tam giác ABD và ACD lần lượt cắt AB và AC tại K và L. Gọi S và T lần lượt là diện tích của tam giác ABC và tam giác ALK. Chứng minh rằng: $S \geq 2T$.

Câu 6. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + 1 = 4y^5$ không có nghiệm nguyên.

Câu 7. Chứng minh rằng trong một hình chữ nhật kích thước 10 × 11, có thể xếp được những dãy các hình tròn không chờm lên nhau sao cho tổng các bán

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒNG NAI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH

Câu 1. Cho a, b, c là các số dương sao cho $a + b + c = abc$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{c^2}} \geq 2\sqrt{3}$.

Câu 2. Cho dãy số Fibonaci: $f_1 = f_2 = 1$; $f_n = f_{n-1} + f_{n+1}$; $n > 2$. Đặt dãy số (g_n):

$g_n = 3f_{n+2} + 3f_{n-2} + f_{n-6}$; $n > 6$. Tìm UCLN $\{g_{f(6666)}; g_{f(666)}\}$.

Câu 3. Giải phương trình $\sin^{1975} x - \cos^{1975} x = \frac{1}{\sin^{2007} x} - \frac{1}{\cos^{2007} x}$.

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO LÂM ĐỒNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN THĂNG LONG

Câu 1. Chứng minh rằng nếu $a, b, c \geq 0$ và $abc = 1$ thì $\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c} \leq 1$.

Câu 2. Chứng minh rằng nếu một hình tứ diện có diện tích các mặt bằng nhau thì đường vuông góc chung của các đường thẳng chứa mỗi cặp cạnh đối diện đi qua trung điểm các cạnh đó.

Câu 3. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xf(y)) + f(y(f(x)) = 2xy \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 4. Định tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} (x+\frac{3}{2}).\sqrt{x^2+2x+3}+(x+\frac{1}{2}).\sqrt{x^2+1}+2x+2 \geq 0 \\ \log_{m^2+1}(3.\sqrt[3]{x^2}+1) \leq \log_{m^2+1}(m-2x) \end{cases}$$

Câu 5. Cho hai hình cầu đồng tâm O, bán kính $R = \sqrt{10}$, $r = 2$. Hai điểm A, B nằm trên (O,R) và hai điểm C, D nằm trên (O,r). Tìm thể tích lớn nhất của tứ diện ABCD.

Câu 6. Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 5, u_2 = 11 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3u_{n-1}, n = 2;3... \end{cases}$

Chứng minh rằng u_{2007} chia hết cho 11.

Câu 7. Gọi n, k, p là các số nguyên dương sao cho $k \geq 2$ và $k(p + 1) \leq n$. Hãy xác định số các cách tô thành hai màu xanh đỏ, cho n điểm được đánh dấu trên một đường tròn sao cho: có đúng k điểm được tô màu xanh và bất kì đoạn cung nào có hai điểm đầu mút màu xanh nhưng không chứa điểm màu xanh nào khác bên trong cũng phải chứa ít nhất k điểm màu đỏ.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN ĐẠI NGHĨA

Câu 1. Giải phương trình:

$$2^{x^2-34x+93}(x^2-34x+376)^3\left[x^2-34x+376+3\log_2(x^2-34x+376)\right]=35.$$

Câu 2. Cho phương trình $2007^x+x-\left[\log_{(1+2007^{-n})}e\right]=0$ (1) ở đây [x] là phần nguyên của x.

Với giá trị nguyên dương nào của n thì (1) có nghiệm $x \in (1; 2)$.

Câu 3. Trong không gian cho 3 ngũ giác đều ABCDE, ABMNL và AEKPL. Chứng minh rằng AK, AN, AC đôi một vuông góc với nhau.

Câu 4. Cho hàm số f liên tục trên R thỏa mãn $f(f(x)) = x^{2006}, \forall x \in R$.

Chứng minh $f(x) \geq 0, \forall x \in R$.

Câu 5. Cho hai mặt cầu (C_1), (C_2) đồng tâm O, có bán kính lần lượt là $\sqrt{10}$ và 2. Một hình tứ diện có hai đỉnh ở trên mặt cầu (C_1), hai đỉnh kia ở trên mặt cầu (C_2). Tứ diện như thế có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

Câu 6.

Xác định hàm số f trên tập các số nguyên dương thỏa mãn: $f(1) = 2007$ và $n(n+1)f(n+1) = n(n+1)f(n) + 1 + n^2 + n^3, \forall n \in N^*$.

Câu 7. Cho 2007 số nguyên dương khác nhau đôi một và không vượt quá $\frac{3^{2006}-1}{2}$. Chứng minh rằng tồn tại ba số a, b, c trong 2007 số đó thỏa mãn $a < b + c < 3a$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KIÊN GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT

Câu 1. Tìm m để phương trình:

$3^{(x-1)^2}.\log_3\left[x^2-2x+3\right]=9^{|x+m|}.\log_3\left(2|x+m|+2\right)$ (*) có đúng bốn nghiệm phân biệt.

Câu 2. Tìm số k bé nhất để bất phương trình sau luôn đúng

$$k(|x|+\sqrt{1-x^2}+1) \geq 2\sqrt{x^2-x^4} + |x| + \sqrt{1-x^2} + 2 \ (1)$$

Câu 3. Cho hình tứ diện ABCD, trên các cạnh AB, AC, AD, lấy lần lượt điểm M, P, Q sao cho AB = n.AM, AC = (n + 1)AP, AD = (n + 2)AQ, với n thuộc N*. Với mỗi n thuộc N*, ta kí hiệu P_n là mặt phẳng đi qua M, P, Q. Chứng minh rằng các mặt phẳng $P_1, P_2, ..., P_n$ đều đi qua một đường thẳng cố định.

Câu 4. Cho đa thức:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n \qquad a_i \in Q,\ i = \overline{0,n}$$

$$\alpha \in R \text{ sao cho } \alpha^3 - \alpha = [f(\alpha)]^3 - f(\alpha) = 3^{2007}$$

Chứng minh rằng: $[f^{(n)}(\alpha)]^3 - f^{(n)}(\alpha) = 3^{2007}$

Trong đó $f^{(n)}(x) = \underbrace{f(f(...(f(x))...)}_{\text{n lần}}(n \in N^*)$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có các cạnh lần lượt là: a, b, c.

Chứng minh: $8\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}\right)^2 \geq 9\left(1 + 4\sin^2\frac{A}{2}\right)\left(1 + 4\sin^2\frac{B}{2}\right)\left(1 + 4\sin^2\frac{C}{2}\right)$.

Câu 6. Chứng minh rằng với mọi số nguyên m, đa thức

$f(x) = x^4 - 2007x^3 + (2006 + m)x^2 - 2005x + m$ có không quá một nghiệm nguyên (nghiệm kép được tính là 2 nghiệm).

Câu 7. Trong thư viện có 12 bộ sách gồm 3 bộ sách Toán giống nhau, 3 bộ sách Vật lý giống nhau, 3 bộ sách Hóa học giống nhau và 3 bộ sách Sinh học giống nhau được xếp thành một dãy sao cho không có ba bộ nào cùng một môn đứng kề nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp như vậy?

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BẠC LIÊU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẠC LIÊU

Câu 1. Giải phương trình $\log_4(x^3 + 1) - \log_2(x^2 + 2) = \log_2\frac{5}{2}$.

Câu 2. Với giá trị nào của m hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \cos^2 x + (m+1)(\sin x - 1) > 0 \\ \sin^2 x + (m+2)\sin x + 2m < 0 \end{cases}.$$

Câu 3. Cho góc tam diện vuông Oxyz. Gọi a, b, c lần lượt là khoảng cách từ một điểm I ở bên trong góc tam diện theo thứ tự đến ba mặt Oyz, Ozx, Oxy. Qua I vẽ mặt phẳng (P) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C. Phải chọn mặt phẳng (P) như thế nào để thể tích tứ diện OABC nhỏ nhất.

Câu 4. Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn [0; 1] nhận giá trị trong khoảng (0; 2). Chứng minh rằng tồn tại số $c \in (0; 1)$ sao cho: $(1 - c)^2 + [f(c) + 2^{1-c}]^2 = 1$.

Câu 5. Chứng minh rằng nếu tam giác ABC không tù và thỏa mãn $\frac{R}{m_a} = \tan\frac{A}{2}$ thì vuông cân tại A. (R, m_a lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và độ dài trung tuyến kẻ từ A của tam giác ABC)

Câu 6. Có hay không hàm số f: N → N* thỏa mãn hai điều kiện sau:

a) Nếu m < n thì f(n) < f(m) ∀m, n ∈ N.

b) ∀n ∈ N: f[f(n)] = n + 3

Câu 7. Chứng minh rằng trong mặt phẳng với 4 điểm bất kì không nằm trên một đường thẳng luôn tìm được một tam giác không nhọn (có 3 đỉnh là 3 trong 4 điểm đó).

ĐÁP ÁN

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HOÁ
TRƯỜNG THPT BỈM SƠN

Câu 1.

* Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{2007} + U_n > U_n \end{cases}$ với ∀n ∈ N* ⇒ dãy số (U_n) tăng

Do đó nếu (U_n) bị chặn thì nó sẽ có giới hạn.

Giả sử $\lim U_n = a$ khi đó $a > U_1 = 1$ (1)

và $\lim U_{n+1} = \lim \left(\dfrac{U_n^2}{2007} + U_n\right) \Rightarrow a = \dfrac{a^2}{2007} + a \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ trái với (1)

⇒ (U_n) là dãy số không bị chặn ⇒ $\lim U_n = \infty \Rightarrow \lim \dfrac{1}{U_n} = 0$

Ta có: $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n^2}{2007} \Rightarrow \dfrac{U_n}{U_{n+1}} = 2007.\dfrac{\frac{U_n^2}{2007}}{U_n.U_{n+1}} = 2007.\dfrac{U_{n+1} - U_n}{U_n.U_{n+1}}$

$$\Rightarrow \frac{U_n}{U_{n+1}} = 2007\left(\frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_{n+1}}\right) \text{ với } \forall n \in N^*$$

$$\Rightarrow \frac{U_1}{U_2} + \frac{U_2}{U_3} + \frac{U_3}{U_4} + \ldots + \frac{U_n}{U_{n+1}} = 2007\left(\frac{1}{U_1} - \frac{1}{U_{n+1}}\right) = 2007\left(1 - \frac{1}{U_{n+1}}\right)$$

Vậy: $\lim \left(\dfrac{U_1}{U_2} + \dfrac{U_2}{U_3} + \dfrac{U_3}{U_4} + \ldots + \dfrac{U_n}{U_{n+1}}\right) = \lim 2007\left(1 - \dfrac{1}{U_{n+1}}\right) = 2007$

(vì $\lim \dfrac{1}{U_{n+1}} = 0$)

Câu 2. Từ giả thiết: f(x + y) + f(x − y) = 2f(x).cosy với ∀ x, y ∈ R

+ Ta thay: $\begin{cases} x = t - \dfrac{\pi}{2} \\ y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ được: $f(t) + f(t - \pi) = 2f\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right).\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ (2)

+ Thay $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ y = t - \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow f(t) + f(\pi - t) = 2f(\dfrac{\pi}{2}).\cos(t - \dfrac{\pi}{2}) = 2.2007\sin t$ (3)

+ Thay $\begin{cases} x = 0 \\ y = t - \pi \end{cases} \Rightarrow f(t - \pi) + f(\pi - t) = 2f(0).\cos(t - \pi) = -2.30^4\cos t$ (4)

Cộng (2), (3) từng vế được: $2f(t) + f(t - \pi) + f(\pi - t) = 2.2007\sin t$

Kết hợp với (4) được:

$$2f(t) = 2.30^4\cos t + 2.2007\sin t \Rightarrow f(t) = 30^4\cos t + 2007\sin t$$

hay $f(x) = 30^4\cos x + 2007\sin x$

Thử lại: Với $f(x) = 30^4.\cos x + 2007\sin x$ ta có: $f(0) = 30^4$, $f(\dfrac{\pi}{2}) = 2007$

và $f(x + y) = 30^4.\cos(x + y) + 2007\sin(x + y)$

$f(x - y) = 30^4.\cos(x - y) + 2007\sin(x - y)$

$\Rightarrow f(x + y) + f(x - y) = 2.30^4\cos x.\cos y + 2.2007\sin x.\cos y$

$= 2(30^4.\cos x + 2007.\sin x)\cos y = 2.f(x)\cos y$

thỏa mãn đề bài. Vậy hàm số cần tìm là: $f(x) = 30^4\cos x + 2007\sin x$

Câu 3. Giả thiết có: $\begin{cases} BC = DA = a \\ CA = DB = b \\ AB.DC = c^2 \end{cases}$

Ký hiệu $AB = m$, $CD = n$

Từ giả thiết ta có $m.n = c^2$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Từ giả thiết: $\begin{cases} BC = DA \\ CA = DB \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta CAB = \Delta DBA \Rightarrow CM = DM \Rightarrow MN \perp CD$

Tương tự ta có $MN \perp AB$

tức là A, B đối xứng nhau qua MN và C, D đối xứng nhau qua MN

Với mỗi điểm P trong không gian gọi P' là điểm đối xứng với P qua MN khi đó ta có $\begin{cases} AP' = BP \\ CP' = DP \end{cases} \Rightarrow f(P) = PA + P'A + PC + P'C$

Gọi Q là giao điểm của PP' và MN thì AQ là trung tuyến của $\Delta APP'$ và CQ là trung tuyến của $\Delta CPP'$. Từ đó ta có:

$\begin{cases} AP + AP' \geq 2AQ \\ CP + CP' \geq 2CQ \end{cases}$ (dấu bằng xảy ra khi $P \equiv Q \equiv P'$)

$\Rightarrow f(P) = AP + AP' + CP + CP' \geq 2(AQ + CQ)$ (1)

Đặt MQ = x, NQ = y ta có: $AQ + CQ = \sqrt{x^2 + \frac{m^2}{4}} + \sqrt{y^2 + \frac{n^2}{4}}$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta suy ra

$$\sqrt{x^2 + \frac{m^2}{4}} + \sqrt{y^2 + \frac{n^2}{4}} \geq \sqrt{(x+y)^2 + (\frac{m}{2} + \frac{n}{2})^2} = \sqrt{(x+y)^2 + \frac{(m+n)^2}{4}} \quad (3)$$

Mặt khác: $\frac{m^2}{4} = BN^2 - MN^2 \geq BN^2 - (x+y)^2$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} + (x+y)^2 \geq BN^2 + \frac{n^2}{4} = \frac{BC^2 + BD^2}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

mà $mn = c^2 \Rightarrow \frac{mn}{2} = \frac{c^2}{2} \Rightarrow \frac{(m+n)^2}{4} + (x+y)^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra: $f(P) \geq 2\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}} = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$ tức là $\frac{QM}{QN} = \frac{AB}{CD}$

Vậy Min $f(P) = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$ khi $P \in$ đoạn MN và $\frac{PM}{PN} = \frac{AB}{CD}$.

Câu 4. Từ hệ phương trình ta có với $\forall i = \overline{1,4}$ thì: $|x_i| \leq \frac{\sqrt{3}}{9} < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \pi x_i < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos(\pi x_i) \leq 1 \Rightarrow 0 < x_i < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \pi x_i < \frac{\pi}{2}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 \geq x_3$ (1)

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_2) \geq \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_4) \Leftrightarrow \cos(\pi x_2) \geq \cos(\pi x_4) \Leftrightarrow \pi x_2 \leq \pi x_4 \Leftrightarrow x_2 \leq x_4$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_3) \leq \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_1) \Leftrightarrow \pi x_3 \geq \pi x_1 \Leftrightarrow x_3 \geq x_1 \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow x_1 = x_3$. Thay vào hệ ta có $x_2 = x_4$ (3)

+ Xét hàm số $f(x) = x + \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x)$

$$f'(x) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{9}\pi\sin(\pi x) \geq 1 - \frac{\sqrt{3}\pi}{9} > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến}$$

Từ hệ đã cho kết hợp với (3) có: $x_1 + x_4 = x_2 + x_1$

Ta được: $x_1 + \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_1) = x_2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_2)$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (4) (Do f(x) là hàm số đồng biến)

Do đó $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \Rightarrow x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{9}\cos(\pi x_1) \Leftrightarrow \cos(\pi x_1) = 3\sqrt{3}\,x_1$ (5)

Xét trên khoảng $(0; \dfrac{\pi}{2})$ thì VT (5) là hàm số nghịch biến và VP (5) là hàm số đồng biến.

Do đó (5) có nghiệm duy nhất là $x_1 = \dfrac{1}{6}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dfrac{1}{6}$

Câu 5.

Đặt $d = \dfrac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} = \dfrac{\left[(a-1)+1\right]\left[(b-1)+1\right]\left[(c-1)+1\right]-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$

$$= 1 + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{(a-1)(b-1)} + \frac{1}{(b-1)(c-1)} + \frac{1}{(c-1)(a-1)}$$

$$\le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.1} < 4 \text{ (Vì } a \ge 2; b \ge 3; c \ge 4)$$

Hơn nữa $d > 1$.

Nhận thấy nếu $a \ge 4$ thì ta có $4 \le a < b < c$

$$\Rightarrow d \le 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.3} = 1\frac{59}{60} < 2$$

Vô lí do $d \in N$ và $d > 1$. Từ đó ta có $d = 2$ hoặc $d = 3$ và $a = 2$ hoặc $a = 3$

Ta có 4 trường hợp để kiểm tra sau:

Trường hợp 1: $a = 2$ và $d = 2$ ta có:

$$\frac{2bc-1}{(b-1)(c-1)} = 2 \Leftrightarrow 2bc - 1 = 2(b-1)(c-1)$$

Vì vế trái của phương trình này là số lẻ còn vế phải chẵn nên phương trình vô nghiệm

Trường hợp 2: $a = 2$ và $d = 3$,

ta có: $\dfrac{2bc-1}{(b-1)(c-1)} = 3 \Leftrightarrow (b-3)(c-3) = 5$

Vì $b < c$ nên $\begin{cases} b-3=1 \\ c-3=5 \end{cases}$. Vậy $a = 2$, $b = 4$, $c = 8$

Trường hợp 3: $a = 3$ và $d = 2$, ta có: $\dfrac{3bc-1}{2(b-1)(c-1)} = 2 \Leftrightarrow (b-4)(c-4) = 11$

Vì b < c nên $\begin{cases} b-4=1 \\ c-4=11 \end{cases}$. Vậy a = 3, b = 5, c = 15

Trường hợp 4: a = 3 và d = 3 ta có:

$$\frac{3bc-1}{2(b-1)(c-1)} = 3 \Leftrightarrow 3bc-1 = 6(b-1)(c-1)$$

Phương trình này vô nghiệm vì vế phải là bội của 3 còn vế trái không phải là bội số của 3.

Vậy các nghiệm của bài toán là: $\begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ c=8 \end{cases}$ và $\begin{cases} a=3 \\ b=5 \\ c=15 \end{cases}$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG TRỊ
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1. x, [x], {x} lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow x.\{x\} = [x]^2$

$$\Leftrightarrow x(x-[x]) = [x]^2,$$

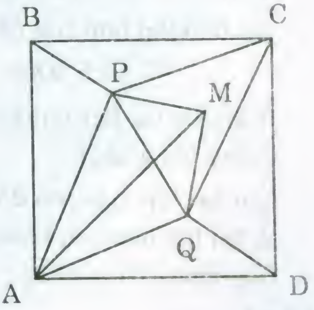
$$\Leftrightarrow x^2 - [x]x - [x]^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{[x] \pm \sqrt{[x]^2 + 4[x]^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}[x],$$

mà $\{x\} = x - [x] = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}[x],\ 0 \neq \{x\} < 1$

$$\Rightarrow 0 \neq \{x\} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).[x] < 1 \Rightarrow 0 \le [x] < \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ mà } x \neq 0$$

$$\Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

❑ **Câu 2.**



Gọi M là điểm đối xứng của B qua AP, $\Rightarrow AD = AB = AM$ mà $\widehat{QAP} = 45^0 \Rightarrow$ M đối xứng với D qua AQ. Tương tự gọi N là điểm đối xứng của B qua CP $\Rightarrow$ N là điểm đối xứng của D qua CQ

$$\widehat{PMQ} + \widehat{QNP} = 180^0\ (= \hat{B} + \hat{D})$$

$$\Delta PMQ = \Delta QNP \Rightarrow \widehat{PMQ} = \widehat{QNP} = 90^0$$

$$\Rightarrow PQ^2 = PM^2 + MQ^2 = BP^2 + DQ^2$$

Câu 3.

Ta có:

$$(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2 = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1+\sqrt{4n^2+4n+1} = 4n+2$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] \le \left[\sqrt{4n+2}\right]$$

Nếu $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right] < \left[\sqrt{4n+2}\right]$ thì tồn tại số nguyên p thỏa mãn:

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} < p \le \sqrt{4n+2}$$

$$\Rightarrow 2n < 2\sqrt{n(n+1)} < p^2-(2n+1) \le 2n+1 \Rightarrow p^2-(2n+1) = 2n+1$$

$\Rightarrow p^2 = 4n+2$ điều này vô lí vì một số chính phương chia cho 4 chỉ dư 0 hoặc 1

Câu 4.

$$a_{n+1}b_{n+1} = (a_n+\frac{1}{2b_n})(b_n+\frac{1}{2a_n}) = a_nb_n+\frac{1}{4a_nb_n}+1$$

$$= a_{n-1}b_{n-1}+\frac{1}{4a_{n-1}b_{n-1}}+\frac{1}{4a_nb_n}+2 = \ldots$$

$= a_0b_0+\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{4a_ib_i}+n+1$. Khi đó:

$$(\text{Max}\{a_{2006};\ b_{2006}\})^2 \ge a_{2006}.b_{2006} > a_0b_0+\frac{1}{4a_0b_0}+2006$$

$$\ge 2\sqrt{a_0b_0.\frac{1}{4a_0b_0}}+2006 = 2007$$

$\Rightarrow \text{Max}\{a_{2006};\ b_{2006}\} > \sqrt{2007}$ (đpcm)

Câu 5.

A có $2^{11}-2 = 2046$ tập hợp con khác rỗng và khác A. Tổng của các phần tử của mỗi tập hợp con này là số nguyên dương không vượt quá

$$91+92+\ldots+100 = 955.$$

Vậy tồn tại hai tập hợp con khác rỗng của A sao cho tổng các phần tử của chúng bằng nhau.

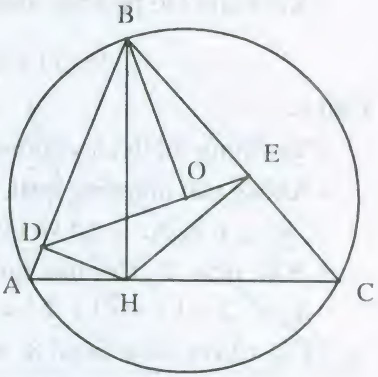
Gọi hai tập hợp con đó là B và C, khi đó $E = B \setminus (B \cap C)$ và $F = C \setminus (B \cap C)$ là hai tập hợp con khác rỗng không giao nhau của A sao cho tổng các phần tử của chúng bằng nhau.

Câu 6.

Đặt $m = \text{Max}\{a;\ b\}$

Ta có $a^{\sin^2 x}.b^{\cos^2 x} \le m^{\sin^2 x}.m^{\cos^2 x} = m^{\sin^2 x+\cos^2 x} = m < a+b$

❑ Câu 7.



Tứ giác BDHE nội tiếp đường tròn đường kính BH nên

$\widehat{BDE} = \widehat{BHE} = \hat{C}$, mà $\widehat{AOB} = 2\hat{C}$

$\Rightarrow \widehat{ABO} = 90^0 - \hat{C}$

$\Rightarrow DE \perp BO$. (1)

Ta cũng có $\widehat{BED} = \hat{A}$.

$\Rightarrow$ Diện tích tam giác BDE là

$$S_{BDE} = 2\left(\frac{BH}{2}\right)^2 \sin\hat{A}.\sin\hat{B}.\sin\hat{C} = R^2\sin\hat{A}.\sin\hat{B}.\sin\hat{C}$$

$$= \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{4}AC.BH$$

$DE = BH.\sin\widehat{DBE} = BH.\sin\hat{B} \Rightarrow$ Khoảng cách từ B đến đường thẳng DE là

$$h = \frac{2S_{BDE}}{DE} = \frac{\frac{1}{2}AC.BH}{BH.\sin B} = \frac{AC}{2.\sin B} = R.\ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có O nằm trên đường thẳng DE (đpcm)

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NAM
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM

Câu 1.

+ Hàm số $y = x.e^x$ là hàm số tăng trên R^+, nên từ $e^{x-y} = \dfrac{y}{x}$

$\Leftrightarrow x.e^x = y.e^x$, suy ra $x = y$

Do đó nếu (x, y) là nghiệm của hệ phương trình thì x = y

+ Khi đó, ta có: $10\sqrt{x^6+1} = 3(y^4+2) \Leftrightarrow 10\sqrt{x^6+1} = 3(x^4+2)$ (*)

+ Đặt $u = x^2 + 1$, $v = x^4 - x^2 + 1$, phương trình (*) thành: $10\sqrt{u.v} = 3(u+v)$

Suy ra: $(\sqrt{u} - 3\sqrt{v})(3\sqrt{u} - \sqrt{v}) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{u} = 3\sqrt{v}\\ \sqrt{v} = 3\sqrt{u}\end{array}\right.$

+ Nếu $\sqrt{u} = 3\sqrt{v} \Rightarrow u = 9v \Rightarrow 9x^4 - 10x^2 + 8 = 0$, vô nghiệm

+ Nếu $\sqrt{v} = 3\sqrt{u} \Rightarrow v = 9u \Rightarrow x^4 - 10x^2 - 8 = 0$ có nghiệm $x = \sqrt{5+\sqrt{33}}$ thoả mãn điều kiện

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất:

$$(x; y) = (\sqrt{5+\sqrt{33}}; \quad \sqrt{5+\sqrt{33}})$$

Câu 2.

+ Ta chứng minh cho trường hợp tổng quát $S_n \geq 2(n-1)$, $n \geq 2$

+ Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a_1 = 1$ (vì dễ thấy hai hoán vị sau: $(a_1, a_2, ..., a_{k-1}, 1, a_{k+1}, ..., a_n)$ và $(1, a_{k+1}, ..., a_n, a_1, a_2, ..., a_{k-1})$ có cùng giá trị tổng S_n

* Khi $n = 2$: Có hai hoán vị là $(1, 2)$ và $(2, 1)$, cả hai đều có tổng $S_2 = |2-1| + |1-2| = 2$

* Giả sử khi $n = k$ ta có $S_k \geq 2(k-1)$, khi đó với $n = k+1$ ta có:

$$\sum_{i=1}^{k+1}|a_{i+1} - a_i| = \sum_{i=2}^{k}|a_{i+1} - a_i| + |a_2 - a_1| + |a_1 - a_{k+1}|$$

$$= \sum_{i=2}^{k}|a_{i+1} - a_i| + a_{k+1} + a_2 - 2$$

$$= |a_3 - a_2| + |a_4 - a_3| + \ldots + |a_{k+1} - a_k| + |a_2 - a_{k+1}| + a_{k+1} + a_2 - |a_2 - a_{k+1}| - 2$$

Dễ thấy $(a_2 - 1, a_3 - 1, ..., a_{k+1} - 1)$ là một hoán vị của $(1, 2, ..., k)$.

Do đó theo giả thiết quy nạp ta có:

$$|a_3 - a_2| + |a_4 - a_3| + \ldots + |a_{k+1} - a_k| + |a_2 - a_{k+1}| + (a_{k+1} + a_2 - |a_2 - a_{k+1}| - 2)$$

$$= |(a_3 - 1) - (a_2 - 1)| + \ldots + |(a_2 - 1) - (a_{k+1} - 1)| +$$

$$+ (a_{k+1} + a_2 - |a_2 - a_{k+1}| - 2)$$

$$\geq 2(k-1) + (2\min(a_{k+1}, a_2) - 2) \geq 2(k-1) + (4-2) = 2k$$

Theo nguyên lí quy nạp ta có $S_n \geq 2(n-1)$, với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

+ Dễ thấy hoán vị $(1, 2, 3, ..., n)$ có $S_n = 1 + 1 + \ldots + 1 + |1 - n| = 2(n-1)$

+ Kết quả: Giá trị nhỏ nhất của S_{2007} là 4012.

Câu 3. Ta có I thuộc miền trong tam giác PQR, nên I cũng thuộc miền trong tam giác ABC.

Ký hiệu a, b, c là độ dài 3 cạnh BC, CA, AB, ta có:

$$\sqrt[3]{(ax)(by)(cz)} \leq \frac{ax + by + cz}{3} = \frac{2S}{3} \Rightarrow x.y.z \leq \frac{8S^3}{27abc}$$

Vậy giá trị lớn nhất của tích x.y.z là $8S^3/27a.b.c$, đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $ax = by = cz$.

Ta sẽ chứng minh I là trọng tâm tam giác ABC.

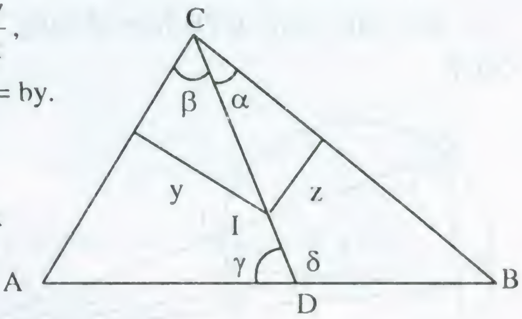
Thực vậy, giả sử CI cắt AB tại D. Đặt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các góc như hình vẽ.

Áp dụng định lí hàm số sin với hai tam giác ADC và tam giác CDB ta có:

$$\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\gamma} \text{ và } \frac{DB}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin\delta}$$

suy ra $\frac{b.\sin\beta}{a.\sin\alpha} = \frac{AD.\sin\gamma}{DB.\sin\delta} = \frac{AD}{DB}$ (γ, δ bù nhau)

Suy ra: $\frac{AD}{DB} = \frac{b.\sin\beta}{a.\sin\alpha} = \frac{by/CI}{ax/CI} = \frac{by}{ax}$,



Suy ra: AD = DB khi và chỉ khi ax = by.

Do đó ax = by khi và chỉ khi I nằm trên trung tuyến CD.

Lập luận tương tự, ta có I nằm trên ba đường trung tuyến của tam giác ABC

Dễ thấy trọng tâm của tam giác ABC cũng nằm ở miền trong tam giác PQR

Vậy, điểm cần tìm là trọng tâm tam giác ABC.

Câu 4. Giả sử tồn tại hàm số f: R → R thoả mãn đề bài:

+ Với hai số thực bất kì u < v, ta xây dựng dãy số:

$(x_1^n), (x_2^n), \ldots, (x_{1003}^n), (x_{1006}^n), \ldots, (x_{2007}^n)$ thoả mãn:

a) $\forall n,\ x_1^n < x_2^n < x_3^n < \ldots < x_{1003}^n < u < v < x_{1006}^n < \ldots < x_{2007}^n$ $(u = x_{1004}, v = x_{1005})$

b) $x_1^n \to u, x_2^n \to u, \ldots, x_{1003}^n \to u;$ $v \leftarrow x_{1005}^n, v \leftarrow x_{1006}^n, \ldots, v \leftarrow x_{2007}^n$

Suy ra:

$$\forall n, f(u) = f(x_{1004}) \geq \frac{1}{2006}[f(x_1^n) + \left|f(x_2^n)\right| + \ldots + f(x_{1003}^n) + f(v) + f(x_{1006}^n)$$

$$+ \ldots + f(x_{2007}^n)]$$

Hàm số f liên tục nên:

$$f(u) \geq \frac{1}{2006}\lim[f(x_1^n) + f(x_2^n)$$

$$+ \ldots + f(x_{1003}^n) + f(v) + f(x_{1006}^n) + \ldots + f(x_{2007}^n)]$$

$$\geq \frac{1}{2006}[f(u) + f(u) + \ldots + f(u) + f(v) + f(v) + \ldots + f(v)]$$

$$= \frac{1}{2006}[1003f(u) + 1003f(v)] = \frac{1}{2}[f(u) + f(v)]$$

Suy ra: f (u) ≥ f(v), hàm số không tăng

+ Với hai số thực bất kì s < t ta xây dựng dãy số:

$(y_1^n), (y_2^n), \ldots, (y_{1002}^n), (y_{1005}^n), \ldots, (y_{2007}^n)$ thoả mãn:

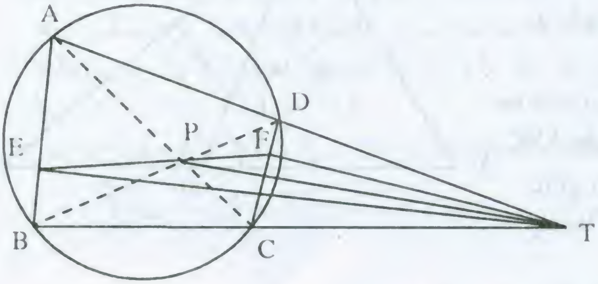
a) $\forall n,\ y_1^n < y_2^n < y_3^n < \ldots < y_{1002}^n < s < t < y_{1005}^n < \ldots < y_{2007}^n$ $(s = y_{1003}, t = y_{1004})$

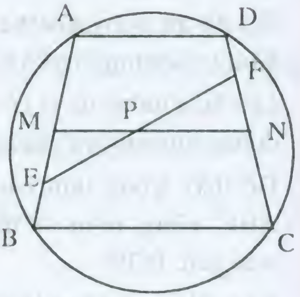
b) $y_1^n \to s, y_2^n \to s, \ldots, y_{1002}^n \to s; \qquad t \leftarrow y_{1005}^n, v \leftarrow y_{1006}^n, \ldots, v \leftarrow y_{2007}^n$

Lập luận tương tự như trên, ta có: $f(t) \geq f(s)$, hàm số không giảm.

Kết luận: Hàm số f là hàm số hằng.

Câu 5.





a) Trường hợp AD cắt BC tại T:

Tứ giác ABCD nội tiếp $\Rightarrow \Delta ATB$ và ΔCTD đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{TA}{TC} = \frac{AB}{CD} \qquad (1)$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD} \Rightarrow \frac{AE}{CF} = \frac{EB}{FD} = \frac{AB}{CD} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) và $\widehat{FCT} = \widehat{EAT} \Rightarrow \Delta ATE$ và ΔCTF đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{TE}{TF} = \frac{TA}{TC} = \frac{AB}{CD} = \frac{PE}{PF} \Rightarrow \widehat{ETP} = \widehat{FTP}$$

Suy ra $\widehat{ATP} = \widehat{BTP}$, suy ra P cách đều các đường thẳng AD và BC

Suy ra: $\dfrac{Dt(APD)}{Dt(BPC)} = \dfrac{DA}{BC} \Rightarrow \dfrac{V_{S.ADP}}{V_{S.BPC}} = \dfrac{AD}{BC}$ không phụ thuộc vào việc chọn E, F.

b) Trường hợp AD//BC: Suy ra ABCD là hình thang cân, với AB = DC, suy ra BE = DF. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Chứng minh được ME = NF và rõ ràng E, F cách đều MN. Suy ra trung điểm của EF nằm trên MN.

$\dfrac{PE}{PF} = \dfrac{AB}{CD} \Rightarrow$ P trung điểm của EF $\Rightarrow$ P cách đều AD và BC.

Suy ra $\dfrac{Dt(APD)}{Dt(BPC)} = \dfrac{DA}{BC} \Rightarrow \dfrac{V_{S.ADP}}{V_{S.BPC}} = \dfrac{AD}{BC}$ không phụ thuộc vào việc chọn điểm E và F.

Câu 6. Giả sử $a \leq \pi/2$, xét hàm số $h(x) = \sin x.f(x) + \cos x.f'(x)$, $x \in [-a; a]$.

Ta có: $h'(x) = [f(x) + f''(x)].\cos x > 0$, $x \in (-a; a)$

Suy ra: $h(x)$ là hàm số tăng trên $(-a; a) \Rightarrow h(a) > h(-a)$

Suy ra: $a < \pi/2$ vì nếu $a = \pi/2$ thì $h(a) = f(a) = 0 = -f(-a) = h(-a)$

Ta có $h(x) < h(a) \leq 0, \forall x \in (-a, a) \Rightarrow h(x) < 0, \forall\ x \in (-a; a)$.

Xét hàm số $u(x) = \dfrac{f(x)}{\cos x}$, $x \in [-a, a]$.

Suy ra: $u'(x) = \dfrac{\sin x.f(x) + \cos x.f'(x)}{\cos^2 x} < 0, \forall\ x \in (-a; a)$

Suy ra $u(x)$ là hàm giảm trên $[-a; a]$, nhưng $u(a) = u(-a) = 0$. Vô lí

Vậy $a > \pi/2$.

Câu 7.

+ Trường hợp $x = 0$:

  Khi đó $\sin x = 0$, lúc này VT = VP = 0, suy ra kết quả.

+ Trường hợp $x \neq 0$: Vì $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ nên $\sin x.\cos x \neq 0$.

  Bằng cách chia hai vế cho $|2\sin x.\cos x|$, bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về:

$$\max\{|\tan x|, |\cos x|, |\sin x + 1|\} \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

  Đặt $r = \tan x$, $s = \cos x$, vì $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ nên $|r| \leq 1$, $|s| \leq 1$. Bài toán thành:

$$\max\{|r|, |s|, |r.s + 1|\} \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \forall |r| \leq 1, |s| \leq 1$$

  Không mất tính tổng quát, giả sử $|s| \leq |r| \leq 1$.

  Và cho $|r.s + 1| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, thì:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < r.s + 1 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < r.s < \frac{\sqrt{5}-3}{2} < 0$$

$$\Rightarrow |r.s| > \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow |r|^2 \geq |r.s| > \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow |r| > \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

  Suy ra điều phải chứng minh.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒNG THÁP
TRƯỜNG THPT THỊ XÃ SA ĐÉC

Câu 1.

1) $(x-1)^2 = 2|x-k|$ (1) $\Leftrightarrow [(x-1)^2]^2 - (2|x-k|)^2 = 0$

$\Rightarrow [(x-1)^2 - 2(x-k)][(x-1)^2 + 2(x-k)] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = x^2 - 4x + 1 + 2k = 0, & \text{(a)} \\ x^2 - 2k + 1 = 0, & \text{(b)} \end{array}\right.$$

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì

(a) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = -2k + 3 > 0 \Leftrightarrow k < 3/2$;

(b) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 2k - 1 > 0 \Leftrightarrow k > \dfrac{1}{2}$,

và nghiệm (b): $x = \pm\sqrt{2k-1}$ không là nghiệm của (a) nên $f(\pm\sqrt{2k-1}) \neq 0$

$\Leftrightarrow 2k - 1 \pm 4\sqrt{2k-1} + 1 + 2k \neq 0 \Leftrightarrow k \pm \sqrt{2k-1} \neq 0$

$\Leftrightarrow k \neq \pm\sqrt{2k-1} \Leftrightarrow k \neq 1$

Kết hợp các trường hợp ta có: $\dfrac{1}{2} < k < \dfrac{3}{2} \ \wedge\ k \neq 1$

2) $4^{-|x-k|}.\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) \ + \ 2^{-x^2+2x}.\log_{\frac{1}{2}}(2|x-k| + 2) = 0$ (2)

Ta có:

$(2) \Leftrightarrow 4^{-|x-k|}.\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 3) = 2^{-x^2+2x}.\log_2(2|x-k| + 2)$

$\Leftrightarrow 2^{-2|x-k|+1}.\log_2(x^2 - 2x + 3) = 2^{-x^2+2x}.\log_2(2|x-k| + 2)$

$\Leftrightarrow 2^{-(2|x-k|-1)}.\log_2(x^2 - 2x + 3) = 2^{-(x^2-2x)}.\log_2(2|x-k| + 2)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x}.\log_2(x^2 - 2x + 3) = 2^{2|x-k|-1}.\log_2(2|x-k| + 2)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+3}.\log_2(x^2 - 2x + 3) = 2^{2|x-k|+2}.\log_2(2|x-k| + 2)$

Ta thấy: $\begin{cases} a = x^2 - 2x + 3 \ \geq \ 2 \\ b = 2|x-k| + 2 \ \geq \ 2 \end{cases}$. Đặt $f(t) = 2^t.\log_2 t$, $t \geq 2$ thì f(t) là hàm đồng biến (vì f(t) là tích 2 hàm đồng biến không âm).

Nên $\forall a, b \geq 2$ hệ thức $2^a\log_2 a = 2^b\log_2 b$.

Chỉ xảy ra khi a = b.

Khi đó $(2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2|x-k| + 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2|x-k|$ (1)

Vậy để (2) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm.

Ta có các trường hợp sau:

* (a) có 2 n^0 phân biệt ; (b) có n^0 kép không là n^0 của (a)

$$\Rightarrow \begin{cases} -2k+3>0 \\ 2k-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k<\dfrac{3}{2} \\ k=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow k=\frac{1}{2}.$$

Thế vào (a), (b) thỏa mãn

* (a) có n^0 kép; (b) có 2 n^0 phân biệt không là n^0 của (a)

$$\Rightarrow \begin{cases} -2k+3=0 \\ 2k-1>0 \end{cases} \Rightarrow k=\frac{3}{2}.$$ Thế vào (a), (b) thỏa mãn

* (a), (b) có 2 n^0 phân biệt và chúng có 1 n^0 chung

$$\Rightarrow \begin{cases} -2k+3>0 \\ 2k-1>0 \\ f(\sqrt{2k-1})=0 \text{ hoặc } f(-\sqrt{2k-1})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}<k<\dfrac{3}{2} \\ k=1 \end{cases} \Leftrightarrow k=1.$$

Thế vào (a), (b) thỏa mãn. Vậy $k=\frac{1}{2}$; $k=\frac{3}{2}$; $k=1$.

Câu 2. $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$, (*).

Do $x \in [0; 1]$.

Đặt $x=\cos\alpha \Rightarrow \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$(*) \Leftrightarrow 8\cos\alpha(2\cos^2\alpha-1)(8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1)=1$

$\Leftrightarrow 8\cos\alpha.\cos2\alpha[2(2\cos^2\alpha-1)^2-1]=1$

$\Leftrightarrow 8\cos\alpha.\cos2\alpha[2\cos^2 2\alpha-1]=1 \Leftrightarrow 8\cos\alpha.\cos2\alpha.\cos4\alpha=1$ (1)

Ta thấy $\alpha=0$ và $\alpha=\pi/2$ thì (1) không thỏa mãn $\Rightarrow \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

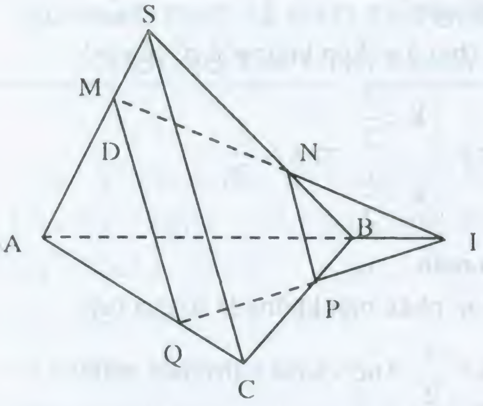
$(1) \Leftrightarrow 4.2\sin\alpha.\cos\alpha.\cos2\alpha.\cos4\alpha=\sin\alpha$

$\Leftrightarrow 2.2\sin2\alpha.\cos2\alpha.\cos4\alpha=\sin\alpha$

$$\Leftrightarrow \sin8\alpha=\sin\alpha \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=\dfrac{k2\pi}{7} \\ \alpha=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{k2\pi}{9} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=\dfrac{2\pi}{7} \\ \alpha=\dfrac{\pi}{9} \\ \alpha=\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right.$$

Nghiệm phương trình: $x=\cos\frac{2\pi}{7}$; $x=\cos\frac{\pi}{9}$; $x=\cos\frac{\pi}{3}$

Câu 3.



Gọi I = MN $\cap$ AB , α // SC = (SCA) $\cap$ (SBC)

$\Rightarrow$ (α) $\cap$ (SAC) = MQ;

(α) $\cap$ (SBC) = NP

$\Rightarrow$ MQ // NP // SC. Vì M, N, I thẳng hàng $\Rightarrow$ Q, P, I thẳng hàng.

Áp dụng Menelaus vào ΔABC ta có: $\dfrac{IB}{IA}\cdot\dfrac{PC}{PB}\cdot\dfrac{QA}{QC}=1$.

Mà $\dfrac{PC}{PB}=\dfrac{NS}{NB}=2$; $\dfrac{QA}{QC}=\dfrac{MA}{MS}=2$ $\Rightarrow$ $\dfrac{IB}{IA}=\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $IB=\dfrac{1}{3}AB$; $IA=\dfrac{4}{3}AB$.

Gọi h là độ dài đường cao xuất phát từ S và $V_1 = V_{AMQNBP}$; $V_2 = V_{SMNQCP}$

Ta có: $V_1 = V_{MAQI} - V_{NBPI} = \dfrac{1}{3}S_{AQI}.h_M - \dfrac{1}{3}S_{PBI}.h_N$

Vì $S_{AQI} = \dfrac{1}{2}AI.AQ.\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}AB\cdot\dfrac{2}{3}AC.\sin A = \dfrac{8}{9}S_{ABC}$

$S_{BPI} = \dfrac{1}{2}BP.BI.\sin B = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}BC.\dfrac{1}{3}AB.\sin B = \dfrac{1}{9}S_{ABC}$

$\Rightarrow V_1 = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{8}{9}.S_{ABC}.h_M - \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{9}.S_{ABC}.h_N = \dfrac{1}{27}S_{ABC}(8h_M - h_N)$

Do $\dfrac{h_M}{h}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow h_M=\dfrac{2}{3}h$; $\dfrac{h_N}{h}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow h_N=\dfrac{1}{3}h$

$\Rightarrow V_1 = \dfrac{1}{27}S_{ABC}\left(\dfrac{16h-h}{3}\right) = \dfrac{5}{27}S_{ABC}.h = \dfrac{5}{9}V_{SABC}$

Mà $V_2 = V_{SABC} - V_1 = V_{SABC} - \dfrac{5}{9}V_{SABC} = \dfrac{4}{9}V_{SABC}$. Vậy: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\dfrac{5}{9}V}{\dfrac{4}{9}V} = \dfrac{5}{4}$

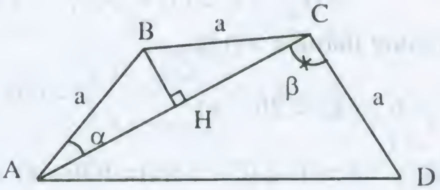
Câu 4. $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\alpha x}.\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}$.

Ta có: $A = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\alpha x}.\sqrt[m]{1+\beta x}-\sqrt[m]{1+\beta x}+\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}$

$$A = \lim_{x\to 0}\sqrt[m]{1+\beta x}\,\frac{\left[\sqrt[n]{1+\alpha x}-1\right]}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x} = 1.\frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{m}.$$

Vậy: $A = \dfrac{\alpha}{n}+\dfrac{\beta}{m}$

Câu 5.



Tìm giá trị lớn nhất của S_{ABCD}: Đặt $\widehat{BAC} = \alpha$; $\widehat{ACD} = \beta$.

Ta có: $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \dfrac{1}{2}BH.AC + \dfrac{1}{2}AC.CD\sin\beta$

$\Rightarrow S_{ABCD} \le AH.BH + AH.CD$

$\Leftrightarrow S_{ABCD} \le AH(BH + CD) = a\cos\alpha[a\sin\alpha + a]$

$\Leftrightarrow S_{ABCD} \le a^2\cos\alpha(1+\sin\alpha) \Leftrightarrow S^2 \le a^4\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)^2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sin\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \dfrac{\pi}{2}$

Do $\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)^2 = (1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)^3 = \dfrac{1}{3}(3-3\sin\alpha)(1+\sin\alpha)^3$

Vì: $3 - 3\sin\alpha > 0$; $1 + \sin\alpha > 0$

$$\Rightarrow \frac{(3-3\sin\alpha)+(1+\sin\alpha)+(1+\sin\alpha)+(1+\sin\alpha)}{4}$$

$$\ge \sqrt[4]{(3-3\sin\alpha)(1+\sin\alpha)^3}$$

$$\Leftrightarrow (3-3\sin\alpha)(1+\sin\alpha)^3 \le \left(\frac{3}{2}\right)^4 \Leftrightarrow S^2 \le \frac{a^4}{3}\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)^2 \le \frac{a^4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow S \le \frac{a^2}{\sqrt{3}}.\frac{9}{4} = 3a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Vậy: $\text{MaxS} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = 90^0\\ 3-3\sin\alpha = 1+\sin\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta = 90^0\\ \alpha = 30^0\end{cases}$

Câu 6.

+ Gọi M(x,y) ∈ (C) là đồ thị của f và điểm M' đối xứng của M qua A.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{x_M + x_{M'}}{2} \\ y_A = \dfrac{y_M + y_{M'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_0 - x \\ y_{M'} = 2y_0 - y \end{cases} \Rightarrow M'(2x_0 - x,\ 2y_0 - y)$$

+ Vì đồ thị đối xứng qua A $\Rightarrow M' \in (C) \Rightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ 2y_0 - y = f(2x_0 - x) \end{cases}$

$$\Rightarrow 2y_0 = f(x) + f(2x_0 - x) \qquad (1)$$

+ Điểm đối xứng của M qua đường thẳng x = b là

$N(2b - x, y)$, (do $\dfrac{x_M + x_N}{2} = b \Rightarrow x_N = 2b - x$).

+ Đồ thị đối xứng qua đường thẳng $x = b \Rightarrow N \in (C) \Rightarrow f(x) = f(2b - x)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} 2y_0 = f(x) + f(2x_0 - x) & (1) \\ f(x) = f(2b - x) & (2) \end{cases}$

Trong (2) thay $x = 2x_0 - x$,

(2) $\Leftrightarrow f(2x_0 - x) = f(2b - 2x_0 + x)$

(1) $\Leftrightarrow 2y_0 = f(x) + f(2b - 2x_0 + x)$ (3)

Trong (3) thay $x = 2b - 2x_0 + x$

$\Leftrightarrow 2y_0 = f(2b - 2x_0 + x) + f(4b - 4x_0 + x)$ (4)

(3) – (4) $\Leftrightarrow f(x) = f(4b - 4x_0 + x)$

Vậy f là hàm tuần hoàn chu kỳ $T = 4b - 4x_0$.

Câu 7. Đặt: $x = \dfrac{1}{2} + \alpha;\ y = \dfrac{1}{2} - \alpha \ ,\left(0 \le |\alpha| < \dfrac{1}{2}\right)$

Ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\dfrac{1}{2} + \alpha\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2} - \alpha\right)^2 = \dfrac{1}{2} + 2\alpha^2 \\ xy = \dfrac{1}{4} - \alpha^2 \end{cases}$

Nên: $S = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2} + 2\alpha^2} + \dfrac{A}{\dfrac{1}{4} - \alpha^2} = \dfrac{2}{1 + 4\alpha^2} + \dfrac{4A}{1 - 4\alpha^2}$

Đặt: $t = 4\alpha^2 \Rightarrow 0 \le t < 1$.

$S = f(t) = \dfrac{2}{1 + t} + \dfrac{4A}{1 - t}, t \in [0;1)$

$$f'(t) = -\frac{2}{(1+t)^2} + \frac{4A}{(1-t)^2} = \frac{2(2A(1+t)^2 - (1-t)^2)}{(1-t^2)^2}$$

Nên: $f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 2A(1+t)^2 \geq (1-t)^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2A}\,(1+t) \geq 1 - t, \ (0 \leq t < 1) \Leftrightarrow t \geq \frac{1-\sqrt{2A}}{1+\sqrt{2A}} \qquad (1)$$

a) Nếu: $1 - \sqrt{2A} \leq 0 \Leftrightarrow A \geq 1/2$: (1) thỏa mãn $\forall t \in [0;\,1)$

Do đó: $f'(t) \geq 0, \forall t \in [0;\,1)$. $\text{Minf}(t) = f(0) = 2 + 4A = \text{MinS}$

b) Nếu: $1 - \sqrt{2A} > 0 \Leftrightarrow A < \dfrac{1}{2}$

$$\text{Min.f}(t) = f\left(\frac{1-\sqrt{2A}}{1+\sqrt{2A}}\right) \Rightarrow \text{MinS} = \frac{2}{1+\dfrac{1-\sqrt{2A}}{1+\sqrt{2A}}} + \frac{4A}{1-\dfrac{1-\sqrt{2A}}{1+\sqrt{2A}}}$$

$$\Leftrightarrow \text{MinS} = \left(1+\sqrt{2A}\right)^2$$

Vậy: $\text{MinS} = 4A + 2 \Leftrightarrow A \geq 1/2$

$\text{MinS} = (1 + \sqrt{2A})^2 \Leftrightarrow A < 1/2$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NINH THUẬN
TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN

Câu 1.

$$2007^{\sin^2 x} + 2007^{\cos^2 x} = 2009 + \cos 2y$$

$$\Leftrightarrow 2007^{\sin^2 x} + 2007^{\cos^2 x} - 2008 = 1 + \cos 2y$$

$$\Leftrightarrow 2007^{\sin^2 x} + \frac{2007}{2007^{\sin^2 x}} - 2008 = 1 + \cos 2y \qquad (1)$$

Đặt: $U = 2007^{\sin^2 x}$

$x \in R \Leftrightarrow 1 \leq U \leq 2007$

(1) trở thành: $U + \dfrac{2007}{U} - 2008 = 2\cos^2 y$

$$\Leftrightarrow \frac{U^2 - 2008U + 2007}{U} = 2.\cos^2 y$$

$$\Leftrightarrow \frac{(U-1)(U-2007)}{U} = 2.\cos^2 y \qquad (2)$$

Do $1 \leq U \leq 2007$ nên $\dfrac{(U-1)(U-2007)}{U} \leq 0 \qquad (3)$

Mặt khác: $\cos^2 y \geq 0$ (4)

Từ (3) và (4) ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (U-1)(U-2007)=0 \\ \cos^2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} U=1 \\ U=2007 \end{array}\right. \\ \cos y = 0 \end{cases}$$

Vậy ta có: $\begin{cases} 2007^{\sin^2 x} = 2007 \\ \cos y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} 2007^{\sin^2 x} = 1 \\ \cos y = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = k\pi \\ y = \dfrac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} \text{ với } k, l \in \pi$$

Câu 2. Bất phương trình viết lại:

$$-\log_a(\sqrt{x^2+2ax+20}+2).\log_6(x^2+2ax+22)+\log_a 4 \geq 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+2ax+20}$; $t \geq 0$ BPT trở thành:

$$-\log_a(t+2).\log_6(t^2+2)+2.\log_a 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_a 2\left[\log_2(t+2).\log_6(t^2+2)-2\right] \leq 0 \quad (2)$$

Trường hợp 1: $0 < a < 1$

Ta có $\log_a 2 < 0$. Do đó: (2) $\Leftrightarrow \log_2(t+2).\log_6(t^2+2) - 2 \geq 0$ (3)

Đặt: $f(t) = \log_2(t+2).\log_6(t^2+2) - 2$

$f(t)$ hàm đồng biến, do đó: (3) $\Leftrightarrow f(t) \geq f(2) \Leftrightarrow t \geq 2$

Vậy: $\sqrt{x^2+2ax+20} \geq 2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2ax + 16 \geq 0$; đúng $\forall x$ (vì $a \in (0, 1)$) $\Rightarrow a \in (0, 1)$ không chấp nhận

Trường hợp 2: $a > 1$

$\log_2 2 > 0$ nên (2) $\Leftrightarrow \log_2(t+2).\log(t^2+2) - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow t \leq 2$ (Tương tự trường hợp 1)

Ta có: $\sqrt{x^2+2ax+20} \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2ax+16 \leq 0 & (4) \\ x^2+2ax+20 \geq 0 & (5) \end{cases}$

Đặt: $g(x) = x^2 + 2ax + 16$

$h(x) = g(x) + 4$

* $1 < a < 4 \Rightarrow \Delta'_g < 0 \Rightarrow$ (4) VN $\Rightarrow a \in (1, 4)$ không chấp nhận

* $a > 4 \Rightarrow \Delta'_g > 0 \Rightarrow \exists x_1, x_2$ để $g(x_1) = g(x_2) = 0$

Ta có: $\begin{cases} h(x_1) = g(x_1) + 4 > 0 \\ h(x_2) = g(x_2) + 4 > 0 \end{cases}$

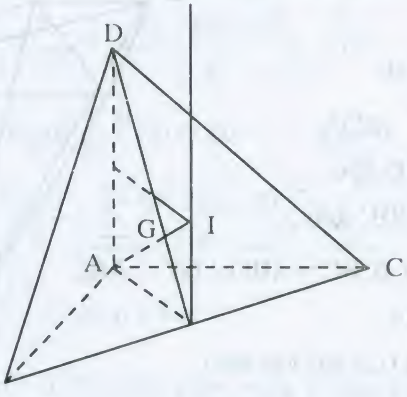
Vậy x_1, x_2 là nghiệm của hệ. Vậy $a \in (4; +\infty)$ không chấp nhận

* $a = 4$

Ta có: $\begin{cases} x^2 + 8x + 16 \le 0 \\ x^2 + 8x + 20 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -4$

Vậy a = 4 thì bất phương trình đã có nghiệm duy nhất $x = -4$.

Câu 3.



Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và G là trọng tâm tam giác BCD. Ta chứng minh được:

* I, G, A thẳng hàng.

* $\overrightarrow{IA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GA}$

Ta có: $MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3MA^2$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) + IB^2 + IC^2 + ID^2 = 6.\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + 3IA^2$ (*)

Vì IA = IB = IC = ID và $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IG}$

Nên (*) $\Leftrightarrow 6.\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IG} = 6\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IG} - \overrightarrow{IA}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AG} = 0 \Leftrightarrow MI \perp AG$

$\Leftrightarrow$ M thuộc mặt phẳng (α) đi qua I và vuông góc với AI.

Câu 4.

$x_n = 4n^2 + (4.9 + 2)n$

$x_n = (2n + 9)^2 + 2n - 81$

Nên $x_n > (2n + 9)^2$ với n đủ lớn (1)

Mặt khác: $2n - 81 < 2(2n + 9) + 1$

Do đó: $x_n < (2n+9)^2 + 2(2n+9) + 1$

$x_n < (2n+10)^2$ (2)

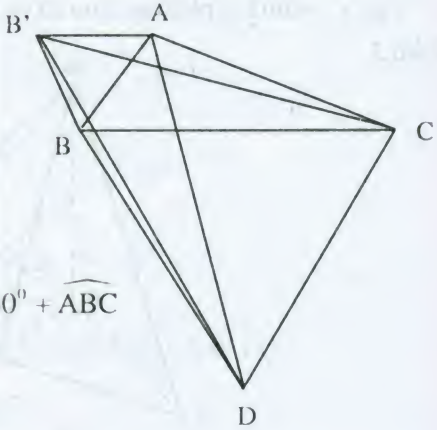
Từ (1) và (2) ta có $(2n+9)^2 < x_n < (2n+10)^2$ với n đủ lớn

$\Rightarrow 2n + 9 < \sqrt{x_n} < 2n + 10 \Rightarrow [\sqrt{x_n}] = 2n + 9$

Vậy $\{\sqrt{x_n}\} = \sqrt{(2n+9)^2 + 2n - 81} - (2n+9) = \dfrac{2n-81}{\sqrt{(2n+9)^2 + 2n - 81} + 2n + 9}$

Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{x_n}\right\} = \dfrac{1}{2}$

Câu 5.



Phép quay: $Q_A^{-60^\circ}: B \to B'$

Xét 2 tam giác: ΔBCB', ΔBDA

Ta có: BC = BD vì ΔBCD đều

BB' = BA vì ΔABB' đều

$\widehat{B'BC} = \widehat{ABD}$ vì $\widehat{B'BC} = \widehat{ABD} = 60^0 + \widehat{ABC}$

$\Rightarrow \Delta BCB' = \Delta BDA$

Vậy AD = B'C do đó AD độ dài lớn nhất

⇔ B'C độ dài lớn nhất.

– Áp dụng định lý hàm số côsin cho ΔAB'C ta có:

$B'C^2 = AB'^2 + AC^2 - 2AB'.AC.\cos\widehat{B'AC}$

$B'C^2 = 2^2 + 5^2 - 2.2.5.\cos\widehat{B'AC}$

$B'C^2 = 29 - 20\cos\widehat{B'AC}$

B'C độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow \cos\widehat{B'AC} = -1 \Leftrightarrow \widehat{B'AC} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 120^0$

Vậy: AD độ dài lớn nhất khi $\widehat{BAC} = 120^0$

Câu 6. Do f đồng biến nên:

$f(n) < f(n+1) < f(n+1) < ... < f(2n) = f(n) + n \Rightarrow f(n+1) = f(n) + 1$ nên

$f(n) = f(n-1) + 1 = ... = f(1) + n - 1$

$f(f^2(1) + f(1) + 2) = (f(1)+1)^2 \Rightarrow f^2(1) + f(1) + 2$ là một số chính phương

$\rightarrow f(1) = 1$

Vậy: $f(n) = n$

Thử lại thỏa mãn điều kiện do đó: $f(n) = n; \forall n \in N^* \Rightarrow f(2007) = 2007$

Câu 7.

Gọi x_i là số người đến đọc sách được i ngày ($i = 1,2 ... K$) và $K \le 10$.

Gọi n là số người đã đến thư viện trong 10 ngày đó thì ta có:

$$n = x_1 + x_2 + .. + x_K \qquad (1)$$

$$80 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + Kx_K \qquad (2)$$

Gọi y là số cách chọn 2 ngày sao cho không có người nào đến thư viện quá 1 lần trong 2 ngày đó.

Vì trong 2 ngày bất kỳ của 10 ngày có ít nhất là 15 người khác nhau cùng đến thư viện, nên trong 2 ngày bất kỳ của 10 ngày đó có không quá 1 người đến thư viện trong cả 2 ngày đó.

Nên ta có: $C_{10}^2 = C_2^2x_2 + C_3^2x_3 + ... + C_K^2x_K + y \qquad (3)$

Nhận xét: $x_i - \frac{2}{3}ix_i + \frac{1}{3}C_i^2x_i = \frac{(i-2)(i-3)}{6}x_i \geq 0$

Lấy (1) trừ $\frac{2}{3}$ × (2) cộng $\frac{1}{3}$ × (3) ta có

$$n - \frac{115}{3} = \frac{x_1 + y}{3} + \sum_{i=2}^{K}\frac{(i-2)(i-3)}{6}x_i \geq 0$$

$$\Rightarrow n \geq \left[\frac{115}{3}\right] + 1 \Leftrightarrow n \geq 39$$

Vậy số người tối thiểu đi đến thư viện trong 10 ngày là 39.

Bảng số liệu đến đọc sách của 39 người thỏa bài toán (gọi tên người là 1, 2,..., 39)								
Ngày thứ 1	1	3	4	5	6	7	8	9
Ngày thứ 2	1	10	11	12	13	14	15	16
Ngày thứ 3	1	17	18	19	20	21	22	23
Ngày thứ 4	2	3	10	17	24	25	26	27
Ngày thứ 5	2	4	11	18	28	29	30	31
Ngày thứ 6	2	5	12	19	32	33	34	35
Ngày thứ 7	6	13	20	32	28	24	36	37
Ngày thứ 8	7	14	21	33	29	39	26	38
Ngày thứ 9	8	15	22	34	30	39	25	36
Ngày thứ 10	9	16	23	35	31	27	38	37

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KON TUM
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KON TUM

Câu 1. Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x - m > 0 \end{cases}$ (1)

Phương trình (1)

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x^2 - 3x + 2} - \log_2(x - m) = x - m - \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \log_2(x - m) + x - m \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên TXĐ $(0; +\infty)$

$$f'(t) = \frac{1}{t\ln 2} + 1 > 0 \ \forall t \in (0;+\infty)$$

Suy ra f(t) đồng biến trên TXĐ.

Do đó PT (2) viết dưới dạng $f(\sqrt{x^2 - 3x + 2}) = f(x - m)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = x - m \Leftrightarrow (2m - 3)x = m^2 - 2 \quad (3)$$

Nếu $2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$, PT (3) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm.

Nếu $2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$, PT (3) $\Leftrightarrow x = \frac{m^2 - 2}{2m - 3}$

So điều kiện ta được $m < 1 \vee \frac{3}{2} < m < 2$

Kết luận: * $m < 1 \vee \frac{3}{2} < m < 2$: (1) có nghiệm $x = \frac{m^2 - 2}{2m - 3}$

* Các TH còn lại (1) vô nghiệm

Câu 2. Phương trình (1) $\Leftrightarrow y^2 - x^2 = \ln(x^2 + 1) - \ln(y^2 + 1)$

$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) + x^2 + 1 = \ln(y^2 + 1) + y^2 + 1$ (3)

Xét hàm số $f(t) = \ln t + t$ với $t \in D = \{\mathbb{R} / t \geq 1\}$

Phương trình (3) có dạng $f(x^2 + 1) = f(y^2 + 1)$ (4)

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t} + 1 > 0 \ \forall t \in D \Rightarrow$ f(t) đồng biến trên D.

Do đó (4) $\Leftrightarrow x^2 + 1 = y^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm y$

* Với $x = -y$, từ (2) ta được $\log_3(6 - x) = 1$, với $x < 6$

$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = -3$ (thỏa mãn hệ)

* Với $x = y$, từ (2) ta được $3\log_3(x + 2) = 2\log_2(x + 1)$ với $x > -1$

Đặt $3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1) = 6u \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 3^{2u} \\ x+1 = 2^{3u} \end{cases}$

$$\Rightarrow 1 + 2^{3u} = 3^{2u} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u = 1 \qquad (5)$$

Xét hàm số $f(u) = \left(\frac{1}{9}\right)^u + \left(\frac{8}{9}\right)^u$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và có $f(1) = 1$ nên $u = 1$ là nghiệm duy nhất của (5).

Với $u = 1$ suy ra $x = y = 7$ (thỏa mãn hệ). Vậy hệ có 2 nghiệm $(3; -3)$, $(7; 7)$

Câu 3. Mặt phẳng (P) cắt hình chóp theo thiết diện là hình bình hành MNEF. Gọi I và J lần lượt là hình chiếu của A và D xuống mặt phẳng (P).

Theo giả thiết ta có $\frac{AI}{DJ} = \frac{MA}{MD} = \frac{EB}{EC} = k$ (k là tỷ số khoảng cách từ A, D đến mặt phẳng (P)).

Đặt $AB = a$, $CD = b$ và α là góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

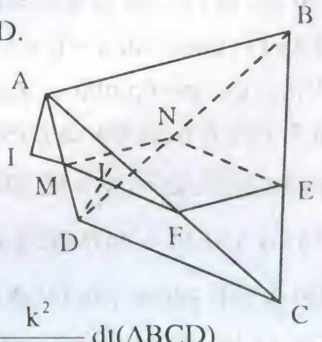
Ta có: $$dt(MNEF) = \frac{abk}{(k+1)^2}\sin\alpha. \qquad (1)$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD là $d = AI + DJ$

$$\Rightarrow AI = \frac{k}{k+1}d. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $V_{AMNEF} = \frac{1}{3}.\frac{abd}{(k+1)^3}k^2\sin\alpha = \frac{2k^2}{(k+1)^3}.V \qquad (3)$

trong đó $V = \frac{1}{6}abd\sin\alpha$ là thể tích tứ diện ABCD.



Do $\frac{BN}{BD} = \frac{k}{k+1}$ và NE // CD nên $dt(\Delta BNE) = \frac{k^2}{(k+1)^2}dt(\Delta BCD)$.

Suy ra $V_{A.BNE} = \frac{1}{3}.AH.dt(\Delta BNE) = \frac{1}{3}AH.\frac{k^2}{(k+1)^2}dt(\Delta BCD)$

$$= \frac{k^2}{(k+1)^2}V \text{ (với } AH \perp (BCD)) \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có $V_{ABMNEF} = V_{A.MNEF} + V_{A.BNE} = \dfrac{k^2}{(k+1)^3}(k+3)V$ (5)

Tương tự $V_{CDMNEF} = \dfrac{3k+1}{(k+1)^3}V$ (6)

Từ (5) và (6) ta có $\dfrac{V_{ABMNEF}}{V_{CDMNEF}} = \dfrac{k^2(k+3)}{3k+1}$.

Câu 4. Ta chứng minh $S_n = (u_{n+1} - 1)^2$ (1)

Với $n = 1$, $S_1 = (u_1^2 + 1) - 1 = u_1^2 = 1 = (2-1)^2 = (u_2 - 1)^2$

Vậy (1) đúng với $n = 1$

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, ta có $S_k = (u_{k+1} - 1)^2$ (2)

Ta có $S_{k+1} = \left(u_1^2+1\right)\left(u_2^2+1\right)\left(u_3^2+1\right)\ldots\left(u_{k+1}^2+1\right)-1 = S_k(u_{k+1}^2 + 1) - 1$

Thay (2) vào (3) ta được: $S_{k+1} = [(u_{k+1}-1)^2+1]\left(u_{k+1}^2+1\right)-1$

$$= [\left(u_{k+1}^2+1\right) - 2u_{n+1} + 1]\left(u_{k+1}^2+1\right) - 1$$

$$= \left(u_{k+1}^2+1\right)^2 - 2u_{k+1}\left(u_{k+1}^2+1\right) + \left(u_{k+1}^2+1\right) - 1$$

$$= \left(u_{k+1}^2+1\right)^2 - 2u_{k+1}\left(u_{k+1}^2+1\right) + u_{k+1}^2 = \left(u_{k+1}^2+1-u_{k+1}\right)^2 \quad (4)$$

Mặt khác ta có:

$$u_{k+1}^2 + 1 - u_{k+1} = u_{k+1}(u_{k+1} - 1) + 1$$

$$= [u_{k+1}(u_{k+1} - 1) + 2] - 1 = u_{k+2} - 1 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $S_{k+1} = (u_{k+2} - 1)^2$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$

Vì u_1, u_2 nguyên nên u_n nguyên $\forall n$ nên từ (1) suy ra S_n là số chính phương.

Câu 5. Lấy E trên AB và F trên AC sao cho AE = AF = AD.

Phân giác của $\widehat{BAD}$ và $\widehat{DAC}$ lần lượt cắt EF tại M và N.

Ta có ΔAEM = ADM (c.g.c) ⇒ $\widehat{AEM} = \widehat{ADM}$.

Do ΔAEF vuông cân tại A nên $\widehat{AEM} = \widehat{ADM} = 45^0$.

Suy ra MD là phân giác của góc $\widehat{ADB}$.

Suy ra M là tâm đường tròn nội tiếp ΔABD.

Lý luận tương tự có DN là phân giác của góc $\widehat{ADC}$.

Suy ra N là tâm đường tròn nội tiếp ΔACD. Suy ra E ≡ K, F ≡ L.

Từ đó ta có $T = S_{AKL} = S_{AEF} = \dfrac{1}{2}AE.AF = \dfrac{1}{2}AD^2$. (1)

Ta có $\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}\geq\frac{2}{AB.AC}=\frac{2}{2S}=\frac{1}{S}$. (2)

Theo (1) thì $\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{2T}$, thay vào (2) ta có $\frac{1}{2T}\geq\frac{1}{S}$ hay $S\geq 2T$.

Từ (2), dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân tại đỉnh A.

Câu 6. Nếu phương trình trên có ít nhất một nghiệm nguyên x, y thì x hoặc là chẵn hoặc là lẻ.

Nếu x là số chẵn ta có $x = 2x_1$, với x_1 là một số nguyên. Từ phương trình đã cho ta được $(2x_1)^2 + 1 = 4y^5$ hay $4x_1^2 + 1 = 4y^5$. Suy ra $x_1^2 + \frac{1}{4} = y^5$. Điều này mâu thuẫn với x và y là các số nguyên.

Nếu x là số lẻ ta có $x = 2x_1 + 1$, với x_1 là một số nguyên. Từ phương trình đã cho ta được

$(2x_1 + 1)^2 + 2 = 4y^5$ hay $4x_1^2 + 4x_1 + 2 = 4y^5$. Suy ra $x_1^2 + x_1 + \frac{1}{2} = y^5$. Điều này mâu thuẫn với x và y là các số nguyên.

Vậy phương trình đang xét không có nghiệm nguyên.

Câu 7. Ta sẽ chứng minh trong hình vuông cạnh 10 cũng có thể đặt được các hình tròn thỏa mãn bài toán.

Chia mỗi cạnh hình vuông 10×10 thành n đoạn bằng nhau, độ dài mỗi đoạn là $\frac{10}{n}$, ta được n^2 hình vuông nhỏ, trong mỗi hình vuông nhỏ vẽ đường tròn nội tiếp. Bán kính mỗi đường tròn là $\frac{5}{n}$.

Tổng các bán kính là $n^2.\frac{5}{n} = 5n$

Để tổng các bán kính bằng 1000, phải có $5n = 1000 \Rightarrow n = 200$.

Như vậy, ta chia cạnh của hình vuông 10×10 thành 200 đoạn thẳng bằng nhau, mỗi đoạn dài $\frac{1}{20}$, ta được 40000 hình vuông nhỏ.

Các hình tròn nội tiếp các hình vuông nhỏ ấy được xếp thành những dãy không chờm lên nhau và tổng các bán kính của chúng bằng

$$40000.\frac{1}{40} = 1000.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒNG NAI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH

Câu 1. Từ giả thiết ta có: tồn tại các góc nhọn x, y, z sao cho a = tanx; b = tany; c = tanz

Do đó $VT = \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm số f(x) = 1/sinx trên $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có: $f''(x) = \frac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x} > 0 \quad \forall x \in D$

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

Câu 2. Ta có các tính chất sau của dãy số Fibonaci

$f_{n-2} = 3f_{n-5} + 2f_{n-6}$

$f_n = 8f_{n-5} + 5f_{n-6}$

$f_{n+2} = 21f_{n-5} + 13f_{n-6}$

$f_{n+6} = 144f_{n-5} + 89f_{n-6}$

Suy ra: $g_n = 216f_{n-5} + 135f_{n-6} = 27(8f_{n-5} + 5f_{n-6}) = 27f_n$

Ngoài ra ta có UCLN $\{f_m; f_n\} = f_{ucln\{m;\, n\}}$

Do đó ta suy ra:

$$UCLN\{g_{f(6666)}; g_{f(666)}\} = UCLN\{27f_{f(6666)}; 27f_{f(666)}\} = 27UCLN\{f_{f(6666)}; f_{f(666)}\}$$
$$= 27f_{UCLN\{f(6666);\, f(666)\}} = 27f_{f_{UCLN(6666;\ 666)}} = 27f_{f_6} = 27f_8 = 27.21 = 567$$

Câu 3. Biến đổi phương trình về dạng: $\sin^{1975} x - \frac{1}{\sin^{2007} x} = \cos^{1975} x - \frac{1}{\cos^{2007} x}$

Nhận xét rằng $|\sin x| = 1$ không là nghiệm của phương trình vì nếu sinx = ±1, thì phương trình không thỏa mãn. Tương tự $|\cos x| = 1$ cũng không là nghiệm của phương trình.

Khảo sát hàm số $f(t) = t^{1975} - \frac{1}{t^{2007}}$ với $t \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Ta có $f'(t) = 1975.t^{1974} + \frac{2007}{t^{2008}} > 0$ với mỗi t thuộc (–1; 0) ∪ (0; 1). Nên hàm số tăng trên mỗi khoảng. Ngoài ra hàm số này với $t \in (0; 1)$ sẽ chỉ nhận giá trị âm và với $t \in (-1; 0)$ chỉ nhận giá trị dương, cho nên mỗi giá trị f(t) trên khoảng này không thể ứng với giá trị f(t) trên khoảng kia. Cho nên phương trình f(sinx) = f(cosx) tương đương với

$$\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n \text{ ,với n là số nguyên.}$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐÀ LẠT
TRƯỜNG THPT CHUYÊN THĂNG LONG

Câu 1. Bất đẳng thức tương đương với

$$1-\frac{2}{2+a}+1-\frac{2}{2+b}+1-\frac{2}{2+c}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{a}{2+a}+\frac{b}{2+b}+\frac{c}{2+c}\ge 1.$$

Tồn tại các số thực x, y, z sao cho $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$. Ta phải chứng minh

$$\frac{x/y}{2+x/y}+\frac{y/z}{2+y/z}+\frac{z/x}{2+z/x}\ge 1$$

$$\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+2z}+\frac{z}{z+2x}\ge 1.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy– Schwarz ta có

$$\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+2z}+\frac{z}{z+2x}\ge \frac{(x+y+z)^2}{x(x+2y)+y(y+2z)+z(z+2x)}=1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y = z hay a = b = c = 1

Câu 2. Giả sử các mặt của tứ diện ABCD có diện tích bằng nhau. Vẽ đường cao CH, DK của các mặt (CAB), (DAB) và đường vuông góc chung EF của AB, CD.

Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng AB tại O (O là điểm tùy ý thuộc AB) song song với DK, EF và CH. Từ giả thiết của bài toán suy ra CH = DK.

Xét hình chiếu của tứ diện ABCD lên mặt phẳng (P) theo phương AB. Các điểm A, K, E, H, B có hình chiếu là điểm O. Hình chiếu của C, F, D là C', F', D'.

Theo tính chất của phép chiếu song song ta có: OD' = OC' = CH.

Góc vuông EFD có một cạnh song song với mặt phẳng chiếu (P) nên ảnh của nó là góc vuông OF'C'.

Từ tam giác cân C'OD' có OF' là đường cao, ta suy ra F' là trung đểm của C'D'.

Từ đó F là trung điểm của đoạn CD.

Lập luận tương tự đối với phép chiếu lên mặt phẳng vuông góc với CD theo phương CD ta có E là trung điểm của AB. Đối với các cặp cạnh khác chứng minh tương tự.

Câu 3. $f(xf(y))+f(yf(x))=2xy$ (1)

Trong (1) cho $x=y=0 \Rightarrow f(0)=0$

Trong (1) cho $x=y \Rightarrow 2f(xf(x))=2x^2 \Leftrightarrow f(xf(x))=x^2$ (2)

Ta có nếu $f(x_1)=f(x_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1f(x_1)=x_1f(x_2) \\ x_2f(x_1)=x_2f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1f(x_1))=f(x_1f(x_2)) \\ f(x_2f(x_1))=f(x_2f(x_2)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2=f(x_1f(x_2)) \\ x_2^2=f(x_2f(x_1)) \end{cases}$$

Cộng vế ⇒ $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2$ (xem (1)) ⇔ $x_1 = x_2$ ⇒ f đơn ánh

Trong (2) cho x = 1 ⇒ $f(f(1)) = 1$ (3)

$$\Rightarrow f(1).f(f(1)) \Rightarrow f(f(1).f(f(1))) = f(f(1))$$

$$\Rightarrow f^2(1) = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ f(1) = -1 \end{array}\right.$$

TH1: $f(1) = 1$

Chọn y = 1 vào (1): $f(x) + f(f(x)) = 2x$

$$\Leftrightarrow f(f(x)) = x + x - f(x) = x + a \qquad (4)$$

với $a = x - f(x) \Leftrightarrow f(x) = x - a$ (5)

Do (5) ⇒ $f(x - a) = f(f(x)) = x + a$ (do (4))

$$\Rightarrow f(x + a) = f(f(x - a)) = (x - a) + a = x$$

$$\Rightarrow f(x) = f(f(x + a)) = x + a + a = x + 2a \qquad (6)$$

Từ (5), (6) ⇒ $x - a = x + 2a \Rightarrow a = 0$

Vậy $f(x) = x$ thử đúng.

TH2: $f(1) = -1$

(2) cho x bởi −x và vì f đơn cách ⇒ $f(-x) = -f(x)$

(1) thay y = 1 ⇒ $-f(x) + f(f(x)) = 2x$ (7)

⇒ $f(f(x)) = f(x) + 2x = x + x + f(x) = x + b$ (8)

Với $b = x + f(x) \Leftrightarrow f(x) = b - x$ (9)

⇒ $f(-x + b) = f(f(x)) = x + b$ (do (8))

⇒ $f(-(x - b)) = x + b \Rightarrow -f(x - b) = x + b$ (do f lẻ)

⇒ $f(x - b) = -x - b \Rightarrow f(-x - b) = f(f(x - b)) = x - b + b = x$

⇒ $f(x) = f(f(-x - b)) = -x - b + b = -x$ (10)

Từ (9), (10) ⇒ $-x + b = -x, \forall x \Rightarrow b = 0$

Vậy $f(x) = -x$.

Câu 4.

$$\begin{cases} (1)\ (x + \dfrac{3}{2}).\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x + \dfrac{1}{2}).\sqrt{x^2 + 1} + 2x + 2 \geq 0 \\ (2)\ \log_{m^2+1}(3.\sqrt[3]{x^2} + 1) \leq \log_{m^2+1}(m - 2x) \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow u^2 = x^2 + 1 \\ v = \sqrt{x^2 + 2x + 3} \Rightarrow v^2 = x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{v^2 - u^2 - 2}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow (v^2 - u^2 + 1).\frac{v}{2} + (v^2 - u^2 - 1).\frac{u}{2} + (v^2 - u^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (v - u)(u^2 + v^2 + 1 + 2uv + 2u + 2v) \geq 0$$

$\Leftrightarrow (v-u)(u+v+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow v > u \Leftrightarrow x \geq -1$

Từ (2) ta có: $m^2 + 1 > 1, \forall m \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 0 < 3\sqrt[3]{x^2} + 1 \leq m - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 3\sqrt[3]{x^2} + 1 + 2x \leq m \end{cases}$$

Đặt $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 1 + 2x$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi $y_{\min} \leq m$ với $x \in [-1; +\infty)$

$$y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (y' không xác định khi } x = 0)$$

Lập bảng biến thiên, suy ra $y_{\min} = 1 \Rightarrow m \geq 1$ (thỏa mãn $m \neq 0$). Đáp số: $m \geq 1$

Câu 5. Để tứ diện ABCD có $V_{\max}$ thì đường thẳng nối O với mỗi đỉnh của tứ diện phải vuông góc với mặt đối diện của đỉnh đó. Vì nếu không, chẳng hạn ta có thể tìm được điểm A' ≠ A cách mặt (BCD) một đoạn lớn hơn khoảng cách từ A đến (BCD). Vậy tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối vuông góc. Suy ra, tứ diện ABCD là tứ diện trực tâm.

Qua AB dựng mặt phẳng vuông góc với CD tại K

O là trực tâm của tứ diện. Suy ra, $O \in (ABK)$

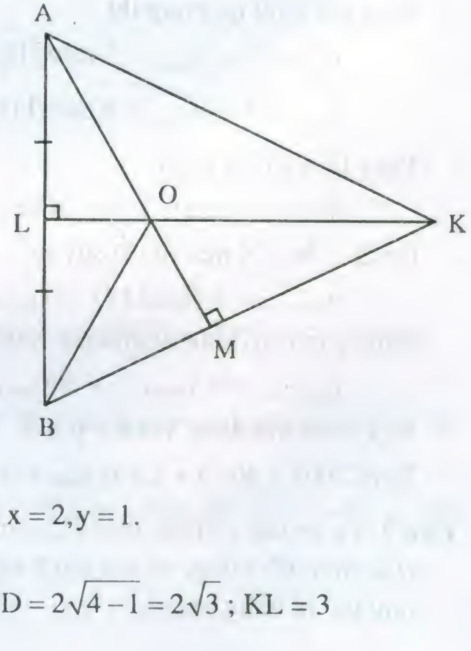
Gọi M, L là giao điểm của AO, KO với BK, AB

Dễ thấy $KL \perp AB \Rightarrow$ KL là đường vuông góc chung của AB và CD.

Vì AM, KL là hai đường cao của tam giác ABK.

$\Rightarrow \Delta ALO \backsim \Delta KMO$

$$\Rightarrow OM = \frac{OL.OK}{OA}$$



Đặt OL = x, OK = y

$$\Rightarrow OM = \frac{xy}{R}; AB = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$\Delta ALO \backsim \Delta AMB$ nên:

$$\frac{AO}{AB} = \frac{AL}{AM} = \frac{AL}{AO + OM}$$

$\Rightarrow 2x^2 + xy = R^2$

Tương tự đối với CD ta có:

$$2y^2 + xy = r^2$$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + xy = 10 \\ 2y^2 + xy = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1.$

$\Rightarrow AB = 2\sqrt{R^2 - x^2} = 2\sqrt{10 - 4} = 2\sqrt{6}; CD = 2\sqrt{4 - 1} = 2\sqrt{3}$; KL = 3

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.KL.\sin 90^0 = 6\sqrt{2}$$

$$V_{max} = 6\sqrt{2}$$

Câu 6. Dễ thấy $u_1 = 5$; $u_2 = 11$; $u_3 = 7$; $u_4 = -19$; $u_5 = -59$; $u_6 = -61$

Do $-19 = -2.11 + 3$; $-59 = -6.11 + 7$, nên từ đó ta có:

$$\begin{cases} u_1 \equiv 5 \pmod{11} \\ u_2 \equiv 0 \pmod{11} \\ u_3 \equiv 7 \pmod{11} \\ u_4 \equiv 3 \pmod{11} \\ u_5 \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$$

Vì vậy nếu gọi r_n là phần dư của u_n trong phép chia cho 11, n = 1,2, ... thì từ trên ta suy ra $r_1 = 5$; $r_2 = 0$; $r_3 = 7$; $r_4 = 3$; $r_5 = 7$

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi k = 1,2,....

$$r_{5k+1} = 5;\ r_{5k+2} = 0;\ r_{5k+3} = 7;\ r_{5k+4} = 3;\ r_{5k+5} = 7 \qquad (1)$$

Để làm điều này ta sẽ sử dụng nguyên lí quy nạp toán học.

Theo trên nhận xét này đã đúng khi k = 1. Giả sử nhận xét đã đúng đến k = p, tức là:

$$r_{5p+1} = 5;\ r_{5p+2} = 0;\ r_{5p+3} = 7;\ r_{5p+4} = 3;\ r_{5p+5} = 7$$

Xét khi k = p + 1. Ta có: $u_{5(p+1)+1} = u_{5p+6}$

Theo cách xác định dãy thì: $u_{5(p+1)+1} = 2u_{5p+5} - 3u_{5p+4}$ (2)

Theo giả thiết quy nạp thì

$$r_{5p+5} = 7 \Rightarrow u_{5p+5} \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow u_{5p+5} = 11l + 7, l \in \mathbb{Z}$$

$$r_{5p+4} = 3 \Rightarrow u_{5p+4} \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow u_{5p+4} = 11s + 3, s \in \mathbb{Z}$$

Thay lại vào (2) ta có

$$u_{5(p+1)+1} = 2(11l + 7) - 3(11s + 3) = 11(2l - 3s) + 5,\ l \in Z \qquad (3)$$

Do $2l - 3s \in Z$ nên từ (3) suy ra

$$u_{5(p+1)+1} \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow r_{5(p+1)+1} = 5$$

Bằng cách lập luận hoàn toàn tương tự ta có:

$$r_{5(p+1)+2} = 0;\ r_{5(p+1)+3} = 7;\ r_{5(p+1)+4} = 3;\ r_{5(p+1)+5} = 7$$

Vậy nhận xét đúng với k = p + 1.

Ta có 2007 = 401.5 + 2, vậy $r_{2007} = 0$, điều đó có nghĩa là $u_{2007} \vdots 11$

Câu 7. Ta có thể cố định một điểm màu xanh, kết quả tìm được sẽ nhân cho n/k. (Do tính đối xứng, số các cách sắp xếp ứng với mỗi điểm màu xanh cố định như thế là bằng nhau).

Ta phân phối n – k điểm màu đỏ vào k cung tạo bởi điểm màu xanh sao cho mỗi cung nhận ít nhất p điểm. Nói cách khác, ta phân phối n – (k + 1)p điểm vào k cung (không hạn chế).

Để ý thừa số n/k như đã nói trên, ta được số cần tìm là: $\frac{n}{k}C_{n-(k+1)p+k-1}^{k-1}$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRẦN ĐẠI NGHĨA

Câu 1.

Đặt $t = x^2 - 34x + 376$ $(t \geq 87)$, ta được phương trình tương đương:

$2^{t-283}t^3(t + 3\log_2 t) \Leftrightarrow 2^t t^3\log_2(2^t t^3) = 35.2^{283} = 2^{256}.256^3\log_2(2^{256}.256^3)$

$\Leftrightarrow t = 256$ (do hàm $f(t) = 2^t t^3\log_2(2^t t^3)$ đồng biến trên $[1; \infty)$)

$\Leftrightarrow x^2 - 34x + 376 = 256 \Leftrightarrow x = 30 \vee x = 4$

Câu 2.

$$\left[\log_{(1+2007^{-n})} c\right] = \left[\frac{\ln c}{\ln(1 + \frac{1}{2007^n})}\right] = \left[\frac{1}{\ln(2007^n + 1) - \ln(2007^n)}\right] \quad (*)$$

Xét hàm số: $y = \ln x$ với $x \in [2007^n; 2007^n + 1]$, $n \in N^*$

$$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{2007^n + 1} < \frac{\ln(2007^n + 1) - \ln 2007^n}{(2007^n + 1) - 2007^n} = \frac{1}{c} < \frac{1}{2007^n}$$

với $c \in (2007^n; 2007^n + 1)$

$$\Rightarrow 2007^n < \frac{1}{\ln(2007^n + 1) - \ln(2007^n)} < 2007^n + 1$$

Từ (*) $\Rightarrow \left[\log_{(1+2007^{-n})} c\right] = 2007^n$

Xét hàm số $f(x) = 2007^x + x - 2007^n$

Ta có f liên tục và đồng biến trên R.

Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm

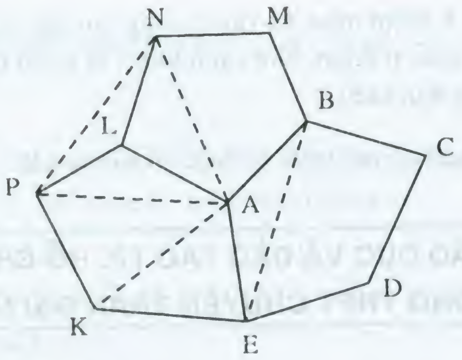
$x \in (1; 2) \Leftrightarrow f(1) < 0 \wedge f(2) > 0 \Leftrightarrow 2007 + 1 < 2007^n < 2007^2 + 2 \Leftrightarrow n = 2$

Câu 3.

Gọi (Q) là mặt trung trực của AL ⇒ (Q) cũng là mặt trung trực của BN và EP ⇒ BE = PN mà BE = PA nên PA = PN

Mặt khác LA = LN suy ra PL nằm trên mặt trung trực của AN ⇒ $PL \perp AN$ mà AK // PL ⇒ $AK \perp AN$.

Chứng minh tương tự ta có $AK \perp AC$, $AC \perp AN$



Câu 4. $\forall x \geq 0$ tồn tại a sao cho

$x = a^{2006} \Rightarrow f(x) = f(x^{2006}) = f(f(f(a))) = (f(a))^{2006} \geq 0$

$\forall x_1, x_2 < 0, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow x_1^{2006} = x_2^{2006} \Rightarrow x_1 = x_2$

suy ra f đơn ánh trên R^-

f đơn ánh, liên tục trên R^- nên f đơn điệu.

Giả sử $\exists x_0 < 0$ sao cho $f(x_0) < 0$; $f(0) \geq 0$ nên f đơn điệu tăng trên R^-

Gọi x_1 là số sao cho $x_0 < x_1 < 0 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1) < 0 \Rightarrow f(f(x_0)) < f(f(x_1))$

$\Rightarrow x_0^{2006} < x_1^{2006} \Rightarrow -x_0 < -x_1 \Rightarrow x_0 > x_1$ (vô lí)

Vậy $f(x) \geq 0 \ \forall x \in R$

Câu 5. Gọi ABCD là tứ diện có thể tích lớn nhất.

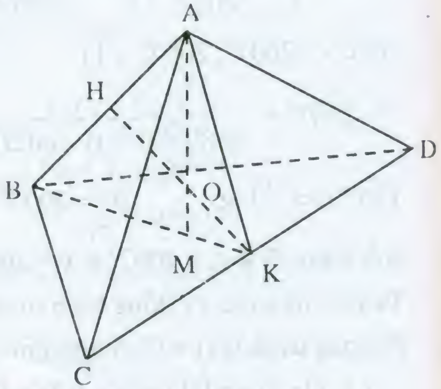
Do A di động trên mặt cầu nên phải có $OA \perp (BCD)$.

Chứng minh tương tự có

$OB \perp (ACD)$,

$OC \perp (ABD)$,

$OD \perp (ABC)$.



(Do đó ABCD là tứ diện trực tâm, trực tâm O ở trong tứ diện vì nếu ngược lại sẽ tồn tại một tứ diện khác có thể tích lớn hơn).

Cho $A, B \in (C_1)$, $R = \sqrt{10}$; $C, D \in (C_2)$, $r = 2$.

Dựng (ABK) vuông góc CD tại K, vì $AO \perp CD$ nên $O \in (ABK)$, KO cắt AB tại H.

ΔKAB có trực tâm O và OA = OB nên là tam giác cân tại K, do đó H là trung điểm của AB.

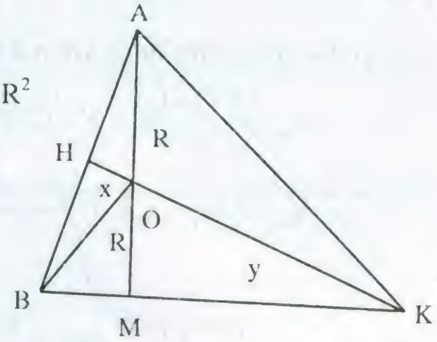
ΔHCD có trực tâm O và OC = OD nên là tam giác cân tại H, do đó K là trung điểm của CD.

Đặt OH = x, OK = y. Ta có $AB = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, $CD = 2\sqrt{r^2 - y^2}$

$$\Delta AHO \backsim \Delta KMO \Rightarrow OM = \frac{xy}{R}$$

$$\Delta AHO \backsim \Delta AMB$$

$$\Rightarrow \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{R + \frac{xy}{R}} \Rightarrow 2x^2 + xy = R^2$$



Tương tự có $2y^2 + xy = r^2$

$$\begin{cases} 2x^2 + xy = 10 \\ 2y^2 + xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Do đó $AB = 2\sqrt{6}$; $CD = 2\sqrt{3}$, HK = 3

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.HK = 6\sqrt{2}$.

Câu 6. Ta có $f(n+1) = f(n) + \frac{1}{n(n+1)} + n$

$$f(2) - f(1) = \frac{1}{1.2} + 1$$

$$f(3) - f(2) = \frac{1}{2.3} + 2$$

...

$$f(n) - f(n-1) = \frac{1}{n(n-1)} + n - 1$$

Suy ra:

$$f(n) - f(1) = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + 1 + 2 + \ldots + (n-1)$$

$$f(n) - f(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2}(1 + n - 1)$$

$$f(n) - f(1) = \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{2}n = \frac{(n-1)(2+n^2)}{2n}$$

$$f(n) = \frac{(n-1)(2+n^2)}{2n} + 2007.$$

Câu 7. Ta xếp 2007 số trên theo thứ tự tăng dần $1 \le a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{2007} \le \frac{3^{2006} - 1}{2}$

Giả sử $a_{n+1} \ge 3a_n - a_1$, $\forall n \in \{2, 3, \ldots, 2006\}$

Ta chứng minh bằng quy nạp $a_n \geq \frac{3^{n-2}+1}{2}a_1 + 3^{n-2}, \forall n \in \{2,3,...,2007\}$

Với n = 2, $a_2 > a_1 \Rightarrow a_2 \geq a_1 + 1 = \frac{3^{2-2}+1}{2}a_1 + 3^{2-2}$ (bất đẳng thức đúng)

Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k:

$$a_k \geq \frac{3^{k-2}+1}{2}a_1 + 3^{k-2} \, (2 \leq k \leq 2006)$$

$$a_{k+1} \geq 3a_k - a_1 \geq 3.\left(\frac{3^{k-2}+1}{2}a_1 + 3^{k-2}\right) - a_1 = \frac{3^{k-1}+1}{2}a_1 + 3^{k-1}$$

(bất đẳng thức đúng với n = k + 1)

Do đó $a_{2007} \geq \frac{3^{2005}+1}{2}a_1 + 3^{2005} \geq \frac{3^{2005}+1}{2} + 3^{2005} = \frac{3^{2006}+1}{2} > \frac{3^{2006}-1}{2}$

(trái giả thiết)

Vậy $\exists i \in \{2, 3, ..., 2006\}$: $a_{i+1} < 3a_i - a_1$ và ta chọn $a = a_i$; $b = a_{i+1}$; $c = a_1$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KIÊN GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT

Câu 1.

PT (*) $\Leftrightarrow 3^{(x^2-2x+1)+2}.\log_3\left[(x^2-2x+1)+2\right] = 3^{2|x+m|+2}.\log_3\left(2|x+m|+2\right)$

Xét hàm số $f(t) = 3^t.\log_3 t$ với $t \geq 2$.

Ta có: $f'(t) = 3^t.\ln 3.\log_3 t + 3^t.\frac{1}{t.\ln 3} > 0$ với $t \geq 2$

Nên hàm số $f(t) = 3^t.\log_3 t$ với $t \geq 2$ là một hàm số đồng biến

Do đó: PT (*) $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + 2 = 2|x + m| + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} = m \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = m \end{array}\right.$

Xét (P_1): $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$, (P_2): $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, (d): y = m là đường thẳng cùng phương Ox

Phương trình hoành độ của (P_1), (P_2):

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (nghiệm kép)}$$

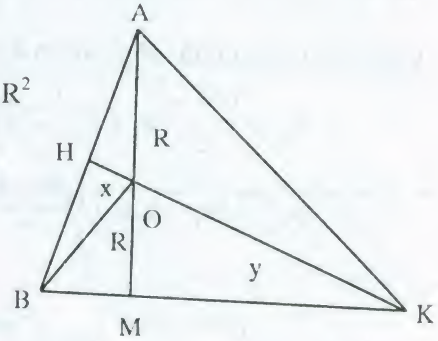
Do đó (P_1) tiếp xúc (P_2) tại A(1;1) đồ thị (như hình vẽ)

Đặt OH = x, OK = y. Ta có $AB = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, $CD = 2\sqrt{r^2 - y^2}$

$$\Delta AHO \backsim \Delta KMO \Rightarrow OM = \frac{xy}{R}$$

$$\Delta AHO \backsim \Delta AMB$$

$$\Rightarrow \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{R + \frac{xy}{R}} \Rightarrow 2x^2 + xy = R^2$$



Tương tự có $2y^2 + xy = r^2$

$$\begin{cases} 2x^2 + xy = 10 \\ 2y^2 + xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Do đó $AB = 2\sqrt{6}$; $CD = 2\sqrt{3}$, HK = 3

Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB.CD.HK = 6\sqrt{2}$.

Câu 6. Ta có $f(n+1) = f(n) + \frac{1}{n(n+1)} + n$

$$f(2) - f(1) = \frac{1}{1.2} + 1$$

$$f(3) - f(2) = \frac{1}{2.3} + 2$$

$$\ldots$$

$$f(n) - f(n-1) = \frac{1}{n(n-1)} + n - 1$$

Suy ra:

$$f(n) - f(1) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + 1 + 2 + \ldots + (n-1)$$

$$f(n) - f(1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n} + \frac{n-1}{2}(1 + n - 1)$$

$$f(n) - f(1) = \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{2}n = \frac{(n-1)(2+n^2)}{2n}$$

$$f(n) = \frac{(n-1)(2+n^2)}{2n} + 2007.$$

Câu 7. Ta xếp 2007 số trên theo thứ tự tăng dần $1 \le a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{2007} \le \frac{3^{2006} - 1}{2}$

Giả sử $a_{n+1} \ge 3a_n - a_1, \forall n \in \{2, 3, \ldots, 2006\}$

Ta chứng minh bằng quy nạp $a_n \ge \frac{3^{n-2}+1}{2}a_1 + 3^{n-2}, \forall n \in \{2,3,...,2007\}$

Với $n = 2$, $a_2 > a_1 \Rightarrow a_2 \ge a_1 + 1 = \frac{3^{2-2}+1}{2}a_1 + 3^{2-2}$ (bất đẳng thức đúng)

Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k:

$$a_k \ge \frac{3^{k-2}+1}{2}a_1 + 3^{k-2}\ (2 \le k \le 2006)$$

$$a_{k+1} \ge 3a_k - a_1 \ge 3.\left(\frac{3^{k-2}+1}{2}a_1 + 3^{k-2}\right) - a_1 = \frac{3^{k-1}+1}{2}a_1 + 3^{k-1}$$

(bất đẳng thức đúng với n = k + 1)

Do đó $a_{2007} \ge \frac{3^{2005}+1}{2}a_1 + 3^{2005} \ge \frac{3^{2005}+1}{2} + 3^{2005} = \frac{3^{2006}+1}{2} > \frac{3^{2006}-1}{2}$

(trái giả thiết)

Vậy $\exists i \in \{2, 3, ..., 2006\}$: $a_{i+1} < 3a_i - a_1$ và ta chọn $a = a_i$; $b = a_{i+1}$; $c = a_1$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KIÊN GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT

Câu 1.

PT (*) $\Leftrightarrow 3^{(x^2-2x+1)+2}.\log_3\left[(x^2-2x+1)+2\right] = 3^{2|x+m|+2}.\log_3\left(2|x+m|+2\right)$

Xét hàm số $f(t) = 3^t.\log_3 t$ với $t \ge 2$.

Ta có: $f'(t) = 3^t.\ln 3.\log_3 t + 3^t.\frac{1}{t.\ln 3} > 0$ với $t \ge 2$

Nên hàm số $f(t) = 3^t.\log_3 t$ với $t \ge 2$ là một hàm số đồng biến

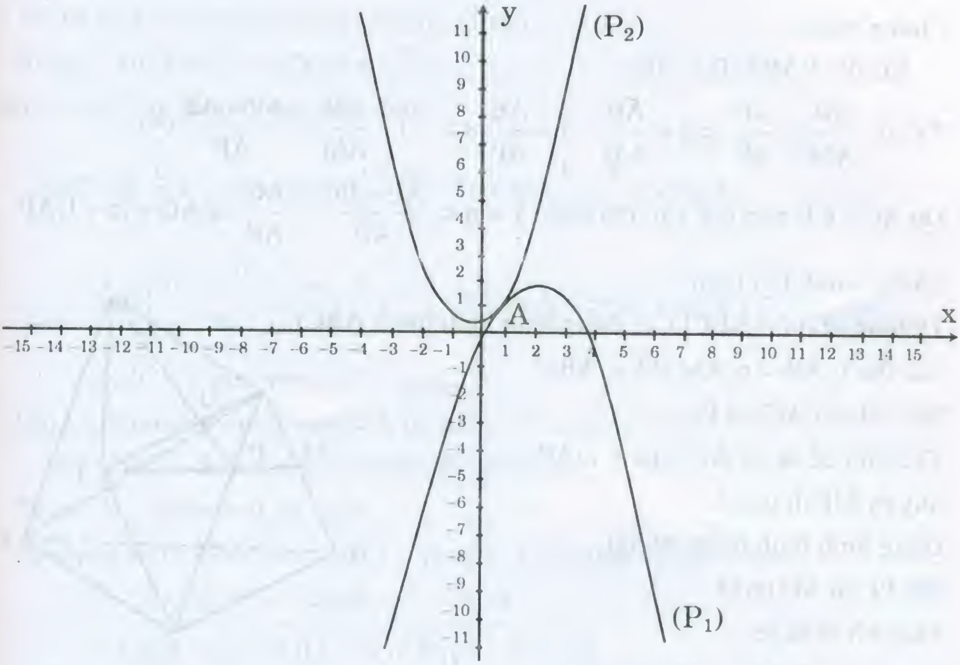
Do đó: PT (*) $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + 2 = 2|x + m| + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} = m \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} = m \end{array}\right.$

Xét (P_1): $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$, (P_2): $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, (d): $y = m$ là đường thẳng cùng phương Ox

Phương trình hoành độ của (P_1), (P_2):

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (nghiệm kép)}$$

Do đó (P_1) tiếp xúc (P_2) tại A(1;1) đồ thị (như hình vẽ)



Qua đồ thị ta có kết luận phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right) \setminus \{1\}$$

Câu 2. Điều kiện $x \in [-1;1]$

Bất phương trình tương đương

$k(|x| + \sqrt{1-x^2} + 1) \geq 2|x|\sqrt{1-x^2} + |x| + \sqrt{1-x^2} + 2$ (2)

Đặt $t = |x| + \sqrt{1-x^2}$, ta có $1 \leq t \leq \sqrt{2}$ và $t^2 = 1 + 2|x|\sqrt{1-x^2}$

Khi đó (2) trở thành $k(t+1) \geq t^2 + t + 1 \Leftrightarrow k \geq \dfrac{t^2+t+1}{t+1}$ (3); $t \in [1; \sqrt{2}]$

Ta đặt $f(t) = \dfrac{t^2+t+1}{t+1} = t + \dfrac{1}{t+1}$; $t \in [1; \sqrt{2}]$

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{t^2+2t}{(1+t)^2} > 0;\ t \in [1; \sqrt{2}].$$

Suy ra f(t) đồng biến trên đoạn $[1; \sqrt{2}]$. Khi đó (3) xảy ra với $\forall t \in [1; \sqrt{2}]$

$\Leftrightarrow k \geq \max(f(t)) = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1$ với $t \in [1; \sqrt{2}]$

Vậy $\min k = 2\sqrt{2} - 1$

Câu 3. Bổ đề. Cho hình bình hành ABCD, trên đoạn AB lấy điểm M sao cho AB = nAM, các đường thẳng DM và AC cắt nhau tại P thì AC = (n + 1)AP.

Chứng minh:

Kẻ BE // MD (E ∈ AC)

Ta có: $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AE}{AP} \Rightarrow 1 + \dfrac{AB}{AM} = 1 + \dfrac{AE}{AP} \Leftrightarrow \quad 1 + \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AP + AE}{AP}$ (*)

Do AP = CE nên thế vào (*) ta có $1 + n = \dfrac{AE + EC}{AP} = \dfrac{AC}{AP} \Rightarrow AC = (n + 1)AP$

Chứng minh bài toán.

Từ hình tứ diện ABCD, ta dựng hình bình hành ABCI.

Giả thiết: AB = n.AM (M ∈ AB)

Nối MI cắt AC tại P.

Theo bổ đề ta có AC = (n + 1)AP.

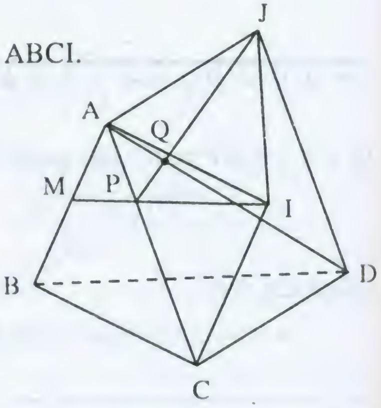
Suy ra MP đi qua I.

Dựng hình bình hành ACDJ.

Nối PJ cắt AD tại Q.

Theo bổ đề ta có:

AD = (n + 2)AQ ⇒ PQ đi qua J.



Do I, J không phụ thuộc vào n nên các mặt phẳng P_n đều đi qua đường thẳng IJ cố định. (đpcm).

Câu 4. Xét phương trình $x^3 - x = 3^{2007}$ (1)

Từ giả thiết: $\alpha^3 - \alpha = [f(\alpha)]^3 - f(\alpha) = 3^{2007}$

⇒ α và f(α) là nghiệm phương trình (1).

Xét hàm số $g(x) = x^3 - x$ trên R.

$$g'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
g'(x)		+	0	–	0	+	
g(x)	$-\infty$	↗	$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	$-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy PT (1) có 1 nghiệm thực duy nhất

(vì $3^{2007} > \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$)

Từ đó $f(\alpha) = \alpha$ do đó: $f^{(n)}(\alpha) = f(f(...(f(\alpha))...) = \alpha$

Vì vậy : $[f^{(n)}(\alpha)]^3 - f^{(n)}(\alpha) = 3^{2007}$.

Câu 5. Áp dụng định lý cosin ta được:

$$VT = 8\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\cos A+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}-2\cos B+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2\cos C\right)^2$$

$$=8\left[\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)-2\left(\cos A+\cos B+\cos C\right)\right]^2$$

$$\geq 8[6 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)]^2$$

Đặt $t = 2(\cos A + \cos B + \cos C)$, ta được $VT \geq 8(6 - t)^2$ (1)

$$VP = 9(3 - 2\cos A)(3 - 2\cos B)(3 - 2\cos C)$$

Ta có: $3 - 2\cos x > 0\ \forall x \in R$.

Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số: $3 - 2\cos A$, $3 - 2\cos B$ và $3 - 2\cos C$:

$$3 - 2\cos A + 3 - 2\cos B + 3 - 2\cos C$$
$$\geq 3\sqrt[3]{\left(3-2\cos A\right)\left(3-2\cos B\right)\left(3-2\cos C\right)}$$

$\Leftrightarrow [9 - 2(\cos A + \cos B + \cos C)]^3 \geq 27(3 - 2\cos A)(3 - 2\cos B)(3 - 2\cos C)$

Vậy: $VP \leq \frac{1}{3}(9 - t)^3$ (2)

Mặt khác: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \cos A + \cos B + \cos C > 1$$

Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ nên $t \in (2; 3]$.

Xét hàm số: $y = 8(6 - t)^2 - \frac{1}{3}(9 - t)^3$

Có $y' = -16(6 - t) + (9 - t)^2 = t^2 - 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 5 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

T	–3		2		3		5
y'(t)		–	0	–	0	+	
y(t)	0,5	↘		↘	0		

Ta có: $8(6 - t)^2 - \frac{1}{3}(9 - t)^2 \geq 0\ \forall t \in (2; 3] \Leftrightarrow 8(6 - t)^2 \geq \frac{1}{3}(9 - t)^3$ (3)

Từ (1), (2) và (3): VT $\geq$ VP. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$. (đpcm)

Câu 6. Giả sử x_0 là nghiệm nguyên của f(x), ta có $f(x_0) = 0$; $f(1) = 2m - 2005$ là số lẻ

$\Rightarrow f(x_0) - f(1)$ là số lẻ.

Mặt khác $f(x_0) - f(1)$ chia hết cho $x_0 - 1$ nên $x_0 - 1$ là số lẻ $\Rightarrow x_0$ là số chẵn.

Ta xét hai trường hợp:

Giả sử f(x) có hai nghiệm nguyên x_1, x_2 với $x_1 \neq x_2$ .Thế thì

$$0 = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 - 2007(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) +$$

$$+ (2006 + m)(x_1 + x_2) - 2005$$

Đẳng thức này không xảy ra vì x_1, x_2 chẵn.

Giả sử $x_1 = x_2$

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 6021x^2 + 2(2006 + m)x - 2005$

Khi đó x_1, x_2 cũng là nghiệm của $f'(x)$ hay $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Đẳng thức này không xảy ra vì x_1, x_2 chẵn. Vậy đa thức f(x) có không quá một nghiệm nguyên.

Câu 7. Gọi A là tập hợp các cách xếp 12 bộ thành một dãy tùy ý.

A_1 .... mà 3 bộ sách Toán đứng kề nhau.

A_2 .... mà 3 bộ sách Vật lý đứng kề nhau.

A_3 .... mà 3 bộ sách Hóa học đứng kề nhau.

A_4 .... mà 3 bộ sách Sinh học đứng kề nhau.

A* .... thỏa mãn đề bài.

Ta có: $A^* = A \setminus \bigcup_{i=1}^{4} A_i \Rightarrow |A^*| = |A| - \left|\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right|$

Và $|A| = \dfrac{12!}{(3!)^4} = 369600$

$$\Rightarrow \left|\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right| = C_4^1.\frac{10!}{(3!)^3} - C_4^2.\frac{8!}{(3!)^2} + C_4^3.\frac{6!}{(3!)^1} - C_4^4.\frac{4!}{(3!)^0} = 60936$$

$\Rightarrow |A^*| = 369600 - 60936 = 308664$

Vậy có 308664 cách xếp thỏa mãn yêu cầu đề bài.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BẠC LIÊU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẠC LIÊU

Câu 1.

Điều kiện: $x > -1$

$(1) \Leftrightarrow 2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1} \qquad (2)$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+1} \\ v = \sqrt{x^2 - x + 1} \end{cases}$ ta có $(2) \Leftrightarrow 2(u^2 + v^2) = 5uv \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 2v \\ v = 2u \end{array}\right.$

$* \; u = 2v \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 0$ phương trình này vô nghiệm.

$* \; v = 2u \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $x > -1$)

Tóm lại: phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Câu 2.

Hệ đã cho tương đương với hệ: $\begin{cases} \cos^2 x + (m+1)(\sin x - 1) > 0 \; (1) \\ \sin^2 x + (m+2)\sin x + 2m < 0 \; (2) \end{cases}$

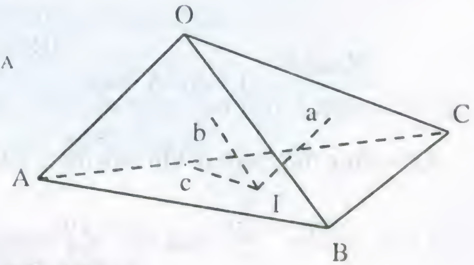
Ta thấy: Nếu $m \geq 0$ thì: $\sin x \leq 0$, không thỏa mãn (1)
$\sin x > 0$, không thỏa mãn (2)

Nên trường hợp này loại.

Nếu $m < 0$ thì $x = k\pi$ là nghiệm của hệ.

Vậy: với $m < 0$ hệ đã cho luôn có nghiệm.

Câu 3.



Ta có: $V_{OABC} = V_{IOAB} + V_{IOBC} + V_{IOCA}$

$\Rightarrow \dfrac{V_{IOAB}}{V_{OABC}} + \dfrac{V_{IOBC}}{V_{OABC}} + \dfrac{V_{IOCA}}{V_{OABC}} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{c}{OC} + \dfrac{b}{OB} + \dfrac{a}{OA} = 1.$

Nên: $V_{OABC} = \dfrac{1}{6} OA.OB.OC = \dfrac{abc}{6}.\dfrac{OA}{a}.\dfrac{OB}{b}.\dfrac{OC}{c}$

$$= \frac{abc}{6\dfrac{a}{OA}.\dfrac{b}{OB}.\dfrac{c}{OC}} \geq \frac{abc}{6\left(\dfrac{\dfrac{a}{OA} + \dfrac{b}{OB} + \dfrac{c}{OC}}{3}\right)^3} = \frac{abc}{6\left(\dfrac{1}{3}\right)^3} = \frac{9}{2}abc.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\frac{a}{OA} = \frac{b}{OB} = \frac{c}{OC} = \frac{1}{3}$.

Tóm lại: mp(P) qua I cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho OA = 3a, OB = 3b, OC = 3c thì V_{OABC} nhỏ nhất.

Câu 4.

Vì $x \in [0; 1]$ nên $1 - (1 - x)^2 \geq 0$

Đặt $g(x) = f(x) - 2^{1-x} + \sqrt{1-(1-x)^2}$, ta có g(x) liên tục trên đoạn [0; 1].

Vì $f(0), f(1) \in (0, 2)$ nên: $g(0) = f(0) - 2 < 0$

$$g(1) = f(1) > 0$$

Suy ra: tồn tại $c \in (0; 1)$ sao cho $g(c) = 0$ hay: $f(c) - 2^{1-c} + \sqrt{1-(1-c)^2} = 0$

$$\Rightarrow f(c) - 2^{1-c} = -\sqrt{1-(1-c)^2} \Rightarrow [f(c) - 2^{1-c}]^2 = 1-(1-c)^2$$

Hay $(1 - c)^2 + [f(c) - 2^{1-c}]^2 = 1$ (đpcm)

Câu 5.

Ta có: $b^2 + c^2 = 2m_a{}^2 + \frac{1}{2}a^2 \geq 2m_a.a$ (1)

$$\Rightarrow \frac{1}{2m_a} \geq \frac{a}{b^2 + c^2} \Rightarrow \frac{a}{2m_a} \geq \frac{a^2}{b^2 + c^2}$$

hay $\frac{2R\sin A}{2m_a} \geq \frac{b^2 + c^2 - 2bc.\cos A}{b^2 + c^2}$ (2)

Vì: $\frac{b^2 + c^2 - 2bc.\cos A}{b^2 + c^2} = 1 - \frac{2bc.\cos A}{b^2 + c^2} \geq 1 - \cos A$ (3) nên từ (2) ta có:

$\frac{2R\sin A}{2m_a} \geq 1 - \cos A$ hay: $\frac{2R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{m_a} \geq 2\sin^2\frac{A}{2}$. Suy ra $\frac{R}{m_a} \geq \tan\frac{A}{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi dấu đẳng thức ở (1) và (3) đồng thời xảy ra, tức là khi:

$$\begin{cases} 2m_a^2 = \frac{1}{2}a^2 \\ b^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2m_a \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông cân tại A.}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 6. Giả sử có hàm số f thỏa mãn đề bài.

Từ b) ta có $f(n + 3) = f\{f[f(u)]\} = f(n) + 3 \ \forall n$

Chứng minh bằng qui nạp, ta được:

$$f(n)=\begin{cases} f(0)+3k \text{ khi } n=3k \\ f(1)+3k \text{ khi } n=3k+1 \quad (k\in N) \\ f(2)+3k \text{ khi } n=3k+2 \end{cases}$$

Mặt khác từ b), ta có $f[f(0)] = 3$ nên:

– Nếu $f(0) = 3a$ $(a \in N^*)$ thì $3 = f[f(0)] = f(3a) = f(0) + 3a = 3a + 3a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ (loại).

– Nếu $f(0) = 3a + 1$ $(a \in N)$ thì $3 = f[f(0)] = f(3a + 1) = f(1) + 3a$

mà $f(1) \in N^*$ nên: $\begin{cases} f(1)=3 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=3 \\ f(0)=1 \end{cases}$

Mặt khác từ b) ta có $4 = f[f(1)] = f(3)]$, vậy: $\begin{cases} f(1)=3 \\ f(3)=4 \end{cases}$

(do điều kiện a)) nên loại.

– Nếu $f(0) = 3a + 2$ $(a \in N)$ thì $3 = f[f(0)] = f(3a + 2) = f(2) + 3a$

mà $f(2) \in N^*$ nên: $\begin{cases} f(2)=3 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2)=3 \\ f(0)=2 \end{cases}$

(do điều kiện a) nên loại.

Tóm lại: không có hàm số f nào thỏa mãn đề bài.

Câu 7. Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1.

ABCD là tứ giác lồi, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử:

$\widehat{ABC} \geq 90^0$, khi đó tam giác ABC là tam giác cần tìm.

Trường hợp 2:

Tồn tại một điểm thuộc miền trong của tam giác tạo bởi 3 đỉnh còn lại, chẳng hạn: D thuộc miền trong tam giác ABC, khi đó

$$\widehat{ADB} + \widehat{BDC} + \widehat{CDA} = 360^0$$

Suy ra trong 3 góc trên có ít nhất một góc lớn hơn 90^0, chẳng hạn góc ADB, khi đó tam giác ADB là tam giác cần tìm.

Trường hợp 3:

Tồn tại một điểm thuộc cạnh của tam giác tạo bởi 3 đỉnh còn lại, chẳng hạn: D thuộc cạnh AB của tam giác ABC, khi đó $\widehat{ADC} + \widehat{BDC} = 180^0$

Suy ra trong 2 góc trên có ít nhất một góc không nhỏ hơn 900, chẳng hạn góc ADC, khi đó tam giác ADC là tam giác cần tìm.

NĂM 2008

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KIÊN GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT

Câu 1. Tìm m để phương trình: $\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{1+2\sin x}=m$ (1) có nghiệm.

Câu 2. Cho 2003 số tự nhiên lập thành một cấp số cộng với công sai bằng 2008. Chứng minh rằng có một và chỉ một số hạng của cấp số cộng chia hết cho 2003.

Câu 3.

Cho ai, $i=\overline{1,2008}$ là độ dài các cạnh của một đa giác lồi, gọi S là diện tích đa giác. Chứng minh rằng: $\sum\limits_{i=1}^{2008} a_i^2 \geq 4S\tan\dfrac{\pi}{2008}$.

Câu 4. Cho x, y, z $\neq 0$ và $x^2+y^2+z^2=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{1}{x^4+y^4+z^4}+\dfrac{1}{x^2y^2}+\dfrac{1}{y^2z^2}+\dfrac{1}{z^2x^2}$.

Câu 5. Chứng minh rằng phương trình sau có đúng một nghiệm

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^{2007}-2\left(\sqrt{x+1}\right)^{3}-x^3-3x^2-3x-2=0 \qquad (1)$$

Câu 6. Cho hàm số f(x): $R^+\to R^+$ thỏa mãn điều kiện:

$f(x).f(y)=f(x.y)+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ với $\forall x, y\in R+$. Tính f(2008).

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THỪA THIÊN – HUẾ
TRƯỜNG THPT QUỐC HỌC HUẾ

Câu 1. Giải phương trình $\left(2\cos 3x+6\cos x+1\right)^3=162\cos x-27$.

Câu 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=60^0$, $\widehat{B}=45^0$. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lần lượt lấy các điểm M, N, P khác A, B, C. Gọi O là tâm đường tròn qua M, N, P. Chứng minh rằng nếu $\widehat{NMP}=60^0$, $\widehat{MNP}=45^0$ thì O cách đều các trực tâm của các tam giác MNP và ABC.

Câu 3. Kí hiệu $\mathbb{Z}$ là tập hợp tất cả các số nguyên. Tìm tất cả các hàm số f: $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ sao cho: $2008f\left(f\left(x\right)\right)+2007x=4015f\left(x\right)$, với mọi $x\in\mathbb{Z}$.

Câu 4. Giả sử a, b, c là các số thực sao cho với mọi số nguyên dương n và với mọi bộ n số dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ta đều có

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^a \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}\right)^b \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^3}{n}\right)^c \geq 1.$$

Chứng minh rằng $a + 2b + 3c = 0$ và $b + 2c \geq 0$, $c \geq 0$.

Câu 5. Với $x \geq 1$, đặt $f(x) = \dfrac{\sqrt{[x]} + \sqrt{\{x\}}}{\sqrt{x}}$, trong đó $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x và $\{x\} = x - [x]$. Cho $x \geq 1$. Xét dãy (x_n) xác định bởi $x_n = f(x_{n-1})$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Câu 6. Cho lưới ô vuông đơn vị kích thước $(n^2 + n + 1) \times (n^2 + n + 1)$. Trên mỗi ô của lưới có ghi một số 0 hoặc một số 1, sao cho không có bốn số 1 nào là đỉnh của một hình chữ nhật. Chứng minh rằng tổng các số có trong lưới không vượt quá $(n + 1) \times (n^2 + n + 1)$.

Câu 7. Cho hình chóp S.ABC có $AB = BC = CA = a$, $SA = SB = SC = a\sqrt{3}$. Chứng minh rằng với mọi điểm M trong không gian thì tổng các khoảng cách từ M đến tất cả các đường thẳng chứa cạnh bên hay cạnh đáy của hình chóp S.ABC luôn lớn hơn hoặc bằng $a\sqrt{6}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÀ RỊA – VŨNG TÀU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\log_7(2x + 3y) = \log_3(2 + 2x + 3y) \\ \ln(4x^2 + x + 1) + x^3 + 21 = 9y \end{cases}$

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên dương n không vượt quá 2008 thỏa mãn C_{2n}^{n} không phải là bội của 4?

(Trong đó C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Câu 3. Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy điểm S thay đổi khác A. Đường thẳng qua H vuông góc với mặt phẳng (SBC) cắt đường thẳng d tại K. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $BK^2 + CS^2$ khi S thay đổi trên d.

Câu 4. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(c+1)^2} + \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)} = 1$$

Chứng minh rằng: $abc \geq 1$.

Câu 5. Cho phương trình với tham số n nguyên dương $x + 2x^2 + ... + nx^n = \frac{3}{4}$

1. Chứng minh rằng phương trình trên có nghiệm dương duy nhất với mọi n nguyên dương, kí hiệu là x_n.

2. Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Tính giới hạn đó.

Câu 6. Tìm tất cả các hàm số f: R → R thỏa mãn:

$$f\left(f^2\left(x\right) + f\left(y\right)\right) = y + x.f\left(x\right)\ \forall x, y \in R.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRÀ VINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRÀ VINH

Câu 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(x - y\right)\left(x^2 + xy + y^2 - 2\right) = 6\ln\left(\dfrac{y + \sqrt{y^2 + 9}}{x + \sqrt{x^2 + 9}}\right) & (1) \\ x^3 - 2x + 1 = y^2 & (2) \end{cases}$$

Câu 2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$1! + 2! + 3! + ... + (x + 1)! = y^{z+1} \qquad (1)$$

Trong đó x, y, z là các số nguyên dương.

Câu 3. Cho tứ diện ABCD có AB = CD; AC = BD; AD = BC. Gọi R, r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện ABCD; R_0, r_0 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.

Chứng minh rằng: $\sqrt{3(R^2 - 3r^2)} \geq R_0 + r_0$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 4. Cho tam giác ABC có số đo các góc tính bằng radian. Chứng minh rằng:

$$\frac{A.B}{\cos^2\frac{A}{4}\cos^2\frac{B}{4}} + \frac{B.C}{\cos^2\frac{B}{4}\cos^2\frac{C}{4}} + \frac{C.A}{\cos^2\frac{C}{4}\cos^2\frac{A}{4}} < 4$$

Câu 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(1)^{k-1}}{k}$ $(n \in N^*)$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn khi $n \to +\infty$ và tính giới hạn đó.

Câu 6. Tìm tất cả các hàm số liên tục: f: R → R thỏa mãn điều kiện:

$$\left[f\left(\frac{x + y}{2}\right)\right]^2 = f(x).f(y);\ \forall x; y \in R \qquad (1)$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐĂKLĂK
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN DU

Câu 1. Cho dãy đa thức $\{P_n(x)\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} P_1(x) = x^2 - 2 \\ P_{n+1}(x) = P_n[P_1(x)], \forall n \in N^* \end{cases}$$

Tìm tất cả các nghiệm của đa thức $P_n(x)$. Gọi S_n là tổng tất cả các nghiệm thực của đa thức $P_n(x)$. Tính S_{2008}.

Câu 2. Xác định hàm số f: $N^* \to N^*$ thỏa mãn $f[f(n) + m] = n + f(m + 2008)$ với mọi số nguyên dương m, n.

Câu 3. Tìm đa thức P(x) có bậc nguyên dương, có tất cả hệ số nguyên trên đoạn $[0; 8]$ và thỏa mãn điều kiện $P(9) = 2008^3$.

Câu 4. Xác định hình dạng của tam giác ABC có 3 góc A, B, C thỏa mãn

$$4(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}) = \tan A \tan B \tan C.$$

Câu 5. Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn bất phương trình $x^y > y^x$

Câu 6. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a có G là trọng tâm của tứ diện. Một mặt phẳng (P) thay đổi qua G và cắt 3 cạnh AB, AC, AD lần lượt tại M, N, P. Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện AMNP.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KHÁNH HÒA
TRƯỜNG THPT LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1. Cho $\begin{cases} m > n > p > 0 \\ mp < n^2 \\ \dfrac{a}{m} + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{p} = 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

Câu 2. Giải và biện luận bất phương trình:

$3x^2 - (a + 3)x + a > \frac{1}{2}(a - 3x)(\log_3 x)^3$. Trong đó a là tham số.

Câu 3. Dãy số nguyên $\{a_n\}$ được xác định như sau:

$$a_1 = 1;\ a_2 = 2;\ a_3 = 23;\ a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}},\ n \geq 4.$$

Chứng minh với mọi n thì $a_n \vdots n$.

Câu 4. Cho A, B, C là ba điểm phân biệt trong không gian. (P) là mặt phẳng cố định. Tìm $M \in (P)$ sao cho $S = MA^2 + 4MB^2 - 9MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5. Tìm chữ số đơn vị của: $\left[\dfrac{10^{2000}}{10^{100}+3}\right]$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT NGUYỄN THƯỢNG HIỀN

Câu 1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = 4\left(y+\dfrac{1}{y}\right) = 5\left(z+\dfrac{1}{z}\right) \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$

Câu 2. Gọi A là tập hợp gồm 25 số nguyên dương đầu tiên A = { 1, 2, 3..., 24, 25}

Chứng minh rằng với mọi tập con B gồm 17 phần tử của A thì luôn luôn tồn tại hai phần tử (phân biệt) của B có tích là một số chính phương.

Câu 3. Cho tứ diện SABC với SA = SB = SC = 1. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm G của tứ diện, cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại D, E, F. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{SD.SE} + \frac{1}{SE.SF} + \frac{1}{SF.SD}.$$

Câu 4. Cho $x > 0$ chứng minh $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right) < \dfrac{1}{x} + \ln x$.

Câu 5. Cho dãy (a_n), $n \in \mathbb{N}$ được xác định bởi: $a_0 = 2$; $a_{n+1} = 4a_n + \sqrt{15a_n^2 - 60}$.

Hãy xác định số hạng tổng quát của a_n. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{5}(a_{2n} + 8)$ có thể biểu diễn thành tổng bình phương ba số nguyên liên tiếp với mọi $n \geq 1$.

Câu 6:

Tìm tất cả các giá trị nguyên của biểu thức $\dfrac{12-6x}{16x^4 - 219x + 249}$, trong đó x là biến số thực.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ YÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH

Câu 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{1+x}{1-y} = e^{\cos x - \cos y} \\ y = \sqrt{2x - x^2} - 1 \end{cases}$

Câu 2. Tìm tất cả các tập con khác rỗng A, B, C của tập các số nguyên dương Z^+ thỏa mãn:

(1) $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing$;

(2) $A \cup B \cup C = \mathbb{Z}^+$;

(3) Với mọi $a \in A, b \in B, c \in C$, ta có $a + c \in A, b + c \in B, a + b \in C$.

Câu 3. Cho hình chóp cụt tam giác với diện tích 2 đáy là B_1, B_2; diện tích xung quanh là S. Chứng minh rằng nếu tồn tại một thiết diện song song với đáy sao cho thiết diện này chia hình chóp thành hai hình chóp cụt mới ngoại tiếp được mặt cầu thì ta sẽ có:

$$S = \left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)\left(\sqrt[4]{B_1} + \sqrt[4]{B_2}\right)^2.$$

Câu 4. Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh:

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + (a + b + c)^2 \geq 4\sqrt{3abc(a + b + c)}.$$

Câu 5. Cho dãy (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = a \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \\ u_{n+1} = \ln(2 - \sin u_n) - 2. \end{cases}$

Chứng minh (u_n) hội tụ.

Câu 6. Tìm hàm f: R → R thoả mãn:

i) $f(x + y) \leq f(x) + f(y), \forall x, y \in R$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒNG THÁP
TRƯỜNG THPT TP. CAO LÃNH

Câu 1:. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 3z - 3z^2x + z^3 = 0 \\ y - 3x - 3x^2y + x^3 = 0 \\ z - 3y - 3y^2z + y^3 = 0 \end{cases}$

Câu 2. Cho 6 số $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ sao cho $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 1$;

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{x_i};\ \sum_{1\leq i<j\leq 6} x_ix_j = \sum_{1\leq i<j\leq 6} \frac{1}{x_ix_j}\ (*)$$

Chứng minh rằng khi đó các số $\left(x_i\right)_{i=1}^{6}$ được chia thành 3 cặp, tích hai số trong mỗi cặp bằng 1.

Câu 3. Cho hai đường thẳng x, y cố định. Hai điểm M, N thay đổi trên x và hai điểm P, Q thay đổi trên y sao cho MN = a và PQ = b, trong đó a, b là các độ dài cho trước.

Hãy xác định vị trí của M, N, P, Q sao cho bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện MNPQ là lớn nhất.

Câu 4. Cho m là số nguyên lớn hơn 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = ab^{m-1} + a^{m-1}b$, trong đó a, b thỏa mãn:

$$a + b = 1 \text{ và } 0 \le a, b \le \frac{m-2}{2}.$$

Câu 5. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n cho trước phương trình: $x^{2n+1} - x - 1 = 0$ có đúng một nghiệm số thực

Gọi nghiệm số thực ấy là x_n. Hãy tìm $\lim x_n$.

Câu 6. Tìm các đa thức f(x) có tất cả các hệ số đều là số nguyên không âm nhỏ hơn 7 và thỏa mãn: f(7) = 2008.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÌNH PHƯỚC
TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUANG TRUNG

Câu 1. Cho a, b, c > 0. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax - by + \dfrac{1}{xy} = c \quad (1) \\ bz - cx + \dfrac{1}{zx} = a \quad (2) \\ cy - az + \dfrac{1}{yz} = b \quad (3) \end{cases}$$

Câu 2. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_1 = 1; x_{n+1} = \dfrac{x_n^{2008}}{2008} + x_n$, với n là số nguyên dương.

Tìm giới hạn của dãy số sau: $u_n = \dfrac{x_1^{2007}}{x_2} + \dfrac{x_2^{2007}}{x_3} + \dfrac{x_3^{2007}}{x_4} + \cdots + \dfrac{x_n^{2007}}{x_{n+1}}$.

Câu 3. Tìm tất cả các đa thức P(x) với hệ số thực thỏa mãn đẳng thức:

$P(a + b) = P(a) + 7P(b)$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $ab(a + b) = 2b^3$.

Câu 4. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn: $\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 25 \\ \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{cases}$

Tính giá trị của biểu thức sau: P = xy + 2yz + 3zx.

Câu 5. Cho tứ diện ABCD, các cạnh DB và DC vuông góc với nhau, đường vuông góc hạ từ D xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC. Chứng minh: $(AB + BC + CA)^2 \leq 6(AD^2 + DB^2 + CD^2)$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO VĨNH LONG
TRƯỜNG THPT LƯU VĂN VIỆT

Câu 1. Giải bất phương trình $\frac{1}{x+1} > \frac{1+\log_3(x+3)}{x}$ **(1)**

Câu 2. Trong hình vuông ABCD có độ dài cạnh là 4 cho trước 33 điểm phân biệt, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Vẽ các đường tròn có bán kính $R = \sqrt{2}$, tâm lần lượt là 33 điểm trên.

Hỏi có hay không 3 điểm trong 33 điểm nói trên sao cho chúng đều thuộc phần giao của 3 hình tròn có các tâm cũng chính là 3 điểm đó.

Nếu có, hãy giải thích tại sao?

Câu 3. Cho tứ diện ABCD và đặt u = AB.CD, v = AC.BD, w = AD.BC.

Chứng minh rằng u, v, w là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó.

Câu 4:

Cho tứ diện ABCD có AB = CD, AC = BD, AD = BC.

Tìm điểm M sao cho

$f(M) = AM^{2008} + BM^{2008} + CM^{2008} + DM^{2008}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_{n+1} = \dfrac{5x_n + 4}{x_n + 2} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Chứng minh $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \neq 4$. Tính x^{2008} và tìm $\lim\limits_{n \to +\infty}(x_n)$.

Câu 6. Tìm tất cả các hàm số f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

a) $f(x) \geq 2008^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad (1)$

b) $f(x + y) \geq f(x).f(y) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad (2)$

$$\geq \frac{21}{\frac{x^4+y^4}{2}+\frac{y^4+z^4}{2}+\frac{z^4+x^4}{2}+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}$$

$$\geq \frac{9}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{21}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$\geq 9 + 21 = 30$ (Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 1$)

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2 = y^2z^2 = z^2x^2 \\ x^4+y^4+z^4 = x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \\ x^2 = y^2 = z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2 = \dfrac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 30 khi $x^2 = y^2 = z^2 = \dfrac{1}{3}$.

Câu 5:

$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^{2007} - \left(\sqrt{x+1}\right)^6 - 2\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 1 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x+1} \geq 0$, ta có phương trình $t^{2007} - t^6 - 2t^3 - 1 = 0$ (2)

Ta thấy (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm duy nhất $t \geq 0$

(2) $\Leftrightarrow t^{2007} = (t^3 + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow t^{2007} \geq 0 \Rightarrow t \geq 0 \Rightarrow t + 1 \geq 1 \Rightarrow t^{2007} \geq 1 \Rightarrow t \geq 1$

Xét hàm số $f(t) = t^{2007} - t^6 - 2t^3 - 1$, $t \geq 1$.

Ta có f(t) liên tục trên đoạn $[1; +\infty)$, $f(1) = -3 < 0$, $f(2) = 2^{2007} - 81 > 0 \Rightarrow$ phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm $t_0 \in (1; 2)$

Mặt khác $f'(t) = 2007t^{2006} - 6t^5 - 6t^2$

$= 6t^5(t^{2001} - 1) + 6t^2(t^{2004} - 1) + 1995t^{2006} > 0, \forall t \geq 1$

$\Rightarrow$ f(t) đồng biến trên khoảng $(1; +\infty) \Rightarrow$ phương trình (2) có nghiệm duy nhất.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất

Câu 6:

Thay $y = 1 \rightarrow f(x).f(1) = f(x) + \dfrac{1}{x} + 1$ (*)

Trong (*) thay $x = 1 \rightarrow f^2(1) - f(1) - 2 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = -1 \\ f(1) = 2 \end{array}\right.$

Do $f(x) > 0 \rightarrow f(1) = -1$ loại

Chọn $f(1) = 2$. Thay vào (*): $2f(x) = f(x) + \dfrac{1}{x} + 1 \rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

Thử lại: $f(x).f(y) = (\dfrac{1}{x} + 1)(\dfrac{1}{y} + 1) = \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + 1 = f(x.y) + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ (Đúng)

Vậy $f(x) = \frac{1}{x} + 1$

$$f(2008) = \frac{1}{2008} + 1 = \frac{2009}{2008}.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THỪA THIÊN HUẾ
TRƯỜNG THPT QUỐC HỌC HUẾ

Câu 1:

Viết lại phương trình

$$\left(2\cos 3x + 6\cos x + 1\right)^3 = 162\cos x - 27$$

$$\Leftrightarrow \left(2\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) + 6\cos x + 1\right)^3 = 27\left(6\cos x - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3 x + 1 = 3\sqrt[3]{6\cos x - 1}$$

Đặt $t = 2\cos x$, $|t| \le 2$, ta có $t^3 + 1 = 3\sqrt[3]{3t - 1}$.

Lại đặt $u = \sqrt[3]{3t - 1}$, ta có hệ $\begin{cases} t^3 = 3u - 1 \\ u^3 = 3t - 1 \end{cases}$

Trừ hai phương trình theo vế ta có

$$t^3 - u^3 = 3(u - t) \Leftrightarrow (t - u)\left(t^2 + tu + u^2 + 3\right) = 0.$$

Từ đó suy ra $t = u \Leftrightarrow t^3 - 3t + 1 = 0$.

Vậy $8\cos^3 x - 6\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos 3x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 2:

+ Gọi K là trực tâm tam giác MNP. Ta chứng minh K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

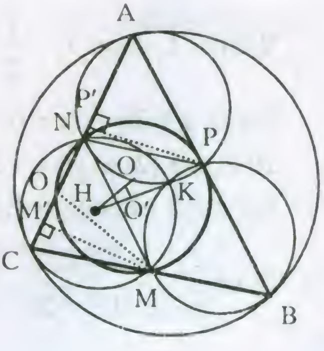
Ta có bốn đường tròn (MNP), (KMN), (KNP), (KPM) có cùng bán kính R.

Đường tròn (KMN) qua C, $KC = 2R\sin\widehat{KNC}$.

Đường tròn (KNP) qua A, $KA = 2R\sin\widehat{KNA}$.

Do $\sin\widehat{KNC} = \sin\widehat{KNA}$ nên KC = KA.

Tương tự KA = KB.



+ Do hai tam giác MNP và ABC đồng dạng nên có phép đồng dạng f biến A thành M, biến B thành N, biến C thành P. f là hợp của phép vị tự tâm I tỉ số k và phép quay tâm I góc θ.

Gọi M', P' là hình chiếu lần lượt của M, P lên AC.

Ta có $M'P' = MP|\cos\theta|$ và $MP = kAC$.

+ Chú ý $AC = 2M'P'$. Thật vậy, đường tròn (MNP) cắt AC tại Q. Ta có tam giác CMQ cân tại M, tam giác APQ cân tại P.

Do đó $AC = AQ + QC = 2QP' + 2QM' = 2M'P'$. Vì vậy $2k|\cos\theta| = 1$.

+ Ta có f biến K thành O, biến trực tâm H của tam giác ABC thành K nên $OK = kKH$ và góc giữa OK và KH là θ.

Gọi O' là hình chiếu của O lên KH.

Ta có $2KO' = 2OK|\cos\theta| = 2k|\cos\theta|KH = KH$.

Vậy O' là trung điểm KH. Do đó OK = OH.

Câu 3:

Cho $x \in \mathbb{Z}$. Xét dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = x \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Ta có hệ thức truy hồi

$$2008u_{n+2} + 2007u_n = 4015u_{n+1} \Leftrightarrow 2008u_{n+2} - 4015u_{n+1} + 2007u_n = 0$$

Dãy số (u_n) là dãy sai phân tuyến tính cấp hai có phương trình đặc trưng $2008t^2 - 4015t + 2007 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt $t_1 = 1, t_2 = \dfrac{2007}{2008}$. Do đó số hạng tổng quát của dãy là

$$u_n = C_1t_1^n + C_2t_2^n = C_1 + C_2\left(\frac{2007}{2008}\right)^n$$

Do $\dfrac{2007}{2008} < 1$ nên $\lim u_n = C_1$. Mà $u_n \in \mathbb{Z}$ nên $C_1 \in \mathbb{Z}$. Suy ra $C_2 = 0$. Vậy (u_n) là dãy hằng. Đặc biệt $u_2 = u_1$ hay $f(x) = x$. Thử lại thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 4:

Với n = 1, chọn $x_1 = 2 > 0$. Ta có $2^{a+2b+3c} \geq 1$. Suy ra $a + 2b + 3c \geq 0$ (1).

Với n = 1, chọn $x_1 = \dfrac{1}{2} > 0$. Ta có $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{a+2b+3c} \geq 1$.

Suy ra $a + 2b + 3c \leq 0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $a + 2b + 3c = 0$ (3).

Với n = 2, chọn $x_1 = 1$, $x_2 = x > 0$.

Ta có $\left(\dfrac{1+x}{2}\right)^a\left(\dfrac{1+x^2}{2}\right)^b\left(\dfrac{1+x^3}{2}\right)^c \geq 1$.

Cho $x \to 0$, ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{a+b+c} \ge 1$. Suy ra $a + b + c \le 0$ (4).

Từ (3) và (4) ta có $b + 2c \ge 0$.

Với $n \ge 2$, chọn $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1 - x, x_n = 1 + (n-1)x$, ta có

$$\left[1 + (n-1)x^2\right]^b \left[1 + 3(n-1)x^2 + (n-2)(n-1)x^3\right]^c \ge 1.$$

Lại chọn $x = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$, ta có $2^b\left(4 + \frac{n-2}{\sqrt{n-1}}\right)^c \ge 1$ hay $\left(4 + \frac{n-2}{\sqrt{n-1}}\right)^c \ge \frac{1}{2^b}$.

Nếu $c < 0$ thì cho $n \to +\infty$ ta có $\left(4 + \frac{n-2}{\sqrt{n-1}}\right)^c \to 0$. Vô lý. Vậy $c \ge 0$.

Câu 5:

Đặt $u = [x]$ và $v = \{x\}$. Ta có $f(x) = \frac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{\sqrt{x}}$.

Suy ra $\left(f(x)\right)^2 = \frac{u + v + 2\sqrt{uv}}{x} = 1 + \frac{2\sqrt{uv}}{x} \ge 1$.

Mà $\sqrt{uv} < \frac{u+v}{2} = \frac{1}{2}x$ (chú ý rằng $u \ne v$).

Do đó $\left(f(x)\right)^2 < 2$. Vậy $1 \le f(x) < \sqrt{2}$.

Nhận xét rằng $1 \le x_n < \sqrt{2}$, với mọi $n \in \mathbb{Z}^*$. Có thể xem $1 \le x_0 < \sqrt{2}$.

Nếu $x_0 = 1$ thì $x_n = 1$, với mọi $n \in \mathbb{Z}^*$. Suy ra $\lim x_n = 1$.

Xét trường hợp $1 < x_0 < \sqrt{2}$. Với $1 < x < \sqrt{2}$ thì $[x] = 1$ và $\{x\} = x - 1$.

Do đó $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}$.

Rõ ràng f liên tục nên nếu dãy (x_n) có giới hạn là a thì $a = f(a)$ (1).

Lại có $f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x(x-1)}} > 0$, với mọi $x \in (1, \sqrt{2})$ nên f đồng biến trên khoảng $(1, \sqrt{2})$.

$f(1,2) < 1,2; f(1,44) > 1,44$.

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất trong khoảng $(1, \sqrt{2})$.

Từ đó suy ra $f(x) > x$ nếu $1 < x < a$ và $f(x) < x$ nếu $a < x < \sqrt{2}$.

+ Nếu $x_0 = a$ thì $x_n = a$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra (x_n) có giới hạn là a.

+ Nếu $1 < x_0 < a$ thì (x_n) là dãy số tăng và bị chặn trên bởi a, nên có giới hạn là a.

+ Nếu $a < x_0 < \sqrt{2}$ thì (x_n) là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi a, nên có giới hạn là a.

Câu 6:

Đặt $N = n^2 + n + 1$. Gọi x_i là số số 1 ở hàng thứ i, $i = \overline{1, N}$.

Đặt $S = \sum_{i=1}^{N} x_i$. Cần chứng minh $S \le (n+1)N$.

Xét tập M gồm các cặp (k, l) với $1 \le k \le l \le N$.

Ta có $|M| = C_N^2 = \dfrac{(n^2+n)(n^2+n+1)}{2}$.

Với mỗi i, $i = \overline{1, N}$, đặt M_i là tập gồm các cặp (k, l) với $1 \le k \le l \le N$, sao cho hai cột k và l của lưới đều có số 1 ở hàng thứ i. Ta có

$$|M_i| = \begin{cases} C_{x_i}^2 & x_i \ge 2 \\ 0 & 0 \le x_i < 2 \end{cases} = \frac{x_i(x_i-1)}{2}.$$

Từ giả thiết không có bốn số 1 nào là đỉnh của một hình chữ nhật nên

$M_i \cap M_j = \varnothing$ nếu $i \ne j$.

Rõ ràng $\bigcup_{i=1}^{N} M_i \subset M$ nên $\sum_{i=1}^{N} |M_i| \le |M|$, tức là

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i(x_i-1)}{2} \le \frac{(n^2+n)(n^2+n+1)}{2}, \text{ hay}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i - (n^2+n)(n^2+n+1) \le 0.$$

Mà $\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 \le (n^2+n+1)\sum_{i=1}^{N} x_i^2$.

Suy ra $S^2 - (n^2+n+1)S - (n^2+n)(n^2+n+1)^2 \le 0$.

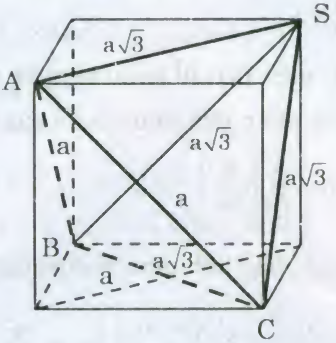
Từ đó $S \le \dfrac{n^2+n+1+(2n+1)(n^2+n+1)}{2} = (n+1)(n^2+n+1)$ (đpcm).

Câu 7:

+ Ba cặp mặt phẳng song song lần lượt chứa các cặp cạnh SA và BC, SB và CA, SC và AB tạo thành một hình hộp (H) ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

+ (H) có các mặt là các hình thoi với hai đường chéo của hình thoi này là a và $a\sqrt{3}$, cạnh a. Khoảng cách giữa hai mặt song song của (H) cùng bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

+ Tổng khoảng cách T của bài toán lớn hơn hoặc bằng ba lần khoảng cách giữa hai mặt song song của (H). Vì vậy $T \geq 3\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = a\sqrt{6}$. Dấu đẳng thức xảy ra trong trường hợp M là tâm của hình hộp (H).



SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÀ RỊA – VŨNG TÀU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1:

Đặt $t = \log_7(2x+3y) \Leftrightarrow 2x+3y = 7^t$.

Khi đó ta có phương trình: $2t = \log_3(7^t + 2)$

$$\Leftrightarrow 9^t = 7^t + 2 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{9}\right)^t + 2.\left(\frac{1}{9}\right)^t = 1 \qquad (1)$$

Hàm số $f(t) = \left(\frac{7}{9}\right)^t + 2.\left(\frac{1}{9}\right)^t$ giảm trên R nên phương trình (1)

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y = 7$$

Thay $3y = 7 - 2x$ vào phương trình thứ hai ta thu được phương trình

$$\ln\left(4x^2 + x + 1\right) + x^3 + 6x = 0 \qquad (2)$$

Xét hàm số

$$g(x) = \ln\left(4x^2 + x + 1\right) + x^3 + 6x \Rightarrow g'(x) = \frac{8x+1}{4x^2+x+1} + 3x^2 + 6$$

$g'(x) = 3x^2 + \dfrac{24x^2 + 14x + 7}{4x^2 + x + 1} > 0, \forall x \in R$ hàm số g(x) tăng trên R.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow g(x) = g(0) \Leftrightarrow x = 0$ từ đó thu được $y = \dfrac{7}{3}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(0; \dfrac{7}{3}\right)$.

Câu 2:

Với n = 1 thì $C_2^1 = 2$ không phải là bội của 4.

Với $n \geq 2$, ta có $C_{2n}^n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Đặt $s = [\log_2 n]$, ở đây kí hiệu $[x]$ chỉ phần nguyên của số x.

Khi đó số mũ của 2 trong phân tích tiêu chuẩn của (2n)! và của n! lần lượt là:

$$a = \sum_{k=1}^{s+1}\left[\frac{2n}{2^k}\right] \text{ và } b = \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{n}{2^k}\right]$$

Khi đó số mũ của 2 trong phân tích tiêu chuẩn của C_{2n}^n là:

$$t = a - 2b = \left(\sum_{k=1}^{s+1}\left[\frac{2n}{2^k}\right]\right) - 2\left(\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{n}{2^k}\right]\right) = n - \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{n}{2^k}\right]$$

+ Nếu n là một lũy thừa của 2, giả sử $n = 2^s$, $m \times Z^+$ thì

$$t = 2^s - \sum_{k=0}^{s-1} 2^k = 2^s - (2^s - 1) = 1 < 2 \Rightarrow C_{2n}^n \text{ không phải là bội của 4.}$$

+ Nếu n không phải là lũy thừa của 2, giả sử $n = 2^s + p; 0 < p < 2^s$.

Khi đó:

$$t = 2^s + p - \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{2^s + p}{2^k}\right] = \left(2^s - \sum_{k=1}^{s-1} 2^k\right) + \left(p - \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{p}{2^k}\right]\right) = 1 + \left(p - \sum_{k=1}^{s}\left[\frac{p}{2^k}\right]\right)$$

Mà $\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{p}{2^k}\right] \leq \sum_{k=1}^{s}\frac{p}{2^k} = p\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) < p \Rightarrow t > 1 \Rightarrow t \geq 2$

Do đó C_{2n}^n là một bội của 4.

Vậy C_{2n}^n không phải bội của 4 khi và chỉ khi n là một lũy thừa của 2.

Trong các số nguyên dương không vượt quá 2008 có 11 số là lũy thừa của 2 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3:

AH cắt BC tại D, ta có $AH \perp BC$, $SA \perp BC \Rightarrow (SAD) \perp BC$

Đường thẳng qua H vuông góc mp(SBC) nằm trong mp(SAD) cắt SD tại I và cắt d tại K.

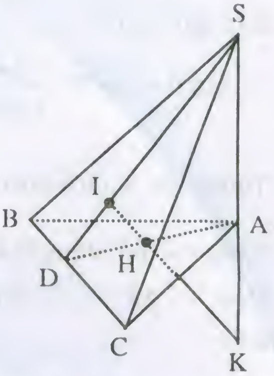
Ta có: $CH \perp AB$; $CH \perp SA \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow CH \perp SB$

Mà $IK \perp (SBC) \Rightarrow IK \perp SB \Rightarrow (CIK) \perp SB$

$\Rightarrow CI \perp SB$ hay I là trực tâm tam giác SBC.

Tứ diện BCSK là tứ diện trực tâm nên ta có: $BK^2 + CS^2 = BC^2 + SK^2$

Mà BC không đổi, nên để $BK^2 + CS^2$ nhỏ nhất thì ta cần tìm S để SK nhỏ nhất. Xét hai tam giác SAD và AHK đồng dạng thu được:



$$\frac{SA}{AH} = \frac{AD}{AK} \Rightarrow AS.AK = AH.AD$$

Ta có: $SK^2 = (AS + AK)^2 \geq 4AS.AK = 4AD.AH$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$AS = AK = \sqrt{AH.AD}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $BK^2 + CS^2$ là $BC^2 + 4AD.AH$ đạt được tại 2 vị trí S chạy trên đường thẳng d mà $AS = \sqrt{AD.AH}$.

Câu 4:

Từ điều kiện bài ra $\Rightarrow \frac{1}{a+1}; \frac{1}{b+1}; \frac{1}{c+1} \in (0;1)$.

Do đó có các góc nhọn A, B, C sao cho:

$$\cos A = \frac{1}{a+1}; \cos B = \frac{1}{b+1}; \cos C = \frac{1}{c+1}.$$

Thay vào giả thiết thu được:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$$

$$\Leftrightarrow (\cos A + \cos B\cos C)^2 = (1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C)$$

$$\Leftrightarrow (\cos A + \cos B\cos C)^2 = \sin^2 B\sin^2 C$$

$\Leftrightarrow \cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C$ (do A, B, C là các góc nhọn)

$$\Leftrightarrow \cos A = -\cos(B + C) \Leftrightarrow A + B + C = \pi$$

Như vậy A, B, C là 3 góc của một tam giác.

Theo cách đặt A, B, C thì $a = \frac{1 - \cos A}{\cos A}; b = \frac{1 - \cos B}{\cos B}; c = \frac{1 - \cos C}{\cos C}$

Điều cần chứng minh đưa được về:

$$(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \geq \cos A\cos B\cos C$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \cos A)}{\sin A}.\frac{(1 - \cos B)}{\sin B}.\frac{(1 - \cos C)}{\sin C} \geq \cot A.\cot B.\cot C$$

$$\Leftrightarrow \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} \geq \cot A.\cot B.\cot C$$

$$\Leftrightarrow \tan A\tan B\tan C \geq \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}$ (*)

Bây giờ ta có:

$$\tan A + \tan B = \frac{\sin C}{\cos A\cos B} = \frac{2\sin C}{\cos(A-B)+\cos(A+B)} \geq \frac{2\sin C}{1-\cos C} = 2\cot\frac{C}{2}$$

Tương tự: $\tan B + \tan C \geq 2\cot\frac{A}{2}$; $\tan C + \tan A \geq 2\cot\frac{B}{2}$

Cộng các bất đẳng thức theo vế ta suy ra (3). (đpcm)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Câu 5:

1. Xét hàm số $f_n(x) = x + 2x^2 + ... + nx^n - \frac{3}{4}$ liên tục trên R và có

$f_n'(x) = 1 + 2^2x + ... + n^2x^{n-1}$

$f_n'(x) > 0\ \forall x \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f_n(x)$ tăng trên $(0; +\infty)$ (1)

Mà $f_n(0) = -\frac{3}{4} < 0$, $f_n(1) > 0$

$\Rightarrow$ phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0; +\infty)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm dương x_n duy nhất với mọi n.

2. Ta có $3f_n\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + 2.\frac{1}{3} + ... + n.\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{9}{4}$

$$f_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 2.\left(\frac{1}{3}\right)^2 + ... + n.\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{4}$$

Trừ theo vế:

$$2f_n\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{n}{3^n} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^n} - \frac{3}{2} = -\frac{2n+3}{2.3^n} < 0$$

Do đó $x_n > \frac{1}{3}\ \forall n \in Z^+$

Áp dụng định lý Lagrange tồn tại $y_n \in \left(\frac{1}{3}; x_n\right)$ sao cho:

$$\frac{2n+3}{4.3^n} = \left|f_n(x_n) - f_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|x_n - \frac{1}{3}\right|\left|f_n'(y_n)\right| > \left|x_n - \frac{1}{3}\right|$$

Vì $f_n'(y_n) > 1$ với $y_n > 0$.

Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{4.3^n}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{3}$

Câu 6:

Ký hiệu $f\left(f^2\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=y+x.f\left(x\right)\ \forall x,y\in R$ (1)

+ Nếu f(x) = f(y), từ (1) ta có:

$$y+x.f\left(x\right)=f\left(f^2\left(x\right)+f\left(y\right)\right)=f\left(f^2\left(x\right)+f\left(x\right)\right)=x+x.f\left(x\right)\Rightarrow x=y$$

Do đó hàm f là đơn ánh.

+ Đặt a = f(0). Thay x = 0, y = 0 vào (1) được: $f(a^2+a)=0$

Thay $x=a^2+a$ và y = 0 vào (1) thì:

$$f\left(f^2\left(a^2+a\right)+a\right)=\left(a^2+a\right).f\left(a^2+a\right)=0\Rightarrow f\left(a\right)=0$$

Khi đó $f\left(a\right)=f\left(a^2+a\right)\Rightarrow a=a^2+a\Rightarrow a=0$, tức là f(0) = 0

Thay x =0 vào (1) thì $f\left(f\left(y\right)\right)=y\ \forall y\in R$

Thay y =0 vào (1) thì $f\left(f^2\left(x\right)\right)=x.f\left(x\right)\ \forall x\in R$ (2)

Thay x bởi f(x) vào (2) thì $f\left(x^2\right)=f\left(x\right)f\left(f\left(x\right)\right)=x.f\left(x\right)\ \forall x\in R$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $f\left(f^2\left(x\right)\right)=f\left(x^2\right)\Rightarrow f^2\left(x\right)=x^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=x\\ f\left(x\right)=-x\end{array}\right.,\forall x\in R$

+ Thử trực tiếp ta thấy f(x) = x và f(x) = –x là 2 nghiệm hàm của bài toán.

+ Giả sử bài toán có nghiệm khác 2 nghiệm trên khi đó tồn tại b, c khác 0 sao cho f(b) = b; f(c) = –c; Thay x = b, y = c vào (1) thì:

$f\left(b^2-c\right)=c+b^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c+b^2=b^2-c\\ c+b^2=c-b^2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ c=0\end{array}\right.$ (vô lý do ta chọn b, c khác 0)

Vậy bài toán chỉ có 2 nghiệm là f(x) = x và f(x) = –x.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRÀ VINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRÀ VINH

Câu 1:

$(1)\Leftrightarrow x^3-2x+6\ln(x+\sqrt{x^2+9})=y^3-2y+6\ln(y+\sqrt{y^2+9})$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t^3-2t+6\ln(t+\sqrt{t^2+9});\ t\in R$

$$f'(t)=3t^2-2+\frac{6}{\sqrt{t^2+9}}=3\left(t^2+\frac{2}{\sqrt{t^2+9}}-\frac{2}{3}\right)$$

Theo bất đẳng thức Cô–si:

$$\frac{t^2+9}{27}+\frac{1}{\sqrt{t^2+9}}+\frac{1}{\sqrt{t^2+9}}+\frac{26}{27}\left(t^2+9\right)\ge 1+\frac{26}{27}\left(t^2+9\right)\ge 1+\frac{26}{27}\cdot 9=\frac{29}{3}$$

$$\Leftrightarrow t^2+\frac{2}{\sqrt{t^2+9}}-\frac{2}{3}\ge 0$$

$\Rightarrow f'(t)\ge 0, \forall t\in R$ (Dấu "=" xảy ra khi $t = 0$)

$\Rightarrow$ Hàm số f(t) đồng biến trên R. Do đó:

$(*) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$, thế vào (2): $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ (3)

Xét hàm số $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ liên tục trên các đoạn $[-2; 0]$; $[0; 1]$; $[1; 2]$ và:

$f(-2).\ f(0) < 0 \Rightarrow$ (3) có nghiệm $x_1 \in (-2; 0)$

$f(0).\ f(1) < 0 \quad \Rightarrow$ (3) có nghiệm $x_2 \in (0; 1)$

$f(1).\ f(2) < 0 \quad \Rightarrow$ (3) có nghiệm $x_3 \in (0; 2)$

Vậy (3) có ít nhất 3 nghiệm trên $(-2; 2)$

Vậy (3) là phương trình bậc ba có không quá 3 nghiệm trên R nên (3) có đúng 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 và $x_1, x_2, x_3 \in (-2; 2)$

- Gọi x là nghiệm của (3) $\Rightarrow -2 < x < 2$

$\Rightarrow \exists u \in (0;\pi)$ sao cho $x = 2\cos u$. Thế vào (3)

$8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1 = 0$ (nhân $\sin u > 0$)

$\Leftrightarrow 8\sin u.\cos^3 u - 4\sin u.\cos^2 u - 4\sin u.\cos u + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 4u = \sin u \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = k2\pi\ \left(k\in z\right) \\ u = \frac{\pi}{7}+k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right.$$

Vì $u \in (0; \pi)$ nên ta được: $u = \frac{\pi}{7}$; $u = \frac{3\pi}{7}$; $u = \frac{5\pi}{7}$

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x = y = 2\cos\frac{\pi}{7} \\ x = y = 2\cos\frac{3\pi}{7} \\ x = y = 2\cos\frac{5\pi}{7} \end{array}\right.$

Câu 2:

Đặt $f(x) = 1! + 2! + 3! + ... + (x + 1)!$

$f(1) = 3$; $f(2) = 9$; $f(3) = 33$

* Với $x > 3$: ta có $f(x) = f(3) + 5! + ... + (x + 1)!$

Vì 5!, 6!, ..., (x + 1)! Đều chia hết cho 10 nên ta suy ra: $f(x) \equiv f(3) \pmod{10}$

$\Rightarrow f(x) \equiv 3 \pmod{10}$ (vì $f(3) = 33$)

Vậy f(x) không phải là bình phương của 1 số nguyên.

Suy ra với $z = 1$, phương trình (1) không có nghiệm nguyên dương với $x \geq 3$.

* Xét $z = 1$; $x < 3$: dễ thấy $x = 2$; $y = 3$; $z = 1$ thỏa mãn (1).

Vậy (1) có nghiệm (2; 3; 1)

* Xét $z \geq 2$ (z nguyên dương) $\Rightarrow z + 1 \geq 3$

(1) $\Leftrightarrow f(x) = y^{z+1}$

Với $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ thì khi thử trực tiếp ta thấy $f(x) \vdots 3$ nhưng $f(x) \not\vdots 27$

Mặt khác do $f(x) = y^{z+1} \Rightarrow y^{z+1} \vdots 3$

$\Rightarrow y \vdots 3 \Rightarrow y^{z+1} \vdots y^3 \Rightarrow y^{z+1} \vdots 27$

Vậy (1) vô nghiệm trong trường hợp này.

* Với $x > 7$:

$$f(x) = f(7) + 9! + \ldots (x+1)! \equiv f(7) (\mathrm{mod}\, 27)$$

Mà $f(7) \not\vdots 27 \Rightarrow f(x) \not\vdots 27$. Do $f(x) \vdots 3 \Rightarrow y^{z+1} \vdots 3 \Rightarrow y \vdots 3 \Rightarrow y^3 \vdots 27$

Mặt khác $y^{z+1} \vdots y^3 \Rightarrow y^{z+1} \vdots 27$

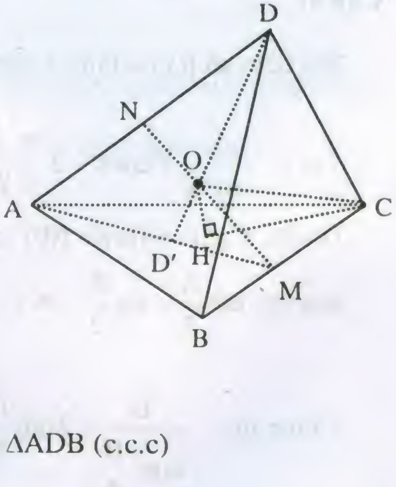
Vậy: (1) không có nghiệm nguyên dương trong trường hợp này.

Tóm lại: (1) có nghiệm duy nhất.

$x = 2$; $y = 3$; $z = 1$.

Câu 3:

Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC, AD và O là trung điểm MN thì O là trọng tâm tứ diện ABCD. Gọi D′ là trọng tâm ΔABC. Kẻ OH ⊥ (ABC) tại H.



- ΔABD = ΔACD (C.C.C) ⇒ BN = CN.

⇒ ΔBCN cân tại C ⇒ MN ⊥ BC

Tương tự MN ⊥ AD

Vậy MN là trung trực của BC và AD.

Mà O là trung điểm MN

⇒ O là tâm mặt cầu ngoại tiếp ABCD.

Mặt khác:

$$\text{Do} \begin{cases} AB = CD \\ CA = BD \\ AD = BC \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta BCD = \Delta CDA = \Delta ADB \text{ (c.c.c)}$$

Đặt $S_{ABC} = S_{BCD} = S_{CDA} = S_{ADB} = S$

$V = V_{ABCD}$, ta có: $\dfrac{V_{OABC}}{V_{ABCD}} = \dfrac{OD'}{DD'} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{OABC} = \dfrac{V}{4}$

$\Rightarrow d\left(O; ABC\right) = \dfrac{3V_{OABC}}{S_{ABC}} = \dfrac{3V}{4S}$

Tương tự: $d(O, BCD) = d(O; CDA) = d(O; ADB) = \dfrac{3V}{4S}$.

Vậy O là tâm mặt cầu nội tiếp ABCD

Suy ra: $OH = r$ và $OD = R$; $OD' = \dfrac{R}{3}$

Ta lại có: $OD' \geq OH \Leftrightarrow \dfrac{R}{3} \geq r \Leftrightarrow R \geq 3r$ (1).

Do $OA = OB = OC \Rightarrow HA = HB = HC$

$\Rightarrow$ H là tâm đường tròn (ABC) $\Rightarrow HC = R_0$

- $OC^2 = OH^2 + HC^2 \Leftrightarrow R^2 = r^2 + R_0^2 \Leftrightarrow R_0^2 = R^2 - r^2$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: $4R^2 - 12r^2 \geq 3R^2 - 3r^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{R^2 - 3r^2} \geq \sqrt{3(R^2 - r^2)} = R_0\sqrt{3}$.

Mà $R_0 \geq 2r_0 \Leftrightarrow r_0 \leq \dfrac{R_0}{2}$

Vậy: $\dfrac{R_0 + r_0}{\sqrt{R^2 - 3r^2}} \leq \dfrac{3R_0}{2\sqrt{R^2 - 3r^2}} \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3(R^2 - 3r^2)} \geq R_0 + r_0$

Đẳng thức xảy ra khi ABCD là tứ diện đều.

Câu 4:

Xét hàm số $f(x) = \tan x + \sin x - 2x$ với $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \cos x - 2 \overset{\text{côsi}}{\geq} \sqrt{\dfrac{1}{\cos x}} > 0 \Rightarrow$ f(x) đồng biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Do đó: $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow \tan x + \sin x - 2x > 0$

Suy ra: $\tan\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{A}{2} - A > 0 \Rightarrow \tan\dfrac{A}{2}\left(1 + \cos\dfrac{A}{2}\right) > A \Rightarrow \dfrac{A}{\cos^2\dfrac{A}{4}} < 2\tan\dfrac{A}{2}$

Tương tự: $\dfrac{B}{\cos^2\dfrac{B}{4}} < 2\tan\dfrac{B}{2}$; $\dfrac{C}{\cos^2\dfrac{C}{4}} < 2\tan\dfrac{C}{2}$

Từ đó: $\dfrac{A.B}{\cos^2\dfrac{B}{4}\cdot\cos^2\dfrac{C}{4}}+\dfrac{BC}{\cos^2\dfrac{B}{4}\cdot\cos^2\dfrac{C}{4}}+\dfrac{C.A}{\cos^2\dfrac{C}{4}\cdot\cos^2\dfrac{A}{4}}<$

$$< 4\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)\ (1)$$

Mặt khác: $A + B + C = \pi \Rightarrow \text{cotg}\dfrac{C}{2}=\tan\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}\right)\Rightarrow\dfrac{1}{\tan\dfrac{C}{2}}=\dfrac{\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}}{1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}}$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5:

Ta có:

- $u_{2m}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}$ $(m\in N^*)$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)=\sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}$$

- Ta chứng minh: $\ln(1+x)<x<-\ln(1-x);\ x\in(0;1)$
- Xét hàm số $f(x)=x-\ln(1+x);\ x\in(0;1)$

$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}>0,\ \forall x\in(0;1)\Rightarrow$ Hàm f(x) đồng biến trên (0; 1)

Do đó $x>0$ x $\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow x-\ln(1+x)>0.\Rightarrow x>\ln(1+x)$

Xét hàm số $g(x)=x+\ln(1-x);\ x\in(0;1)$

$g'(x)=1-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{-x}{1-x}<0,\ \forall x\in(0;1)\Rightarrow$ Hàm g(x) nghịch biến trên (0; 1)

Do đó $x>0\Rightarrow g(x)<g(0)\Rightarrow x+\ln(1-x)<0\Rightarrow x<-\ln(1-x)$

Vậy: $\ln(1+x)<x<-\ln(1-x),\ \forall x\in(0;1)$ (*)

Áp dụng (*) với $x=\dfrac{1}{m+k}(k=1;2,\ldots,m)$

$$\ln\left(1+\frac{1}{m+1}\right)<\frac{1}{m+1}<-\ln\left(1-\frac{1}{m+1}\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{m+2}\right)<\frac{1}{m+2}<-\ln\left(1-\frac{1}{m+2}\right)$$

...

$$\ln\left(1+\frac{1}{m+m}\right)<\frac{1}{m+m}<-\ln\left(1-\frac{1}{m+m}\right)$$

Cộng vế với các bất đẳng thức trên ta được: $\ln\frac{2m+1}{m+1}<u_{2m}<\ln 2$

Vì $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\ln\frac{2m+1}{m+1}\right)=\ln 2$ nên $\lim\limits_{m\to+\infty}u_m=\ln 2$ (1)

Mặt khác:

$$(*)\,u_{2m-1}=\sum_{k=1}^{2m-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^{k-1}}{k}-\frac{(-1)^{2m-1}}{2m}\Rightarrow u_{2m-1}=u_{2m}+\frac{1}{2m}$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to+\infty}u_{2m-1}=\lim_{m\to+\infty}\left(u_{2m}+\frac{1}{2m}\right)=\ln 2\ \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ln 2.$

Câu 6:

+ Ta thấy $f(x)=0,\ \forall x\in R$ thỏa mãn đề bài.

+ Xét hàm số $f(x)\neq 0$:

Giả sử $\exists\, x_0\in R$ sao cho $f(x_0)=0$.

Thế $x=x_0$ và $y=2x-x_0;\ \forall x\in R$ vào (1):

$[f(x)]^2=0,\ \forall x\in R\Rightarrow f(x)=0,\ \forall x\in R$ vô lí

Vậy $f(x)\neq 0,\ \forall x\in R$

$$\left[\begin{array}{l}f(x)>0,\forall x\in R\\ f(x)<0,\forall x\in R\end{array}\right.$$

Thật vậy nếu tồn tại $a, b\in R$, $a<b$ sao cho $f(a)<0$ và $f(b)<0$

$\Rightarrow f(a).f(b)<0$ và do f liên tục nên tồn tại $x_0\in(a, b)$ sao cho $f(x_0)=0$: vô lí.

Vậy $f(x)>0,\ \forall x\in R$ hoặc $f(x)<0,\ \forall x\in R$

+ Nếu $f(x)>0,\ \forall x\in R$

Xét hàm số $g(x)=\ln f(x)-\ln f(0)$ liên tục trên R và $g(0)=0$

$$(1)\quad\Leftrightarrow \ln\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2=\ln\left[f(x)\cdot f(y)\right],\ \forall x, y\in R$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2=\ln f(x)+\ln f(y)\Leftrightarrow 2g\left(\frac{x+y}{2}\right)=g(x)+g(y)$$

$$\Leftrightarrow g\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{g(x)+g(y)}{2}$$ và g liên tục trên $R\Rightarrow g(x)=ax+b$

Mà $\quad g(x) = 0 \Rightarrow b = 0$

Vậy $\quad g(0) = ax$

$\Leftrightarrow \ln f(x) - \ln f(0) = ax$ (Đặt $\ln f(0) = c$)

$\Leftrightarrow \ln f(x) = ax + c \Rightarrow f(x) = e^{ax+c}$

* Nếu $f(x) < 0, \forall x \in R$ lập luận tương tự ta được $f(x) = -e^{ax+c}, \forall x, x \in R$

Thử lại ta thấy các hàm số trên thỏa mãn đề bài.

$$\text{Vậy}\quad \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \quad \forall x \in R \\ f(x) = e^{ax+c} \\ f(x) = -e \end{array}\right.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐĂKLĂK
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN DU

Câu 1:

Ta có $\deg P_n(x) = 2^n \to P_n(x) = 0$ có không quá 2^n nghiệm thực

$$y = P_1(x) = x^2 - 2 \to y' = 2x, y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y′		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$+\infty$	↘	2	↘	-2	↗	2	↗	$+\infty$

Do đó nếu $|x| > 2 \Rightarrow y > 2 \Rightarrow P_2(x) = P_1\left[P_1(x)\right] > 2 \ldots TQ: P_n(x) > 2$

Nên tất cả các nghiệm của phương trình $P_n(x) = 0$ đều thuộc đoạn $[-2; 2]$.

Đặt $x = 2\cos t$, $t \in [0; \pi]$

$$P_1(x) = 4\cos^2 t - 2 = 2\cos 2t \to P_2(x) = P_1^2(x) - 2$$

$$= 2\cos 2^2 t, \ldots, P_n(x) = 2\cos 2^n t, \forall n \in N^*$$

Nên $\quad P_n(x) = 0 \Leftrightarrow 2^n t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{2^{n+1}} + \dfrac{k\pi}{2^n}, k \in Z$

$\to x = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}} + \dfrac{k\pi}{2^n}\right)$ mà

$t \in [0; \pi] \to k \in \left\{0; 1; 2; \ldots; 2^n - 1\right\} \to S_{2008} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{2008}-1} 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{2009}} + \dfrac{k\pi}{2^{2008}}\right)$

$$\rightarrow \sin\frac{\pi}{2^{2009}}S_{2008} = \sum_{k=0}^{2^{2008}-1} 2\sin\frac{\pi}{2^{2009}}\cos\left(\frac{\pi}{2^{2009}}+\frac{k\pi}{2^{2008}}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{2^{2008}-1}[\sin\frac{(k+1)\pi}{2^{2008}} - \sin\frac{k\pi}{2^{2008}}] = 0 \text{ vì } \sin\frac{\pi}{2^{2009}} > 0 \rightarrow S_{2008} = 0.$$

(Học sinh có thể nêu đa thức $P_n(x)$ là hàm số chẵn nên $S_{2008} = 0$)

Câu 2:

Chọn $m = f(1)$ có $f[f(n) + f(1) = n + f[f(1) + 2008]$

$= n + 1 + f(4016) = f[f(n + 1) + 2008]$

$F[f(n) + f(1)] = f[f(n + 1) + 2008] \Rightarrow f(f[f(n) + f(1)] + m)$

$= f(f[f(n + 1) + 2008] + m)$

Nên $f\big(n\big) + f(1) + f(m + 2008) = f(n + 1) + 2008 + f(m + 2008)$

Suy ra $f(n + 1) - f(n) = f(1) - 2008 = a$

$$\Rightarrow f(n) = \sum_{k=1}^{n-1}\Big[f(k+1) - f(k)\Big] + f(1) = an + 2008$$

Thử lại: $f(n) = an + 2008, f\Big[f\big(n\big) + m\Big] = n + f(m + 2008)$

$\rightarrow a^2n + 2008a + am + 2008 = n + a(m + 2008) + 2008$

Nên $\left[\begin{array}{l} a = -1 \rightarrow f(n) = -n + 2008 \rightarrow f(2009) = -1 \\ a = 1 \rightarrow f(n) = n + 2008 \end{array}\right.$

Vậy $f(n) = n + 2008$ là hàm số cần xác định.

Câu 3:

$2008^3 = 8096384512 = 1 + 9.899598279 = 1 + 9.\ 3 + 81.99955364$

$= 1 + 9.3 + 9^2.5 + 9^3.7 + 9^4.8 + 9^5.6 + 6.9^6 + 9^8.8 + 2.9^9 + 2.9^{10} < 9^{11}.$

Nên $\deg P(x) < 11$

Giả sử $P(x) = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + ... + a_{10}$ với a_i nguyên thuộc đoạn [0; 8] với i từ 0 đến 10

$P(9) \equiv a_{10} \bmod(9) \equiv 1 (\bmod 9) \rightarrow a_{10} = 1$

$$a_9 \equiv \frac{P(9)-1}{9}\bmod 9 \equiv 3 \bmod 9 \rightarrow a_9 = 3$$

$$a_8 \equiv \frac{P(9)-1-3.9}{9}\bmod 9 \equiv 5 \bmod 9 \rightarrow a_8 = 5$$

$$a_7 \equiv \frac{P(9)-1-3.9-5.9^2}{9}\bmod 9 \equiv 7 \bmod 9 \rightarrow a_8 = 7$$

Tương tự

$a_6 = 8, a_5 = 6, a_4 = 6, a_3 = 0, a_2 = 8, a_1 = 2, a_0 = 2.$

Vậy $P(x) = 2x^{10} + 2x^9 + 8x^8 + 6x^6 + 6x^5 + 8x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 3x + 1$.

Thử lại đa thức trên thỏa mãn tất cả giả thiết của đề.

Câu 4:

Từ giả thiết có tam giác ABC nhọn vì

$\tan A \tan B \tan C > 0$ mà $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$, nên theo bất đẳng thức Côsi ta có $M = \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$ (1). Có thể giả sử

$$0 < A \leq B \leq C < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\sin\frac{A}{2} - \sin\frac{B}{2}\right)\left(\cos\frac{B}{2} - \cos\frac{C}{2}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \sin\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$N = 4(\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}) \leq 4\cos\frac{B}{2} + 2\sin B = f(B)$$

$$f'(B) = 2(-\sin\frac{B}{2} + \cos B), f'(B) = 0 \Leftrightarrow B = \frac{\pi}{3} \to N \leq 3\sqrt{3}$$

$M = N$ khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Câu 5:

$x^y > y^x$, $x; y \in N^*$ (1)

- Với $x = 1$ và y nguyên dương thì không thỏa mãn (1).
- Với $x = 2$ và $y > 0$. có (1) $\Leftrightarrow f(y) = 2^y - y^2 > 0$

Có $f(1) = 1 > 0; f(2) = 0; f(3) = -1; f(4) = 0, f(5) = 7 > 0$.

Xét $f(y) = 2^y - y^2, y > 5 \to f'(y) = 2^y \ln 2 - 2y$,

$$f''(y) = 2^y \ln^2 2 - 2 = 2^{y-2}\ln^2 4 - 2 > 0.$$

Do đó $f'(y) > f'(5) > 0 \to f(y) > f(5) > 0$.

Trường hợp này (1) có các nghiệm (2; 1), (2; y) với y nguyên và $y \geq 5$

- Với $x \geq 3$, $y = 1$ thỏa mãn (1).
- Với $x \geq 3$, $y = 2$: (1) $\Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x = 3$ (do chứng minh trên và x nguyên)

Trường hợp này (1) nghiệm (3; 2).

- Với $x, y \geq 3$. Ta có $x^y > y^x \Leftrightarrow h(x) > h(y), h(t) = \frac{\ln t}{t}, t \in [3; +\infty)$

$$\to h'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} < 0 \to 3 \leq x < y$$

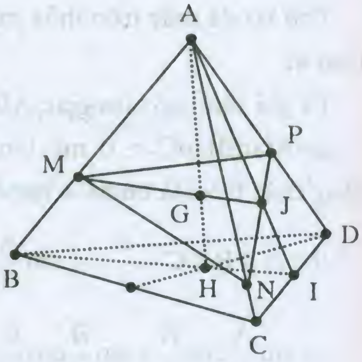
Tập nghiệm của (1) là $S = \{(x; 1), (2; y), (3; 2), (m; n)$ với $(x, y, m, n \in N, x \geq 1,$

$y \geq 5, 3 \leq m < n\}$.

Câu 6:

Đặt $AB = xAM$, $AC = yAN$, $AD = zAP$, gọi H là trọng tâm tam giác BCD.

Ta có



$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{x}{4}\overrightarrow{AM} + \frac{y}{4}\overrightarrow{AN} + \frac{z}{4}\overrightarrow{AP}, G \in (MNP)$$

$$\to x + y + z = 4, x, y, z \in [1;4]$$

(bài tập 5 SGK HH11 nâng cao trang 91)

$$\text{Và } V(AMNP) = \frac{1}{xyz}V(ABCD)$$

$$= \frac{1}{xyz}.\frac{a^3\sqrt{2}}{12} \geq \left(\frac{3}{x+y+z}\right)^3.\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{256}$$

$$\text{Nên } \mathrm{Min}V(AMNP) = \frac{a^3\sqrt{2}}{256} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (MNP)//(BCD)$$

$$\text{Giả sử } 1 \leq x \leq y \leq z \leq 4 \to xyz \geq 1.y.(x + z - 1) \text{do} (xy - 1)(z - 1) \geq 0$$

$$y(x + z - 1) = (4 - t)(t - 1) = -t^2 + 5t - 4 = -(t - 2)(t - 3) + 2 \geq 2,\ t = x + z \in [2;3]$$

$$\mathrm{Max}V(AMNP) = \frac{a^3\sqrt{2}}{24} \Leftrightarrow x = y = 1, z = 2 \Leftrightarrow M \equiv B, N \equiv C, AP = PD.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KHÁNH HÒA
TRƯỜNG THPT LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1:

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$

Ta có $f(n/m) = a(n/m)^2 + b(n/m) + c = n^2/m\ (a/m + b/n) + c = c\ (mp - n^2)/mp$

Và $f(0) = c$

Do đó $f(0)f(n/m) = c^2\ (mp - n^2)/mp$

Nếu $c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x = n/m$ thỏa mãn đề bài

Nếu $c \neq 0$ thì $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0; n/m)$

Do $f(0)f(n/m) = c^2\ (mp - n^2)/mp < 0$, $n/m < 1$

Nên phương trình có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

Câu 2:

Bất phương trình đã cho xác định với $x > 0$ và có thể viết dưới dạng

$$(3x - a)(x - 1) > \frac{1}{2}(a - 3x)(\log_3 x)^3 \Leftrightarrow (3x - a)\left(\frac{1}{2}(\log_3 x)^3 + x - 1\right) > 0$$

Đặt $f(x) = \frac{1}{2}(\log_3 x)^3 + x - 1$; bất phương trình trên được viết dưới dạng

$$(3x - a)\ f(x) > 0 \qquad (1)$$

Hàm số f(x) xác định và đồng biến trong khoảng $(0, +\infty)$.
Vì $f(1) = 0$ nên $f(x) < 0$ với mọi $x \in (0,1)$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in (1, +\infty)$.

$$3x - a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$$

1. Nếu $a/3 \le 0$, tức là $a \le 0$ thì dấu của vế trái của bất phương trình (1) được cho trong bảng sau:

x		$\frac{a}{3}$		0		1	
g(x)					−	0	+
3x − a	−	0	+		+		+
(3x − a)f(x)					−	0	+

Nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 1$.

2. Nếu $0 < \frac{a}{3} < 1$, tức là $0 < a < 3$ thì ta có bảng xét dấu:

x	0		$\frac{a}{3}$		1	
f(x)		−		−	0	+
3x − a		−	0	+		+
(3x − a) f(x)		+	0	−	0	+

Nghiệm của bất phương trình đã cho là: $0 < x < \frac{a}{3}$ hoặc $x > 1$.

Lập bảng xét dấu của $(3x - a)f(x)$ tương tự như trên, ta được các kết quả sau:

3. Nếu $\frac{a}{3} = 1$ tức là $a = 3$ thì nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x > 0; x \neq 1$.

4. Nếu $\frac{a}{3} > 1$, tức là $a > 3$ thì nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$0 < x < 1; x > \frac{a}{3}.$$

Kết luận:

1. Nếu $a \le 0$ thì nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x > 1$

2. Nếu $0 < a < 3$ thì nghiệm của bất phương trình đã cho là: $0 < x < \frac{a}{3}; x > 1$.

3. Nếu $a = 3$ thì nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x > 0; x \neq 1$

4. Nếu $a > 3$ thì nghiệm của bất phương trình đã cho là: $0 < x < 1; x > \frac{a}{3}$.

Câu 3:

Xét dãy sau: $v_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$

Từ công thức truy hồi ta có $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{6a_{n-1}a_{n-3} - 8a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}$

Suy ra: $v_n = 6v_{n-1} - 8v_{n-2}$ (1)

Ta sẽ chứng minh rằng với mọi n = 1, 2, 3,... ta có $v_{n+1} = 4^n - 2^n$ (2)

(2) được chứng minh bằng quy nạp như sau:

Với n = 1, ta có $v_2 = \frac{a_2}{a_1} = 2 = 4^1 - 2^1$, vậy (2) đúng khi n = 1

Với n = 2, ta có $v_3 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{24}{2} = 12 = 4^2 - 2^2$, vậy (2) đúng khi n = 2

Giả sử (2) đã đúng khi $n = k \geq 2$, tức là $v_{k+1} = 4^2 - 2^2$ (3)

Xét khi n = k + 1. Theo (1) ta có $v_{k+2} = 6v_{k+1} - 8v_k$ (4)

Áp dụng giả thuyết quy nạp (3) ta có:

$$v_{k+2} = 6(4^k - 2^k) - 8(4^{k-1} - 2^{k-1}) = 6.4^k - 6.2^k - 2.4^k - 4.2^k$$
$$= 4.4^k - 2.2^k = 4^{k+1} - 2^{k+1}$$

Vậy (2) cũng đúng khi n = k + 1

Theo nguyên lý quy nạp thì (2) đúng với mọi n = 1, 2,...

Ta có: $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}.\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}...\frac{a_2}{a_1}.a_1 = v_n.v_{n-1}...v_2.a_1$

Vì thế từ (2) suy ra $a_n = (4^{n-1} - 2^{n-1})(4^{n-2} - 2^{n-2}) ... (4 - 2)$ (5)

Với mọi số nguyên tố p, theo Định lý Fermat ta có:

$(4^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod p$; $(2^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod p$

Suy ra: $(4^{p-1} - 2^{p-1}) \equiv (\text{mod } p) \Rightarrow (4^{p-1} - 2^{p-1}) \vdots p$ với mọi số nguyên tố p.

Từ đó suy ra nếu s là bội số của p – 1, thì $(4^s - 2^s) \vdots p$

Giả sử n là số nguyên dương tùy ý, và n có dạng khai triển sau $n = p_1^{r_1}p_2^{r_2}...p_k^{r_k}$,

(ở đây $p_1 < p_2 < ... < p_k$ là các số nguyên tố).

Từ $n \vdots p_1^{r_1}$ suy ra $n \vdots p_1$, $n \vdots p_2$, ..., $n \vdots p_1^{r_1}$

Tức là $n = d_1p_1 = d_2p_1^2 = d_3p_1^3 = ... = d_{r_1}p_1^{r_1}$

Suy ra: $d_1 > d_2 >.. d_{r_1} \Rightarrow n - d_1 > n - d_2 > ... > n - d_{r_1}$ và ta có:

$$n - d_1 = d_1(p_1 - 1)$$
$$n - d_2 = d_2(p_1^2 - 1)$$

$$n - d_{r_1} = d_{r_1}(p_1^{r_1} - 1)$$

Như vậy ta có $n - d_1, n - d_2, \ldots, n - d_{r_1}$ là r_1 bội khác nhau của $p_1 - 1$.

Theo trên ta có: $(4^{n-d_k} - 2^{n-d_k}) \vdots p_1 \ \forall k = 1, 2, \ldots, r_1$

Từ đó dựa vào (5), ta có: $a_n \vdots p_1^{r_1}$

Lập luận tương tự có: $a_n \vdots p_j^{r_j}$ (với mọi $j = 2, 3, .., k$)

Suy ra: $a_n \vdots p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$ hay $a_n \vdots n$. (đpcm)

Câu 4

Gọi G là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} - 9\overrightarrow{GC} = \vec{0}$, suy ra G cố định và thuộc mp (ABC).

$$S = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 - 9(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= -4MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} - 9\overrightarrow{GC}) + GA^2 + 4GB^2 - 9GC^2$$

$$= -4MG^2 + GA^2 + 4GB^2 - 9GC^2$$

Vì $GA^2 + 4GB^2 - 9GC^2$ không đổi nên S đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là chân đường vuông góc hạ từ G xuống (P).

Câu 5

$$\frac{10^{2000}}{10^{100} + 3} = \frac{10^{2000} - 3^{20}}{10^{100} + 3} + \frac{3^{20}}{10^{100} + 3}$$

$$3^{20} = 9^{10} < 10^{10} < 10^{100} + 3 \Rightarrow 0 < \frac{3^{20}}{10^{100} + 3} < 1$$

Mặt khác: $10^{2000} - 3^{20} \vdots 10^{200} - 3^2 \vdots 10^{100} + 3$

$$\Rightarrow A = \left[\frac{10^{2000}}{10^{100} + 3}\right] = \frac{10^{2000} - 3^{20}}{10^{100} + 3}$$

$$= \frac{10^{200} - 3^2}{10^{100} + 3}[10^{200.9} + 10^{200.8}.3^2 + \ldots + 10^{200.1}.3^{2.8} + 3^{2.9}]$$

$$= (10^{100} - 3)(10^{1800} + 10^{1600}.3^2 + \ldots + 3^{18})$$

Mà $3^{18} = 3^{4.4+2} = 9.81^4 = 9 \pmod{10}$

$\Rightarrow A = -3.9 = -27 = 3 \pmod{10}$

Vậy chữ số tận cùng của $\left[\frac{10^{2000}}{10^{100} + 3}\right]$ là 3.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT NGUYỄN THƯỢNG HIỀN

Câu 1:

Ta có hệ $\begin{cases} 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5\left(z+\dfrac{1}{z}\right) & (1) \\ xy+yz+zx=1 & (2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{3(x^2+1)}=\dfrac{y}{4(y^2-1)}=\dfrac{z}{5(z^2-1)} & (3) \\ xy+yz+zx=1 & (4) \end{cases}$$

Nhận xét: các thành phần nghiệm của hệ cùng dấu (suy ra từ (3)). Nếu hệ (1) có nghiệm dương (x_0, y_0, z_0), thì $(-x_0, -y_0, -z_0)$ cũng là một nghiệm của hệ.

Vì thế trước hết ta chỉ cần tìm nghiệm dương của hệ (3), (4)

Đặt $x=\tan\dfrac{A}{2}$; $y=\tan\dfrac{B}{2}$; $z=\tan\dfrac{C}{2}$ như vậy $0 < A, B, C < 180^0$

Từ (4) ta có: $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$ hay

$$\tan\frac{A}{2}\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)=1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}=\frac{1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{C}{2}}{\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}}=\cot\frac{B+C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^0 \Rightarrow A+B+C=180^0$$

Vậy có thể coi A, B, C là ba góc của một tam giác.

Mặt khác từ (3) ta có:

$$\frac{\tan\dfrac{A}{2}}{3\left(1+\tan^2\dfrac{A}{2}\right)}=\frac{\tan\dfrac{B}{2}}{4\left(1+\tan^2\dfrac{B}{2}\right)}=\frac{\tan\dfrac{C}{2}}{5\left(1+\tan^2\dfrac{C}{2}\right)} \text{ hay } \frac{\sin A}{3}=\frac{\sin B}{4}=\frac{\sin C}{5} \quad (5)$$

Theo định lí hàm số sin, ta suy ra $\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{5}$ trong đó a, b, c là ba cạnh đối diện của ba góc A, B, C.

Từ đó suy ra $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow C=90^0 \Rightarrow z=\tan\dfrac{C}{2}=1$.

Từ (5) suy ra $\sin A = \frac{3}{5}\sin C = \frac{3}{5}$ nên: $x = \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \frac{1}{3}$

$$y = \tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}} = \frac{1}{2}$$

Vậy $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2};1\right)$ và do đó $\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2};-1\right)$ cũng là nghiệm của hệ (1) (2).

Câu 2:

Gọi C = A\B, vậy C gồm: 25 – 17 = 8 phần tử.

Xét các số chính phương thuộc A (5 số) 1, 4, 9, 16, 25.

Nếu B chứa (ít nhất) hai trong 5 số này, thì B có tính chất phải tìm.

Giả sử B không chứa, hoặc cùng lắm là chứa một trong 5 số trên, vậy C không chứa ít trong 5 số đó. Loại các số đó ra khỏi C, ta được tập C_1 chứa không quá 4 phần tử.

Xem các cặp số

(I) (3, 12), (5, 20), (6, 24)

(II) (2, 8), (2, 18), (8, 18)

Nếu C_1 không chứa hơn hai số trong sáu số ở 3 cặp (I), thì B chứa một cặp số (I) và có tính chất phải tìm.

Giả sử C_1 chứa 3 số trong 6 số ở ba cặp (I), loại 3 số đó khỏi C_1, ta được tập C_2 không chứa hơn một phần tử.

Xét ba cặp số (II) trong đó chỉ tham gia ba số: 2, 8, 18. Cùng lắm chỉ có một số thuộc C_2, vậy còn hai số thuộc B, lập thành một cặp và B có tính chất phải tìm. Tóm lại ta luôn tìm được tập B thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3:

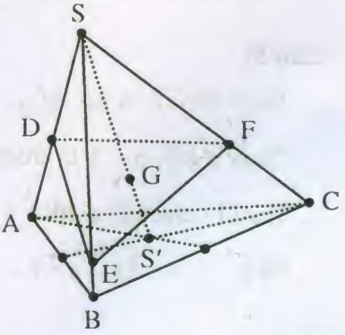
Vì G là trọng tâm của tứ diện SABC nên đường thẳng SG đi qua trọng tâm S' của tam giác đáy ABC và ta có hệ thức:

$\overrightarrow{SG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{SS'}$, hay: $4\overrightarrow{SG} = 3\overrightarrow{SS'} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$

Từ đó ta được:

$$4\overrightarrow{SG} = \frac{SA}{SD}\overrightarrow{SD} + \frac{SB}{SE}\overrightarrow{SE} + \frac{SC}{SF}\overrightarrow{SF}$$

Theo giả thiết SA = SB = SC = 1 nên



$$\overrightarrow{SG}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{SD}\overrightarrow{SD}+\frac{1}{SE}\overrightarrow{SE}+\frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}\right) \quad (1)$$

Lại có $\overrightarrow{SG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{SF}) \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(\frac{1}{4SD}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{SD}+\left(\frac{1}{4SE}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{SE}+\left(\frac{1}{4SF}-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{SF}=\vec{0}$

$$\Rightarrow \frac{1}{SD}+\frac{1}{SE}+\frac{1}{SF}=4 \quad (*)$$

Từ (*) suy ra: $\frac{1}{SD.SE}+\frac{1}{SE.SF}+\frac{1}{SD.SF} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{SD}+\frac{1}{SE}+\frac{1}{SF}\right)^2=\frac{16}{3}$

Vậy ta được: $P_{max}=\frac{16}{3} \Leftrightarrow SD=SE=SF=\frac{3}{4} \Leftrightarrow G \in mp(DEF) \,//\, mp(ABC)$

Câu 4:

Xét hàm số $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x-\frac{1}{x}$ với $x>0$

Thì $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{x^2\sqrt{1+x^2}}>0$

Vậy f(x) là hàm đồng biến khi $x>0$.

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right]=0$

(do tính liên tục của hàm số logarit);

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right]-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

điều này chứng tỏ hàm số $y=f(x)$ có tiệm cận ngang là $y=0$ *1đ*

Ta thấy $y=f(x)$ là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$, và có tiệm cận ngang khi $x\to+\infty$.

Vậy $f(x)<0$ với mọi $x>0$ hay $\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)<\ln x+\frac{1}{x}$

Câu 5:

Theo bài ra ta có: $a_{n+1}^2-8a_na_{n+1}+a_n^2+60=0 \qquad (1)$

Thay n bởi n – 1 ta được: $a_n^2-8a_{n-1}a_n+a_{n-1}^2+60=0 \qquad (2)$

Trừ (1) cho (2) được: $a_{n+1}^2-a_{n-1}^2+8a_{n-1}a_n-8a_na_{n+1}=0$

Hay $(a_{n+1}-a_{n-1})(a_{n+1}-8a_n+a_{n-1})=0$

Dễ thấy từ $a_{n+1} > 4a_n > 16a_{n-1}$ suy ra $(a_{a+1} - a_{n-1}) > 0$.

Do đó $\quad a_{n+1} - 8a_n + a_{n-1}$

Phương trình đặc trưng có dạng: $t^2 - 8t + 1 = 0$

Với hai nghiệm $t_{1,2} = 4 \pm \sqrt{15}$. Ta xác định được công thức tổng quát của dãy $\{a_n\}$ là $a_n = (4+\sqrt{15})^n + (4-\sqrt{15})^n$.

Bây giờ ta chứng minh $\frac{1}{5}(a_{2n}+8)$ luôn được biểu diễn dưới dạng tổng bình phương của 3 số nguyên liên tiếp.

Thật vậy, với mỗi $n \geq 1$, thì $\exists\, k \in \mathbb{N}$ để

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^n - \left(4-\sqrt{15}\right)^n = \sqrt{15}k \Rightarrow \left(\left(4+\sqrt{15}\right)^n - \left(4-\sqrt{15}\right)^n\right)^2 = 15k^2$$

hay $\left(4+\sqrt{15}\right)^{2n} - \left(4-\sqrt{15}\right)^{2n} = 15k^2 + 2$

Do vậy: $\frac{1}{5}(a_{2n}+8) = \frac{1}{5}\left(\left(4+\sqrt{15}\right)^{2n} + \left(4-\sqrt{15}\right)^{2n} + 8\right)$

$$= 3k^2 + 2 = (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2.$$

Câu 6:

Ta có: $\quad 16x^4 - 219x + 249 = (4x^2 - 7)^2 + 56x^2 - 219x + 200$

Mà $\quad 56x^2 - 219x + 200 > 0$ (do $\Delta < 0$)

Do đó $\quad 16x^4 - 219x + 249 > 0$ $(\forall\, x)$

Đặt $f(x) = \dfrac{12-6x}{16x^4 - 219x + 249}$

Ta chứng minh

a) $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow 16x^4 - 216x + 243 \geq 0 \Leftrightarrow (4x^2-9)^2 + 18(2x-3)^2 \geq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi: $x = \frac{3}{2}$.

b) $f(x) > -1 \Leftrightarrow 16x^4 - 225x + 261 > 0$

$\Leftrightarrow (4x^2-9)^2 + 72x^2 - 225x + 180 > 0$ đúng vì tam thức

$2x^2 - 225x + 180$ có $\Delta = -1215 < 0$.

Vậy $-1 < f(x) \leq 2$. Với $x = 2$ thì $f(x) = 0$.

Hàm f(x) liên tục nên đi qua tất cả các giá trị trong [0, 2].

Vậy $\exists\, x$ để $f(x) = 1$.

Như vậy tất cả các giá trị nguyên của f(x) là 0, 1, 2.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ YÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH

Câu 1:

Đặt z = y, hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} \dfrac{1+x}{1+z} = e^{\cos x - \cos y} & (1) \\ z = 1 - \sqrt{2x - x^2} & (2) \end{cases}$

Ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} z \le 1 \\ (z-1)^2 = 2x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \le 1 \\ (x-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$

Nên nếu (x, z) là nghiệm thì $x, z \in [0; 2]$

Do hai vế của (1) dương, lấy logarit neper hai vế ta được

$\ln(x + 1) - \ln(z + 1) = \cos x - \cos z$

$\Leftrightarrow \ln(x + 1) - \cos x = \ln(z + 1) - \cos z \Leftrightarrow f(x) = f(z)$ (3)

(với $f(t) = \ln(t + 1) - \cos t$, $t \in [0; 2]$)

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{t+1} + \sin t > 0$, $\forall\, t \in [0; 2]$ nên f tăng trên $t \in [0; 2]$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow$ x = z. Thế vào (2) ta giải được $x = z = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$.

Câu 2:

Giả sử A, B, C là ba tập thỏa mãn bài toán. Do C khác rỗng nên tồn tại x là phần tử nhỏ nhất của C, ta có $\{1, 2, 3,.., x - 1\} \subset A \cup B$.

Từ giả thiết với mọi $a \in A$, $b \in B$, ta có $a + x \in A$, $b + x \in B$ nên

$t + nx \in A \cup B$, với mọi $t \in \{1, 2, 3..., x - 1\}$.

Do đó tất cả các số không chia hết x đều thuộc $A \cup B$ hay với mọi $c \in C$, c là bội của x. Vì vậy, với mọi $a \in A$, $b \in B$, ta có a + b = kx.

Giả sử x = 1, từ $a \in A$, $b \in B$ suy ra $a + 1 \in A$, $b + 1 \in B$ nên ta cũng có $a + m \in A$, $b + n \in B$ với mọi m, n nguyên dương và do đó $a + b \in A \cap B$. Điều này mâu thuẫn với (1).

Giả sử x = 2. Không mất tính tổng quát, ta có $1 \in A$. Từ (3) suy ra mọi số lẻ đều thuộc A. Giả sử $b \in B$, ta có $b + 1 \in C$, suy ra b lẻ (vì C là tập các số chẵn), do đó $b \in A \cap B$. Mâu thuẫn với (1).

Giả sử $x \ge 4$. Ta có $\{1, 2, 3\} \subset A \cup B$. Do (1) nên không mất tính tổng quát, giả sử có hai trong ba số 1, 2, 3 thuộc A mà ta ký hiệu là y, z.

Lấy $b \in B$, ta có $b + y$, $b + z \in C$ hay $b + y$, $b + z$ là bội của x và do đó

$$(b + y) - (b + z) = y - z \text{ cũng là bội của } x.$$

Mà $|y - z| \leq 2 < x$, nên trường hợp này không thể xảy ra.

Vậy x chỉ có thể bằng 3. Ta chứng minh 1 và 2 không thể đồng thời thuộc A (và do đó cũng không thể đồng thời thuộc B). Giả sử 1 và 2 đều thuộc A, từ (3) ta có các số có dạng $3k + 1$, và $3k + 2$ đều thuộc A, với mọi k nguyên dương. Lấy $b \in B$, ta có $b + 1$ thuộc C suy ra $b + 1$ là bội của 3 hay b có dạng $3k + 2$ nên $b \in A$. Mâu thuẫn với $A \cap B = \varnothing$.

Vậy chỉ có thể $1 \in A$ và $2 \in B$ hoặc ngược lại.

Do đó $A = \{3k + 1 / k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3k + 2 / k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{3k / k \in \mathbb{N}^*\}$

hoặc $A = \{3k + 2 / k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{3k + 1 / k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{3k / k \in \mathbb{N}^*\}$.

Thử lại các nghiệm này ta thấy thỏa yêu cầu của đề bài.

Câu 3:

Xét hình chóp cụt tam giác $A_1B_1C_1.A_2B_2C_2$.

Đặt $S_{A_1B_1C_1} = B_1; S_{A_2B_2C_2} = B_2;$

Gọi thiết diện song song với đáy là $A'B'C'$. Đặt $S_{A'B'C'} = B'$

S_1 là diện tích xung quanh hình chóp cụt $A_1B_1C_1.A'B'C'$.

S_1 là diện tích xung quanh hình chóp cụt $A'B'C'.A_2B_2C_2$.

r_1 là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp cụt $A_1B_1C_1.A'B'C'$.

r_2 là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp cụt $A'B'C'.A_2B_2C_2$

Ta có $\quad V_{A_1B_1C_1.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}r_1(S_1 + B_1 + B') = \dfrac{2}{3}r_1(B_1 + B' + \sqrt{B_1B'})$

$\Rightarrow S_1 = B_1 + B' + 2\sqrt{B_1B'}$

Tương tự ta có: $S_2 = B_2 + B' + 2\sqrt{B_2B'}$

$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = B_1 + B_2 + 2B' + 2\sqrt{B'}(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2})$

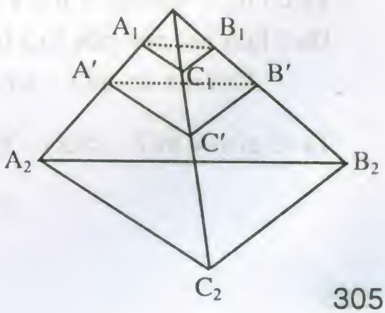
Xét phép vị tự: $V_S^{\frac{SA'}{SA_1}} : \Delta A_1B_1C_1 \to \Delta A'B'C'$

Vì phép vị tự này biến mặt cầu 1 thành mặt cầu 2 nên suy ra

$V_S^{\frac{SA'}{SA_1}} : \Delta A'BC' \to \Delta A_2B_2C_2$.

Do đó: $\dfrac{B'}{B_1} = \left(\dfrac{SA'}{SA_1}\right)^2 = \dfrac{B_2}{B'}$.

Từ đây ta có: $B' = \sqrt{B_1B_2}$



$$\Rightarrow S = B_1 + B_2 + 2\sqrt{B_1B_2} + 2\sqrt{\sqrt{B_1B_2}}\left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)^2 + 2\sqrt[4]{B_1B_2}\left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)\left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2} + 2\sqrt[4]{B_1B_2}\right) = \left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)\left(\sqrt[4]{B_1} + \sqrt[4]{B_2}\right)^2$$

Vậy $S = \left(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2}\right)\left(\sqrt[4]{B_1} + \sqrt[4]{B_2}\right)^2$.

Câu 4:

Ta có bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{(\sqrt{a+b+c})^3}{\sqrt{abc}} \geq 4\sqrt{3}.$$

Do $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3(\sqrt{abc})^{1/3}$ nên ta cần chứng minh

$$\frac{3(\sqrt{abc})^{1/3}}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{(\sqrt{a+b+c})^3}{\sqrt{abc}} \geq 4\sqrt{3} \qquad (2)$$

Thật vậy, đặt $t = \dfrac{\sqrt{a+b+c}}{(\sqrt{abc})^{1/3}} = \sqrt{\dfrac{a+b+c}{(abc)^{1/3}}} \geq \sqrt{3}$, ta có

$(2) \Leftrightarrow \dfrac{3}{t} + t^3 \geq 4\sqrt{3}$.

Do $t > 0$ nên

$$\frac{3}{t} + t^3 = \frac{3}{t} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^3}{3} \geq \frac{4t^2}{\sqrt{3}} \geq 4\sqrt{3}.$$

Bất đẳng thức đã cho được chứng minh và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} = \sqrt{c} \\ a = b = c \\ \dfrac{3}{t} = \dfrac{t^3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Câu 5:

Đặt $f(x) = \ln(2 - \sin x) - 2$.

Ta có $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall\, n \geq 1$.

Do f liên tục nên nếu (u_n) hội tụ về α thì α là nghiệm của phương trình

$$f(x) = x \Leftrightarrow \ln(2 - \sin x) - x - 2 = 0.$$

Ta có $g(x) = \ln(2 - \sin x) - x - 2$ liên tục và $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$, $f(0) < 0$ nên α tồn tại.

Ta chứng minh $u_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, ∀ n.

Thật vậy, giả sử $u_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, ta có $-1 < \sin u_n < 0 \Rightarrow 2 < 2 - \sin u_n < 3$

$$\Rightarrow \ln 2 < \ln(1 - \sin u_n) < \ln 3 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \ln 2 - 2 < \ln(1 - \sin u_n) - 2 < \ln 3 - 2 < 0$$

hay $-\frac{\pi}{2} < u_{n+1} < 0$

Ta có $f'(x) = \frac{-\cos x}{1 - \sin x} \Rightarrow \left(f'(x)\right)^2 = \frac{1 - \sin^2 x}{(\sin x - 2)^2}$

Đặt $t = \sin x$, ta có $\left(f'(x)\right)^2 = h(t)$ với $h(t) = \frac{1 - t^2}{(t-2)^2}$, $(-1 < t < 0)$.

Ta có $h'(t) = \frac{(2t-1)(t-2)}{(t-2)^4}$

t	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$h'(t)$						
$h(t)$	↗	0	↗ ↗	1/4	↘ ‖	↘

Ta có $h(t) \le \frac{1}{4}$, $\forall t \in (-1, 0)$, suy ra $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Áp dụng định lý Lagrange, với mọi $a, b \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, $a < b$, ta có

$$|f(b) - f(a)| = f'(c)|b - a| \le \frac{1}{2}|b - a| \quad (c \in (a, b))$$

Do đó $\quad |u_n - \alpha| = |f(u_{n-1} - f(\alpha)| \le \frac{1}{2}|u_{n-1} - \alpha|$

$$\le \frac{1}{2^2}|u_{n-2} - \alpha|$$

...

$$\le \frac{1}{2^{n-1}}|u_1 - \alpha| = \frac{1}{2^{n-1}}|a - \alpha|.$$

Suy ra dãy $(u_n - \alpha)$ hội tụ và do đó (u_n) hội tụ.

Câu 6:

Thế $x = y = 0$ vào (i), ta được $f(0) \le 2f(0)$, suy ra $f(0) \ge 0$.

Thế $y = -x$ vào (i), ta có $f(x) + f(-x) \ge f(0) \ge 0$ hay $f(-x) \ge -f(x), \forall x \in R$.

Từ (i) ta cũng có $f(nx) \le nf(x), \forall n \in N^*, \forall x \in R$

Hay $f(x) \le nf(\frac{x}{n}), \forall n \in N^*, \forall x \in R \Leftrightarrow \frac{f(x)}{n} \le f(\frac{x}{n}), \forall n \in N^*, \forall x \in R$.

Khi đó với $x > 0$ bất kì, ta có: $\dfrac{f(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} \ge \dfrac{f(x)}{n\frac{x}{n}} = \dfrac{-f(x)}{-x} \ge \dfrac{f(-x)}{-x} \ge \dfrac{f(-\frac{x}{n})}{-\frac{x}{n}}$.

Cho $n \to \infty$, sử dụng điều kiện (ii) và định lý kẹp, ta được

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(-x)}{-x} = 1 \ \forall x \in R.$$

Từ đó ta có $f(x) = x, \forall x \ne 0$.

Mặt khác, từ các kết quả trên ta thấy

$$0 \le f(0) = f(1 + (-1)) \le f(1) + f(-1) = 0$$

Vậy $f(x) = x, \forall x \in R$. Thử lại ta thấy f chính là hàm cần tìm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒNG THÁP
TRƯỜNG THPT TP. CAO LÃNH

Câu 1:

Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(1-3z^2\right) = 3z - z^3 \\ y\left(1-3x^2\right) = 3x - x^3 \\ z\left(1-3y^2\right) = 3y - y^3 \end{cases}$ (I) ĐK: $x, y, z \ne \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3z - z^3}{1-3z^2} (1) \\ y = \dfrac{3x - x^3}{1-3x^2} (2) \\ z = \dfrac{3y - y^3}{1-3y^2} (3) \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Đặt: $x = \tan\alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (4) và $\tan\alpha, \tan3\alpha, \tan9\alpha \ne \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (5).

Khi đó từ (II) có: $y = \tan3\alpha$; $z = \tan9\alpha$; $x = \tan27\alpha$.

Từ đó, (x, y, z) là nghiệm của (II) khi và chỉ khi:

$x = \tan\alpha; y = \tan 3\beta; z = \tan 9\alpha$

với α được xác định bởi (4), (5) và $\tan\alpha = \tan 27\alpha$ (6).

Ta có: (6) $\Leftrightarrow 26\alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{26}; \alpha \text{ thỏa đồng thời (4), (6)} \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{26}, k \in \mathbb{Z}: -12 \le k \le 12.$$

Tất cả những giá trị này đều thỏa mãn (5).

Vậy hệ có 25 nghiệm:

$$\left(x = \tan\frac{k\pi}{26}; y = \tan\frac{3k\pi}{26}; z = \tan\frac{9k\pi}{26}\right); k = 0; \pm 1; \pm 2; ...; \pm 12.$$

Câu 2:

Đặt $S_1 = \sum_{i=1}^{6} x_i$ $\qquad S_2 = \sum_{1 \le i < j \le 6} x_i x_j$

$S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le 6} x_i x_j x_k$ $\qquad S_4 = \sum_{1 \le i < j < k < l \le 6} x_i x_j x_k x_l$

$S_5 = \sum_{1 \le i < j < k < l < m \le 6} x_i x_j x_k x_l x_m$ $\qquad S_6 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$

Theo định lý Viet $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ là 6 nghiệm của phương trình

$$x^6 - S_1 x^5 + S_2 x^4 - S_3 x^3 + S_4 x^2 - S_5 x + 1 = 0 \qquad (1)$$

Từ giả thiết (*) ta được $\begin{cases} S_1 = S_5 \\ S_2 = S_4 \end{cases}$

Do đó, nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $\frac{1}{x_0}$ cũng là nghiệm của (1). Vậy tập nghiệm của (1) được phân thành 3 cặp mà tích hai số trong mỗi cặp bằng 1.

Câu 3:

Gọi V, S và r lần lượt là thể tích, diện tích toàn phần và bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện MNPQ. XY là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng x, y, X trên x và Y trên y, XY = d, $(x, y) = \varphi$.

Ta có $\quad r = \frac{3V}{S}$

$$V = \frac{1}{6} MN.PQ.XY.\sin(x, y) = \frac{1}{6} abd.\sin\varphi = \text{const}.$$

Từ đó suy ra rmax $\Leftrightarrow$ Smin

Hạ $MM_1 \perp y = M_1; NN_1 \perp y = N_1; PP_1 \perp x = P_1; QQ_1 \perp x = Q_1$

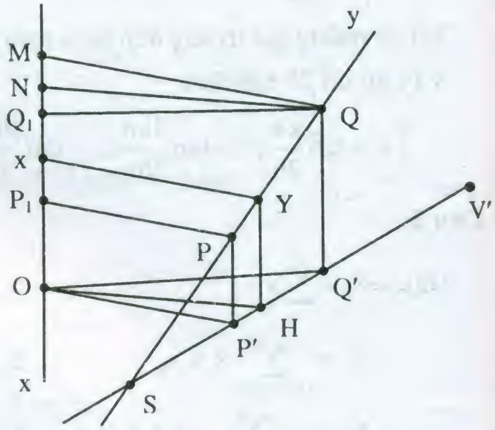
Ta có $2S = MN(PP_1 + QQ_1) + PQ(MM_1 + NN_1) = 2S_1 + 2S_2$

trong đó $2S_1 = a(PP_1 + QQ_1)$; $2S_2 = b(MM_1 + NN_1)$

Ta chứng minh $S_1 = \min$ và $S_2 = \min \Leftrightarrow S = \min$. Thật vậy, chiếu toàn bộ hình vẽ lên mp (P) nào đó vuông góc với x ở điểm O. Gọi y' là hình chiếu của y lên (P), trong đó O, H, P', Q' lần lượt là hình chiếu của X, Y, P và Q trên (P).

Dễ thấy: $OH \mathbin{//=} XY = d'$ $P'Q' = PQ\sin\varphi = b' = b\sin\varphi$ (hằng số), cũng vậy:

$PP_1 \mathbin{//=} OP'$; $QQ_1 \mathbin{//=} OQ'$



Từ đó ta được, $2S_1 = a(OP' + OQ')$.

Suy ra: $S_1\min \Leftrightarrow OP' + OQ' = \min$

Vì $OH \perp P'Q' = H$, $OH = d$, $P'Q' = b' = b\sin\varphi$ nên tam giác OP'Q' có diện tích không đổi. Từ đó dễ thấy tam giác OP'Q' có chu vi nhỏ nhất, tức là $OP' + OQ' = \min$, khi và chỉ khi nó là tam giác cân ở O, tức là khi và chỉ khi P' và Q' đối xứng nhau qua H, và do đó P và Q đối xứng nhau qua Y.

Chứng minh tương tự, $S_2 = \min$

$\Leftrightarrow$ M và N đối xứng nhau qua X.

Tóm lại, bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện MNPQ lớn nhất khi và chỉ khi đường vuông góc chung XY của hai đường chéo nhau x và y là trục đối xứng của tứ diện MNPQ (có cạnh MN = a trên x và cạnh PQ = b trên y), nghĩa là:

$$XM = XN = \frac{a}{2} \text{ và } YP = YQ = \frac{b}{2}.$$

Câu 4:

Ta có $P = ab^{m-1} + a^{m-1}b = a(1-a)^{m-1} + a^{m-1}(1-a)$

$$= a^{m-1} - a^m + (1-a)^{m-1} - (1-a)^m,\ \frac{2}{m} \le a \le \frac{m-2}{m}$$

Xét hàm số $f(x) = x^{m-1} - x^m + (1-x)^{m-1} - (1-x)^m$ $x \in \left[\frac{2}{m}; \frac{m-2}{m}\right]$

Ta có: $f'(x) = (m-1)x^{m-2} - mx^{m-1} -$

$$- (m-1)(1-x)^{m-2} + m(1-x)^{m-1} \qquad (1)$$

$$f''(x) = m(m-1)x^{m-3}\left[\frac{m-2}{m} - x\right] + m(m-1)(1-x)^{m-3}\left[x - \frac{2}{m}\right]$$

Vì $x \in \left[\frac{m}{2}; \frac{m-2}{m}\right]$ nên $f''(x) \ge 0 \Rightarrow f'(x)$ đồng biến.

Với $\frac{1}{2} < x \le \frac{m-2}{m} \Rightarrow f'(x) > f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow$ f(x) đồng biến trên $\left[\frac{1}{2}; \frac{m-2}{m}\right]$

Với $\frac{2}{m} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) < f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $\left[\frac{2}{m}; \frac{1}{2}\right]$

Do đó, $f_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{1-m}$

$$f_{\max} = \max\left\{f\left(\frac{2}{m}\right); f\left(\frac{m-2}{m}\right)\right\} = \left(\frac{m-2}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)^{m-1} + \left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right)^{m-1}$$

Câu 5:

Ta thấy $x \le 1$ không phải là nghiệm của phương trình.

Thật vậy $x^{2x+1} - x = x(x^{2n} - 1) = 1$

Nếu $x \le -1 \Rightarrow x^{2n} \ge 1$. Vế trái âm.

Nếu $0 < x < 1$ thì $x^{2n+1} < 0$ còn $x + 1 > 0$.

Nếu $-1 < x \le 0$ thì $x^{2n+1} \le 0 < x + 1$.

Xét hàm $f(x) = x^{2n+1} - x - 1$ có $f'(x) = (2n+1)x^{2n} - 1 > 0$ với $x > 1$ mà $f(1) = -1 < 0$ nên tồn tại duy nhất $1 < x_n$ để $f(x_n) = 0$.

Theo BĐT Côsi: $x_n = \sqrt[2n+1]{x_n + 1} \le \frac{2n + x_n + 1}{2n+1} \Leftrightarrow x_n \le \frac{2n+1}{2n}$

Vì $1 < x_n \le \frac{2n+1}{2n}$ mà $\lim \frac{2n+1}{2n} = 1$ nên: $\lim x_n = 1$.

Câu 6:

Xét đa thức $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ với $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ đều là các số nguyên không âm và nhỏ hơn 7.

Do $f(7) = 2008 \Rightarrow a_n 7^n + a_{n-1} 7^{n-1} + \ldots + a_1 7 + a_0 = 2008$

Ở đây, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ là các chữ số của 2008 được viết trong hệ ghi số cơ số 7.

Thực hiện phép chia 2008 cho 7 được dư $a_0 = 6$, lại lấy thương chia cho 7, liên tiếp như thế, ta được đa thức cần tìm là:

$$f(x) = 5x^3 + 5x^2 + 6x + 6.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÌNH PHƯỚC
TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUANG TRUNG

Câu 1:

Điều kiện: $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Xem a, b, c như là các ẩn, ta có hướng giả quyết như sau:

Nhân phương trình (1) với x ta được: $ax^2 - bxy + \frac{1}{y} = cx$ (4).

Thay $cx = bz + \frac{1}{zx} - a$ từ (2) vào (4) ta có:

$$a(x^2+1) - b(xy+z) = \frac{1}{zx} - \frac{1}{y} \qquad (*)$$

Nhân phương trình (1) với y ta được: $axy - by^2 + \frac{1}{x} = cy$ (5).

Thay $cy = az - \frac{1}{yz} + b$ từ (3) vào (5) ta được:

$$a(xy - z) - b(y^2+1) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{yz} \qquad (**)$$

Kết hợp (*) và (**) ta được: $\begin{cases} a(x^2+1) - b(xy+z) = \dfrac{1}{zx} - \dfrac{1}{y} & \text{(i)} \\ a(xy-z) - b(y^2+1) = -\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{yz} & \text{(ii)} \end{cases}$

Nhân phương trình (i) với $y^2 + 1$ và (ii) với $-(xy + z)$ rồi cộng lại ta được:

$$a(x^2+y^2+z^2+1) = \frac{x^2+y^2+z^2+1}{xz} \Rightarrow a = \frac{1}{xz}$$

Tương tự ta có $b = \frac{1}{yz}, c = \frac{1}{zx} \Rightarrow abc = \frac{1}{(xyz)^2} \Rightarrow xyz = \pm\frac{1}{\sqrt{abc}}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là:

$$(x,y,z) = \left(\frac{b}{\sqrt{abc}}; \frac{a}{\sqrt{abc}}; \frac{c}{\sqrt{abc}}\right) = \left(-\frac{b}{\sqrt{abc}}; -\frac{a}{\sqrt{abc}}; -\frac{c}{\sqrt{abc}}\right).$$

Câu 2:

Ta có: $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^{2008}}{2008}$, $\forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{x_n^{2007}}{2008.x_{n+1}}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{2007}}{x_{i+1}} = 2008.\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) = 2008\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}}\right)$$

Mặt khác: $x_{n+1} - x_n \geq 0 \Rightarrow \{x_n\}$ là dãy số tăng $\forall n \geq 1$.

Nếu $\{x_n\}$ bị chặn thì $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ tồn tại.

Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow a \geq 1$ và $a = \dfrac{a^{2008}}{2008} + a$ (vô lý).

Suy ra $\{x_n\}$ bị chặn trên $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_{n+1}} = 0$

Vậy: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^{2007}}{x_{i+1}} = 2008.$

Câu 3:

Phương trình: $ab = (a + b) = 2b^3$ có một nghiệm (1; 1), vậy bộ (x, x) thỏa mãn điều kiện: $ab(a + b) = 2b^3$.

Thay vào phương trình ta thu được: $P(2x) = 8P(x) \Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{n} a_i.2^i.x^i = 8\sum\limits_{i=0}^{n} a_i.x^i$,

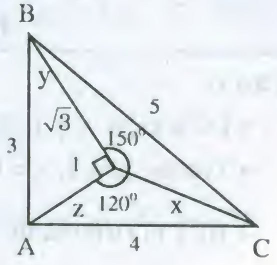
trong đó: $P(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a^i x_i$.

Suy ra: $a_i.(2^i - 8) = 0$, với $i \neq 3 \Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow P(x) = kx^3$, $k \in \mathbb{R}$

Thử lại ta có: $k(a + b)^3 = ka^3 + 7kb^3 \Leftrightarrow (a + b)^3 = a^3 + 7b^3$ (đúng).

Vậy tất cả các đa thức cần tìm: $P(x) = kx^3$, $k \in \mathbb{R}$.

Câu 4:



Dựng tam giác ABC và điểm I nằm trong tam giác như hình vẽ

Ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta IAB} + S_{\Delta IBC} + S_{\Delta IAC}$

$$= \frac{1}{2}IA.IB + \frac{1}{2}IB.IC.\sin 150^0$$

$$+ \frac{1}{2}IA.IC.\sin 120^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}3.4 = \frac{1}{2}.\frac{y}{\sqrt{3}}.z + \frac{1}{2}.\frac{y}{\sqrt{3}}.x.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.x.z.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6 = \frac{1}{4\sqrt{3}}.2yz + \frac{1}{4\sqrt{3}}xy + \frac{1}{4\sqrt{3}}.3zx$$

Hay: $24\sqrt{3} = xy + 2yz + 3zx$. Vậy $P = 24\sqrt{3}$.

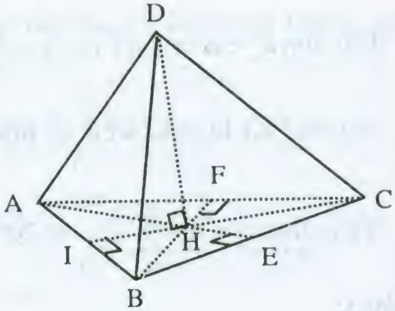
Câu 5:

Ta có $DH \perp (ABC) \Rightarrow DH \perp AB$ (1)

- H là trực tâm ΔABC nên suy ra $CH \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB \perp (CDH) \Rightarrow AB \perp CD$

Mà $DB \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABD) \Rightarrow CD \perp DA$



- Chứng minh tương tự $DB \perp DA$

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

Ta có: $BC^2 = BD^2 + CD^2$

Suy ra $CA^2 = CD^2 + AD^2$

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2 + CD^2) \qquad (3)$$

- Mặt khác:

$$2AB.BC = 2\sqrt{AD^2 + BD^2}.\sqrt{BD^2 + CD^2}$$
$$\le (AD^2 + BD^2) + (BD^2 + CD^2) = AD^2 + 2BD^2 + CD^2$$

- Tương tự: $2AB.CA \le 2AD^2 + BD^2 + CD^2$

$2BC.CA \le AD^2 + BD^2 + 2CD^2$

Suy ra: $2(AB.BC + BC.CA + CA.AB) \le 4(AD^2 + BD^2 + CD^2) \qquad (4)$

- Từ (3) và (4): $(AB + BC + CA)^2 \le 6(AD^2 + BD^2 + CD^2)$
- Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow AB = BC = CA \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow$ DH là trục ΔABC

$\Rightarrow$ D.ABC là hình chóp tam giác đều có 3 góc ở đỉnh vuông.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO VĨNH LONG
TRƯỜNG THPT LƯU VĂN LIỆT

Câu 1:

- Điều kiện: $x \in (-3; +\infty) \setminus \{-1; 0\}$
- Trường hợp 1: $x > 0$

+ BPT (1) trở thành: $\dfrac{-1}{x+1} > \log_3(x + 3) \qquad (2)$

$$+\ x > 0 \Rightarrow \begin{cases} VT = \dfrac{-1}{x+1} < 0 \\ VP = \log_3(x+3) > \log_3 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow (2) \text{ vô nghiệm.}$$

- Trường hợp 2: $x \in (-3; 0) \setminus \{-1\}$

+ BPT (1) trở thành: $\dfrac{-1}{x+1} < \log_3(x + 3) \qquad (3)$

$$+\ -3 < x \le -2 \Rightarrow \begin{cases} VT = \dfrac{-1}{x+1} > \dfrac{1}{2} \\ VP = \log_3(x+3) \le \log_3 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (3) \text{ vô nghiệm.}$$

$$+\ -2 < x < -1 \Rightarrow \begin{cases} VT = \dfrac{-1}{x+1} > 1 \\ VP = \log_3(x+3) < \log_3 2 < 1 \end{cases} \Rightarrow (3) \text{ vô nghiệm.}$$

$$+ -1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{VT} = \dfrac{-1}{x+1} < -1 \\ \text{VP} = \log_3(x+3) > \log_3 2 > \log_3\left(\dfrac{1}{3}\right) = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (3) nghiệm đúng với mọi $x \in (-1; 0)$

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 0)$

Câu 2:

- *Trả lời:* Có 3 điểm trong 33 điểm sao cho chúng đều thuộc phần giao của 3 hình tròn có các tâm cũng chính là 3 điểm đó.

- *Giải thích.*

+ Chia hình vuông ABCD thành 16 hình vuông đơn vị (mỗi hình vuông có cạnh bằng 1 đơn vị độ dài)

+ Với 33 điểm chứa trong 16 hình vuông đơn vị, theo nguyên tắc Dirichlet: có ít nhất một hình vuông đơn vị chứa không ít hơn 3 điểm.

+ Mặt khác: khoảng cách giữa 2 điểm bất kì trong hình vuông đơn vị không thể vượt quá $\sqrt{2}$ (độ dài đường chéo của hình vuông đơn vị bằng $\sqrt{2}$).

+ Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là 3 điểm cùng nằm trong một hình vuông đơn vị nào đó. Vẽ 3 đường tròn có tâm lần lượt là O_1, O_2, O_3 và bán kính bằng $\sqrt{2}$ thì 3 điểm O_1, O_2, O_3 đều thuộc phần giao của 3 hình tròn này.

Câu 3:

- + Đặt: a = AB, b = AC, c = AD, m = BC, n = CD, p = BD.

Ta có: u = a.n, v = b.p, w = c.m

+ Gọi At_1, At_2, At_3 lần lượt là tiếp tuyến của các đường tròn ngoại tiếp ΔACD, ΔABD, ΔABC.

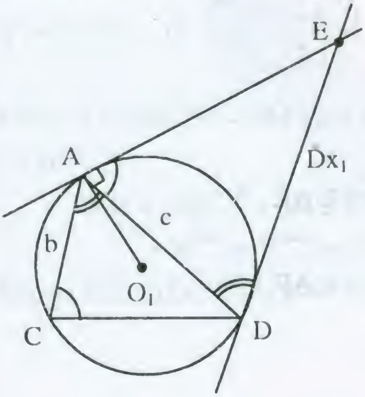
+ Trong (ACD) kẻ Dx_1 // AC cắt At_1 tại E, ta có DE // AC.

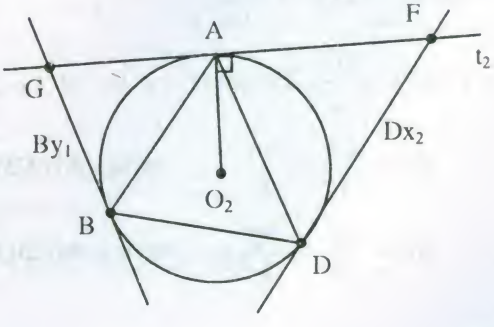
+ Trong (ABD) kẻ Dx_2 // AB cắt At_2 tại F, By_1 // AD cắt At_2 tại G.

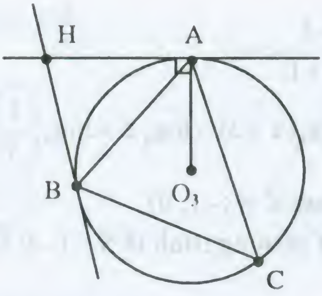
Ta có: DF // AB và BG // AD

+ Trong (ABC) kẻ By_2 // AC cắt At_3 tại H, ta có BH // AC

Ta được: (DEF) // (ABC) và (BGH) // (ACD)







• + Mặt khác: At_1, At_2, At_3 còn là các tiếp tuyến của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD tại A

$\Rightarrow$ AE, AF, AH cùng nằm trong tiếp diện (P) với (S) tại A.

Khi đó:

$$\left.\begin{array}{l}(P)\cap(DEF)=EF\\(P)\cap(ABC)=AH\\(DEF)//(ABC)\end{array}\right\}\Rightarrow EF//AH \text{ và } \left.\begin{array}{l}(P)\cap(BGH)=GH\\(P)\cap(ACD)=AE\\(BGH)//(ACD)\end{array}\right\}\Rightarrow GH//AE$$

Từ đó suy ra $\widehat{AEF}=\widehat{GHA}$ và $\widehat{EAF}=\widehat{HGA}$

$$\Rightarrow \Delta GHA = \Delta GHA \Rightarrow \frac{EF}{HA}=\frac{AF}{GA} \quad (1)$$

• Xét hai tam giác EAD và ACD. Ta có:

$$\widehat{EAD}=\widehat{ACD} \text{ và } \widehat{ADE}=\widehat{DAC}$$

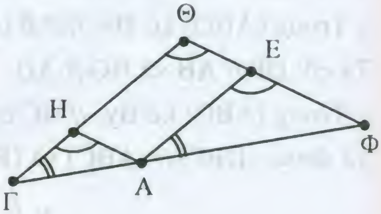
$$\Rightarrow \Delta EAD = \Delta DCA \Rightarrow \frac{EA}{DC}=\frac{AD}{CA} \Rightarrow AE=\frac{c.n}{b}$$

Lập luận tương tự, ta được: $AF=\frac{c.p}{a}$; $AH=\frac{a.m}{b}$; $AG=\frac{a.p}{c}$

và từ (1) $\Rightarrow EF = HA.\frac{AF}{GA}=\frac{m.c^2}{ab}$

Do đó: ΔAEF có 3 cạnh là $AE=\frac{c.n}{b}$;

$AF=\frac{c.p}{a}$; $EF=\frac{mc^2}{ab}$



• Đặt $k=\frac{ab}{c}$. Ta có:

$$AE=\frac{c.n}{b}=\frac{an}{k} \qquad \Rightarrow u = AB.CD = a.n = k.AE$$

$$AF=\frac{c.p}{a}=\frac{bp}{k} \qquad \Rightarrow v = AC.BD = b.p = k.AF$$

$$EF = \frac{mc^2}{ab} = \frac{mc}{k} \qquad \Rightarrow w = AD.BC = m.c = kEF$$

Vậy: u = AB.CD, v = AC.BD, w = AD.BC là 3 cạnh của một tam giác, đồng dạng với ΔAEF theo tỉ số $k = \frac{ab}{c} = \frac{AB.AC}{AD}$.

Câu 4:

- Chứng minh bổ đề:

Nếu a > 0, b > 0 và n ∈ ℕ* thì ta có: $a^n + b^n \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$

+ Với n = 1: (1) hiển nhiên đúng

+ Với n ∈ ℕ*, n > 1: xét hàm số $f(x) = x^n + (c - x)^n$, c > 0

Ta có: $f'(x) = n\left[x^{n-1} - (c-x)^{n-1}\right] = 0 \Leftrightarrow x = \frac{c}{2}$

$$f''(x) = n(n-1)\left[x^{n-2} + (c-x)^{n-2}\right] \Rightarrow f''\left(\frac{c}{2}\right) = 2x(n-1)\left(\frac{c}{2}\right)^{n-2} > 0$$

Do đó: f đạt cực tiểu tại $x = \frac{c}{2}$ và $f_{CT} = f\left(\frac{c}{2}\right) = 2\left(\frac{c}{2}\right)^n$

$$\Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{c}{2}\right) \Rightarrow x^n + (c-x)^n \geq 2\left(\frac{c}{2}\right)^n$$

Từ đó với c = a + b và x = a thì ta có: $a^n + b^n \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$

- Áp dụng Bổ đề: Với a > 0, b > 0, c > 0, d > 0 và n ∈ ℕ*.

Ta có: $a^n + b^n \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ và $c^n + d^n \geq 2\left(\frac{c+d}{2}\right)^n$

Suy ra:

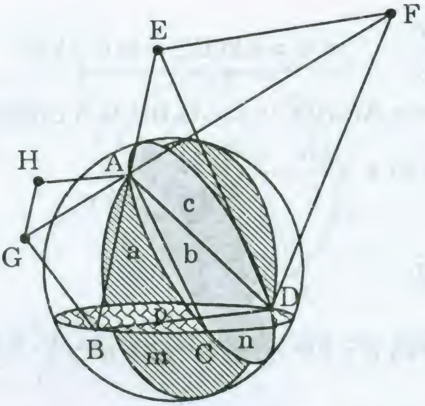
$$a^n + b^n + c^n + d^n \geq 2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^n + \left(\frac{c+d}{2}\right)^n\right] \geq 4\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^n \quad (1)$$

- Đặt: $a = AM^2$; $b = BM^2$; $c = CM^2$; $d = DM^2$ và n = 1004.

Ta có

$$f(M) = AM^{2008} + BM^{2008} + CM^{2008} + DM^{2008}$$
$$= a^{1004} + b^{1004} + c^{1004} + d^{1004}$$

Theo (1) ta được: $f(M) \geq 4^{-1003}(AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2)^{1004}$ (2)



- Mặt khác

+ Tứ diện ABCD có AB = CD, AC = BD, AD = BC

⇒ Tứ diện ABCD là tứ diện gần đều

⇒ Trọng tâm G của tứ diện cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

⇒ $GA = GB = GC = GD = m\ (m > 0)$

+ G là trọng tâm của tứ diện ABCD $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

+ $AM^2 + BM^2 + CM^2 + DM^2$

$$= \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GM}\right)^2$$

$$= 4GM^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = 4(GM^2 + m^2) \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $f(M) \geq 4^{-1003}\left[4(GM^2 + m^2)\right]^{1004} \geq 4m^{2008}$

và $f(M) = 4m^{2008} \Leftrightarrow M \equiv G$

Vậy: f(M) nhỏ nhất khi M trùng với trọng tâm G của tứ diện ABCD

Câu 5:

- Chứng minh $\forall\ x \in \mathbb{N}^*$, $x_n \neq 4$ bằng phương pháp quy nạp

Ta có $x_1 = 5 \neq 4$. Giả sử $x_n \neq 4$. Ta chứng minh $x_{n+1} \neq 4$. Thật vậy,

$$x_{n+1} = 4 \Leftrightarrow \frac{5x_n + 4}{x_n + 2} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \neq -2 \\ 5x_n + 4 = 4\left(x_n + 2\right) \end{cases} \Leftrightarrow x_n = 4$$

Điều này trái với giả thiết quy nạp.

- Khi đó: $x_{n+1} - 4 = \dfrac{5x_n + 4}{x_n + 2} - 4 = \dfrac{x_n - 4}{x_n + 2} \Rightarrow \dfrac{1}{x_{n+1} - 4} = \dfrac{x_n + 2}{x_n - 4} = 1 + \dfrac{6}{x_n - 4}$

Đặt: $y_n = \dfrac{1}{x_n - 4}$, ta có: $\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{x_1 - 4} = 1 \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{x_{n+1} - 4} = 1 + \dfrac{6}{x_n - 4} = 6y_n + 1 \quad (1) \end{cases}$

- Chứng minh bổ đề:

Nếu dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $u_{n+1} = a.x_n + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ (*)

thì số hạng tổng quát

$$u_n = a^{n-1}x_1 + (a^{n-2} + a^{n-3} + ... + a + 1)b, n \in \mathbb{N} \text{ và } n \geq 2 \quad (**)$$

+ Theo phương pháp quy nạp, với $n = 2$ ta có $u_2 = au_1 + b$

+ Giả sử (**) đúng với $n = k$ $(k \in \mathbb{N}^*, k \geq 2)$.

Ta có: $u_k = a^{k-1}x_1 + (a^{k-2} + a^{k-3} + ... + a + 1)b$

Ta sẽ chứng minh: $u_{k+1} = a^kx_1 + (a^{k-1} + a^{k-2} + ... + a + 1)b$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= au_k + b = a[a^{k-1}x_1 + (a^{k-2} + a^{k-3} + ... + a + 1)b] + b \\ &= a^kx_1 + (a^{k-1} + a^{k-2} + ... + a + 1)b \end{aligned}$$

- Từ (1) áp dụng bổ đề cho dãy (y_n) ta được:

$$y_n = 6^{n-1}y_1 + (6^{n-2} + 6^{n-3} + ... + 6 + 1) = \frac{6^n - 1}{5}$$

Khi đó: $y_n = \dfrac{1}{x_n - 4} \Rightarrow x_n = 4 + \dfrac{5}{6^n - 1}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

Vậy $x_{2008} = 4 + \dfrac{5}{6^{2008} - 1}$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(x_n\right) = 4$

Câu 6:

- Đặt $g(x) = \dfrac{f(x)}{2008^x}$. Ta có:

$g(x) \geq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (3)$

$g(-x) \geq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (4)$

$g(x + y) \geq g(x).g(y) \qquad (5)$

- Với $x = y = 0$, ta lại có:

$$\left.\begin{aligned} &g(0) \geq 1 \quad (6) \\ &\text{và } g(0) \geq \left[g(0)\right]^2 \Rightarrow g(0).[1 - g(0)] \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(0) \leq 1 \qquad (7)$$

Từ (6) và (7) $\Rightarrow g(0) = 1$.

- Mặt khác:

$$\left.\begin{aligned} 1 = g(0) &= g(x - x) \geq g(x).g(-x) \\ g(-x) &\geq 1 \quad ,\forall x \in \mathbb{R} \text{ (do (4))} \end{aligned}\right\} \Rightarrow g(x) \leq 1 \quad ,\forall x \in \mathbb{R} \quad (8)$$

- Từ (3) và (8) $\Rightarrow g(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vậy: $f(x) = 2008^x$

- Thử lại, ta có: $f(x) = 2008^x \geq 2008^x$

$$f(x + y) = 2008^{x+y} \geq 2008^{x+y} = \underbrace{2008^x}_{f(x)}.\underbrace{2008^y}_{f(y)} = f(x).f(y).$$

NĂM 2009

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1: Giải và biện luận (theo tham số *a*) hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x\left(y^2+a^2\right)=y\left(y^2+9a^2\right) \\ 2y\left(z^2+a^2\right)=z\left(z^2+9a^2\right) \\ 2z\left(x^2+a^2\right)=x\left(x^2+9a^2\right). \end{cases}$$

Câu 2: Tìm tất cả các số nguyên dương *n* và các bộ *n* số tự nhiên $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tương ứng sao cho $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = 1 + \frac{8}{8n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$.

Câu 3: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M là một điểm tùy ý trên đường thẳng AB', khác A và B'. Mặt phẳng (MCD') cắt A'D tại N và cắt BC' tại P. Chứng minh rằng các điểm M, N, P thẳng hàng.

Câu 4: Cho *x* và *y* là hai số thực dương, không đồng thời bé hơn 1.

Chứng minh rằng $x^x + y^y \geq x^y + y^x$.

Câu 5: Hàm số *f* xác định trên đoạn $[0;\ 1]$ được gọi là "có tính chất nhận giá trị trung gian" nếu: Với mọi cặp số $\alpha, \beta \in [0;\ 1]$ và với mọi số thực *c* thuộc khoảng giữa $f(\alpha)$ và $f(\beta)$, ta luôn tìm được số thực γ thuộc khoảng giữa α và β sao cho $f(\gamma) = c$

Cho: $0 \leq f(0) \leq 1$ và $f(x) = (-1)^{[1/x]}\left[\frac{1}{x}\right]\left(x\left[\frac{1+x}{x}\right]-1\right)+\frac{1-(-1)^{[1/x]}}{2}$

khi $0 < x \leq 1$. Chứng minh rằng *f* có tính chất nhận giá trị trung gian.

Câu 6: Xác định tất cả các đa thức (với hệ số thực) P, Q và R thoả mãn phương trình $\sqrt{P(x)} - \sqrt{Q(x)} = R(x)$ với mọi số thực *x*.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÀ RỊA VŨNG TÀU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1: Giải phương trình: $\sin x.\sin 4x = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 4\sqrt{3}.\cos^2 x.\sin x.\cos 2x$

Câu 2: Xếp 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ vào một bàn tròn 10 ghế. Tính xác suất để không có hai học sinh nữ ngồi cạnh nhau.

Câu 3: Cho ΔABC thỏa điều kiện: $3\left[\dfrac{3b^2+3c^2-3a^2+2bc}{(b+c)^2-a^2}\right]^4+4\tan^6\dfrac{A}{2}=7$, với $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Tính góc A.

Câu 4: Cho f(x) là đa thức bậc 2008 và $f(k)=\dfrac{k^3}{k^2+3k+2}$ với $k \in N^*, k \le 2009$.

Tính f(2010).

Câu 5: Cho dãy (a_n) xác định bởi: $\begin{cases} a_1=\dfrac{1}{2} \\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\sqrt{a_n^2+\dfrac{1}{4^n}}\right), \forall n \ge 1, n \in N \end{cases}$

Tính $\lim a_n$

Câu 6: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a.

Trên cạnh BC, CD lần lượt lấy M, N sao cho $\dfrac{MC}{MB}=\dfrac{1}{2}, \dfrac{CN}{CD}=\dfrac{2}{3}$.

Trên trung tuyến AH của ΔABD lấy P sao cho $\dfrac{AP}{PH}=\dfrac{4}{5}$.

Tính diện tích thiết diện tạo thành khi cắt tứ diện ABCD bởi mặt phẳng (MNP).

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH GIA LAI
TRƯỜNG THPT PLEIKU

Câu 1: Giải phương trình: $2\tan x + \cot x = \sqrt{3} + \dfrac{2}{\sin 2x}$

Câu 2: Tìm chữ số cuối cùng của số 2^{3^4}.

Câu 3: Hãy tìm bên trong một tứ giác lồi một điểm sao cho các đoạn thẳng nối điểm đó với các trung điểm của các cạnh chia diện tích tứ giác này ra bốn phần có diện tích bằng nhau.

Câu 4: Cho a, b, c là ba số dương.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \ge \dfrac{3}{2}$

Câu 5: Cho dãy số (U_n) xác định bởi: $\begin{cases} 0 < U_n < 1 \\ U_{n+1}(1-U_n) > \dfrac{1}{4}, \forall n \ge 1 \end{cases}$

Tính: $\lim U_n$

Câu 6: Tìm tất cả các hàm f: R → R thỏa mãn

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y), \forall x, y \in R$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KON TUM
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KON TUM

Câu 1: Tìm tất cả các cặp số thực dương (x;y) thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + x = 1 \quad (1) \\ y^2 + xy + x + y = 1 \quad (2) \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

Câu 2: Cho X là một tập hợp có n phần tử, và $A_1, A_2, ..., A_m$ là các tập con của X thoả mãn:

(i) $|A_i| = 3$, với $i = 1,2,...,m$.

(ii) $|A_i \cap A_j| \le 1$, với mọi $i \ne j$.

Chứng minh rằng tồn tại một tập con của tập hợp X có ít nhất $\left[\sqrt{2n}\right]$ phần tử sao cho không chứa A_i, với $i = 1,2,...,m$.

Câu 3: Cho hình chóp S.ABC. Gọi A', B' và C' là ba điểm tuỳ ý lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC sao cho $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{1}{n}, \dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{1}{2n+1}, \dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{2}{3n+1}$, với $n \in \mathbb{N}, n > 0$.

Chứng minh rằng mặt phẳng (A'B'C') luôn đi qua một đường thẳng cố định khi *n* thay đổi.

Câu 4: Tìm số thực T lớn nhất sao cho với mỗi bộ gồm các số thực dương a, b, c, d, e thoả mãn $a + b = c + d + e$, thì

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2} \ge T\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e}\right)^2.$$

Câu 5: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_n = \alpha . u_{n-1}^2, n \ge 1, \alpha \text{ là số dương cho trước.} \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại một cấp số nhân (v_n) và hằng số β thoả mãn $u_n = \alpha^{V_n + \beta}$, với mọi $n \ge 1$.

Câu 6: Tìm tất cả các cặp hàm số $f(x)$, $g(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và thoả mãn các điều kiện sau: (1) $|g(0)| \le 1$.

(2) $6f(x).g(x) + 25 \ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(3) $3f(x) - 2g(x) = 10g(y) - 30y, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ YÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH

Câu 1: Chứng minh rằng nếu nghiệm phương trình $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ (1) đều là số thực thì $ab \le 0$.

Câu 2: Chứng minh rằng tồn tại vô số số k nguyên dương chẵn sao cho p^2+k là hợp số với mọi số nguyên tố p.

Câu 3: Gọi S và R lần lượt là diện tích toàn phần và bán kính mặt cầu ngoại tiếp của tứ diện ABCD.

Chứng minh rằng ta luôn có: $S\le \dfrac{8}{\sqrt{3}}R^2$.

Câu 4: Cho các số thực dương a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn abc = 4.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S=\frac{a^3}{\sqrt{\left(1+a^4\sqrt{a}\right)\left(1+b^4\sqrt{b}\right)}}+\frac{b^3}{\sqrt{\left(1+b^4\sqrt{b}\right)\left(1+c^4\sqrt{c}\right)}}+\frac{c^3}{\sqrt{\left(1+c^4\sqrt{c}\right)\left(1+a^4\sqrt{a}\right)}}.$$

Câu 5: Cho dãy số $\{x_n\}:\begin{cases}x_1=2009\\ x_{n+1}=x_n^2-5x_n+9\ \left(n\in N^*\right)\end{cases}$

Xét dãy $\{y_n\}$ lập bởi $y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k-2}$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐĂKLĂK
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN DU

Câu 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x^2+2x+22}-\sqrt{y}=y^2+2y+1\\ \sqrt{y^2+2y+22}-\sqrt{x}=x^2+2x+1\end{cases}$

Câu 2: Cho x, y, z là 3 số thực dương thoả mãn xyz = 1.

Chứng minh: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 3: Xét dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi: $x_{n+2}=\dfrac{(n-1)x_{n+1}+x_n}{n}$

Chứng minh với mọi giá trị ban đầu $x_1;x_2$ thì dãy số $\{x_n\}$ hội tụ. Hãy tìm giới hạn đó.

Câu 4: Tìm tất cả các hàm f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:

$$f(xy-uv)=f(x).f(y)-f(u)f(v);\ \forall\ x, y, u, v\in\mathbb{R}$$

Câu 5: Cho đa thức $f(x)=x^3+ax^2+bx+b$.

Hãy tìm tất cả các cặp số nguyên (a;b) để cho f(x) là tích của 3 đa thức với hệ số nguyên.

Câu 6: Cho tứ diện $\left(A_i\right)_{i=1}^4$ có chứa tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Gọi m_i là khoảng cách từ đỉnh của tứ diện đến tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đối diện $(i=\overline{1;4})$; gọi h_i là đường cao tứ diện kẻ từ đỉnh A_i $(i=\overline{1;4})$ và R;r là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp, nội tiếp tứ diện.

Chứng minh rằng : $\frac{m_1}{h_1}+\frac{m_2}{h_2}+\frac{m_3}{h_3}+\frac{m_4}{h_4}\le\frac{R+r}{r}$ (6)

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÌNH PHƯỚC
TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUANG TRUNG

Câu 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xyz=1 & (1)\\ x+y+z=x^2+y^2+z^2 & (2)\end{cases}$

Câu 2: Cho tập A với $|A|>3$ (với $|A|$ là số phần tử của A) chứa các số nguyên dương có tính chất: Tích của ba phần tử khác nhau của A là một số chính phương. Chứng minh rằng mọi phần tử của A đều là số chính phương.

Câu 3: Cho tam giác ABC, gọi tâm đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp tam giác ABC là O và I. Lấy A_1 là một điểm bất kỳ trên đường tròn (O), kẻ hai dây cung A_1B_1 và A_1C_1 của đường tròn (O) sao cho hai dây cung này cùng tiếp xúc với đường tròn (I). Chứng minh rằng B_1C_1 cũng tiếp xúc với đường tròn (I).

Câu 4: Cho đa thức: $P(x)=x^{2008}-2007x^{2007}+(2008+a)x^{2006}-2009x+a$, với a là số nguyên.

Chứng minh rằng đa thức P(x) không thể có nghiệm bội là số nguyên.

Câu 5: Chứng minh rằng tồn tại dãy số thực (a_n), với $a_n\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\cos a_n=a_n^n$. Tìm giới hạn của dãy đó.

Câu 6: Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f(xf(y))+y+f(x)=f(f(x+y))+yf(x)$ (1), với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^3+3x^2-18=y^3+y\\ 2y^3+3y^2-18=z^3+z\\ 2z^3+3z^2-18=x^3+x\end{cases}$

Câu 2: Cho dãy số $\{x_n\}$:

$$x_1=\sqrt{a_1},\ x_n=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\ldots+\sqrt{a_n}}},\ a_i>1\ (i=1,2,\ldots,n).$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(\ln a_n)<\ln 2$.

Câu 3: Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(xy)=f\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)+(x-y)^2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.

Gọi E là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) thay đổi, chứa AE, cắt SB, SD lần lượt tại M, N.

Gọi V, V_0 lần lượt là thể tích của các hình chóp S.ABCD và S.AMEN.

Chứng minh rằng : $V_0 \le \frac{3}{8}V$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TIỀN GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN TIỀN GIANG

Câu 1: Giải phương trình: $x^4 + 4ax^3 + 6b^2x^2 + 4c^3x + 1 = 0$.

Trong đó a, b, c là các số thực dương, $a \le 1$; biết rằng phương trình này có 4 nghiệm thực.

Câu 2: Hỏi từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4 , ta có thể lập được tất cả bao nhiêu số có 15 chữ số mà trong số đó mỗi chữ số đều có mặt đúng 3 lần và không có chữ số nào chiếm 3 vị trí liên tiếp?

Câu 3: Cho hình chóp P.ABCD sao cho ABCD là hình vuông có cạnh bằng 2 và đường cao hạ từ P đi qua tâm của hình vuông ABCD. Gọi K,O lần lượt là tâm hai hình cầu tương ứng tiếp xúc với các cạnh và các mặt của hình chóp P.ABCD. Hãy tính thể tích của hình chóp P.ABCD nếu biết K và O cách đều đáy hình chóp.

Câu 4: Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn các điều kiện: $a^2 + b^2 = 4$ và $c + d = 4$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = ac + bd + cd$.

Câu 5: Các dãy số (u_n) và (v_n) $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_0 = 2008; u_1 = 2009 \\ v_0 = v_1 = 1 \\ u_{n+2} = \sqrt[2009]{\dfrac{u_n}{v_{n+1}^{2008}}}; v_{n+2} = \sqrt[2009]{\dfrac{v_n}{u_{n+1}^{2008}}}, \forall n = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Chứng minh rằng tồn tại các giới hạn sau và tìm các giới hạn đó :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n};\ \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1};\ \lim_{n\to+\infty} v_{2n};\ \lim_{n\to+\infty} v_{2n+1}$$

Câu 6: Cho số thực a thuộc (0 ; 1).

Tìm tất cả các hàm số: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại x = 0 và thỏa mãn điều kiện sau: Với mọi $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - 2f(ax) + f(a^2x) = x^2$ (1)

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH ĐỒNG THÁP
TRƯỜNG THPT THỊ XÃ CAO LÃNH

Câu 1: Giải phương trình: $64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0$.

Câu 2: Tìm tất cả các số tự nhiên x và y thỏa mãn phương trình:

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 = 3361 - \sqrt{11296320}.$$

Câu 3: Cho tứ diện ABCD vuông ở D. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa đường cao DH với các cạnh DA, DB, DC. Chứng minh rằng:

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos^2\gamma} + \frac{\cos\beta + \cos\gamma}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos\gamma + \cos\alpha}{\cos^2\beta} \geq 6\sqrt{3}.$$

Câu 4: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn điều kiện $abc + a + c = b$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = \frac{2}{1+a^2} - \frac{2}{1+b^2} + \frac{3}{1+c^2}$.

Câu 5: Cho dãy $\{u_n\}$ xác định như sau: $u_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$ (n = 1,2,3,...)

Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Câu 6: Hàm số y = f(x) xác định và có đạo hàm trên toàn trục số, thỏa mãn điều kiện: $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x), \forall x \in \mathbb{R}$

Hãy viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số y = f(x) tại điểm có hoành độ x = 1.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH BẾN TRE
TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẾN TRE

Câu 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4y^2 + x^2y^2 + 1} + \dfrac{y^2z^2}{y^4z^2 + y^2z^2 + 1} + \dfrac{z^2x^2}{z^4x^2 + z^2x^2 + 1} = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

Câu 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 + 3x^4 + 10y^3 - 16 = 0$.

Câu 3: Cho tam giác ABC cân với AC = BC, tâm đường tròn nội tiếp là I. Gọi P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB thuộc miền trong tam giác ABC. Các đường thẳng P song song với AB cắt CA và CB lần lượt tại D và E. Đường thẳng qua P song song với AB cắt CA và CB lần lượt tại F và G.

Chứng minh rằng các đường thẳng DF và EG cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Câu 4: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi là 2010.

Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{ab}{1005-c} + \frac{bc}{1005-a} + \frac{ca}{1005-b} \geq 4020$$

Câu 5: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $u_1 = \frac{1}{2009}$; ii) $u_{n+1} = 2009u_n{}^2 + u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Xét dãy số (v_n) định bởi : $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k+1}}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Câu 6: Tìm hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} f(4x)+f(9x)=2f(6x), \forall x\in\mathbb{R} \\ f(0)=2009 \end{cases}$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH HẬU GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN VỊ THANH

Câu 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1 \\ x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (*)

Câu 2: Biết rằng số nguyên dương n có tính chất: n^2+n+1 phân tích được thành tích của 4 số nguyên tố. Chứng minh rằng: $n\geq 67$.

Câu 3: Cho hình nón có góc ở đỉnh của thiết diện qua trục là $\frac{\pi}{3}$, một mặt cầu S_1 nội tiếp trong hình nón.

1. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$, trong đó V_1, V lần lượt là thể tích hình cầu S_1 và hình nón.

2. Gọi S_2 là hình cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_1; S_3 là hình cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_2; ... ; S_{2009} là hình cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của nón và với S_{2008}.

Gọi $V_2, V_3, ..., V_{2009}$ lần lượt là thể tích của các hình cầu $S_2, S_3, ..., S_{2009}$.

Chứng minh rằng: $V_1+V_2+...+V_{2009}<\frac{1}{2}V$.

Câu 4: Cho x, y, z là các số thực dương và có tích bằng một.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{(1+x)^3}{yz}+\dfrac{(1+y)^3}{zx}+\dfrac{(1+z)^3}{xy}$.

Câu 5: Tìm tất cả các hàm số f(x) xác định trên R và thỏa mãn các điều kiện sau đây

a. $f(0)=1969$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2008$.

b. $2f(x+y)+9f(x-y)=f(x).\cos y$, với mọi $x, y\in\mathbb{R}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH AN GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU

Câu 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2xy + y\sqrt{x^2 - y^2}}{14} = \sqrt{\dfrac{x+y}{2}} + \sqrt{\dfrac{x-y}{2}} \\ \sqrt{\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3} + \sqrt{\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^3} = 9 \end{cases}$

Câu 2: Cho các số tự nhiên n, i, k.

a) Chứng minh rằng nếu n chẵn thì 2^n chia hết $C_{2n}^0 + 3C_{2n}^2 + ... + 3^i C_{2n}^{2i} + ... + 3^n C_{2n}^{2n}$.

b) Với $0 \le k \le n$, chứng minh rằng $C_{2n+k}^n . C_{2n-k}^n \le \left(C_{2n}^n\right)^2$.

Câu 3: Cho tứ diện ABCD; M,N,P là ba điểm lần lượt thuộc ba đường thẳng CD, DB, BC sao cho $\overrightarrow{CM} = \alpha\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DN} = \alpha\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BP} = \alpha\overrightarrow{BC}$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$).

Gọi $I = BM \cap CN$, $J = CN \cap DP$, $K = DP \cap BM$.

Hãy chứng minh hai tứ diện AMNP và AIJK có cùng trọng tâm.

Câu 4: Cho n số $a_1, a_2, \ldots a_n$ đôi một khác nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = |x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_n|$$

Câu 5: Cho dãy số(u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}.u_n}{3u_{n+1} + 2u_n + u_{n+1}.u_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

a) Xác định u_n.

b) Tìm $\lim(u_n.3^n)$.

Câu 6: Cho hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn: $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{f(x)}{x^2}, \forall x \ne 0 \end{cases}$.

Hãy tính $f\left(\sqrt[3]{2009}\right)$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH VĨNH LONG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM

Câu 1: Giải phương trình: $2009^{\frac{4+x^2}{x^2}} - 2009^{\frac{34x+4}{x^3+x^2}} = \dfrac{120 - 4x^2 - 4x}{x^2 + x}$.

Câu 2: Tìm tất cả các số nguyên *n* sao cho: $\dfrac{7n-12}{2^n} + \dfrac{2n-14}{3^n} + \dfrac{24n}{6^n} = 1$.

Câu 3: Đặt khối lập phương trong hệ tọa độ Oxyz sao cho tọa độ bốn đỉnh nào đó của khối lập phương là các số nguyên. Chứng minh rằng tất cả các đỉnh của khối lập phương đã cho đều có tọa độ là những số nguyên.

Câu 4: Cho $a,b,c \in (0;2)$ thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca+abc=4$.

Chứng minh rằng bất đẳng thức:

$$\sqrt{4-a^2}+\sqrt{4-b^2}+\sqrt{4-c^2} \le 3\sqrt{3}.$$

Câu 5: Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2+\sqrt{3+x_n^2}} \end{cases}$ (1)

Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy (x_n).

Câu 6: Tìm tất cả các hàm số f: $\mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}_*^+$ ($\mathbb{R}_*^+$: tập hợp các số thực dương) thỏa mãn điều kiện: $f\left(\dfrac{f(x)}{y}\right) = yf(y)f\big(f(x)\big)\ \forall x,y \in \mathbb{R}_*^+$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG TH THỰC HÀNH ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Câu 1: Giải phương trình: $x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{1+\frac{1}{x^2}} - x^6 \ln\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)^{1+\frac{1}{x^4}} = 1-x^2$ (1)

Câu 2: Cho tập S gồm 2009 phần tử $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2009}\}$. Chọn 2^{2008} tập con của S sao cho 3 tập bất kì trong chúng có đúng 1 phần tử chung.

Chứng minh rằng 2^{2008} tập này có đúng 1 phần tử chung.

Câu 3: Trong các tứ diện có bán kính mặt cầu ngoại tiếp bằng R cho trước, tứ diện nào có tổng độ dài các cạnh lớn nhất?

Câu 4: Cho $n \in \mathbb{N}, n \ge 1$, tìm giá trị lớn nhất của

$$f(x) = \frac{x+x^2+\cdots+x^{2n-1}}{(1+x^n)^2} \text{ với } x>0.$$

Câu 5: Chứng minh rằng nếu 1 cấp số nhân có n số hạng, $n \ge 3$, là các số tự nhiên phân biệt và công bội cũng là 1 số tự nhiên thì tổng của tất cả n số hạng đó không thể bằng 5^{2009}.

Câu 6: Tìm tất cả hàm $f:(1,\infty) \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x)-f(y) = (y-x)f(xy),\ \forall x,y>1.$$

ĐÁP ÁN

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1: Với $a = 0$, hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 = y^3 \\ 2yz^2 = z^3 \\ 2zx^2 = x^3 \end{cases} \Rightarrow 8x^3y^3x^3 = x^3y^3x^3 \Rightarrow xyz = 0$

Từ đó, hệ $\Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Với mỗi $a \neq 0$, đặt $f(x) = \dfrac{x(x^2 + 9a^2)}{2(x^2 + a^2)}$ $(x \in \mathbb{R})$

suy ra $f'(x) = \dfrac{(x^2 - 3a^2)^2}{2(x^2 + a^2)^2} \geq 0$ $(x \in \mathbb{R})$, hơn nữa, $f'(x) = 0$ chỉ tại hai điểm $x = \pm a\sqrt{3}$ nên *f* là hàm tăng trên $\mathbb{R}$.

Vì hệ không thay đổi khi ta hoán vị vòng tròn bộ (*x*; *y*; *z*) nên, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \geq y$ và $x \geq z$.

Khi đó, do *f* tăng (ngặt), (1) kéo theo:

$$\begin{cases} f(y) = x \geq y = f(z) \\ f(y) = x \geq z = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq z \\ y \geq x; \end{cases}$$

bằng cách như thế, ta cũng có $z \geq x$ và $z \geq y$. Vậy $(1) \Rightarrow x = y = z$; từ đó,

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x(x^2 - 7a^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = z = 0 \\ x = y = z = a\sqrt{7} \\ x = y = z = -a\sqrt{7}. \end{array} \right.$$

Câu 2: Đẳng thức cần thỏa mãn tương đương với: $8\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right] + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$$= 8n + 1 \Leftrightarrow 8\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 8n + 1. \qquad (1)$$

Do tính đối xứng, có thể xem $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. (*)

Khi đó, chỉ có 2 khả năng:

1. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$.

   Lúc này: $(1) \Leftrightarrow nx^2 = 8n + 1 \Leftrightarrow x^2 = 8 + \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow n = 1, x_1 = 3$.

2. $\exists k \in \mathbb{Z}$, $k \leq 1 < n$, $x_{k+1} - x_k \geq 1$.

   Khi đó, $n \geq 2$; đặt $A = \mathbb{Z} \cap [1; k]$, $B = \mathbb{Z} \cap [1 + k; n]$, do (*) ta có:

$$\sum_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)^2 \ge \sum_{i\in A,\ j\in B}(x_i-x_j)^2 \ge \sum_{i\in A,\ j\in B} 1 = |A|\cdot|B| = 1(n-1) \ge n-1.$$

Vậy, $(1) \Rightarrow 8n+1 \ge 8(n-1)+\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} \le 9$; và từ đó, $x_n \in \{1;\ 2\}$.

(Trường hợp $x_n = 3 \Rightarrow x_{n-1} = \cdots = x_1 = 0$ không thỏa mãn đẳng thức vì $n > 1$)

2i. Giả sử $x_n = 2$. Chỉ có 4 trường hợp nhỏ sau là có thể:

(2i1) $x_{n-1} = 2,\ x_{n-2} = 1\ (n \ge 3)$. Mọi số còn lại (nếu có) phải bằng 0 nên đẳng thức trở thành

$9 = 1 + \frac{8}{8n+1}5^2 \Leftrightarrow n = 3$ và $(x_1;\ x_2;\ x_3) = (1;\ 2;2)$ (cùng các hoán vị).

(2i2) $x_{n-1} = 2,\ x_{n-2} = 0\ (n \ge 3)$. Khi đó, $8 = 1 + \frac{8}{8n+1}4^2$, không xảy ra!

(2i3) $x_{n-1} = 1$. Lúc này, gọi *a* là số số bằng 1 $(n > a \in \mathbb{N}^*)$, đẳng thức trở thành

$$4 + a = 1 + \frac{8}{8n+1}(2+a)^2 \Rightarrow \frac{7}{8} + \frac{1}{a+3} = n - a \in \mathbb{N}^*;$$

nhưng $\frac{7}{8} < \frac{7}{8} + \frac{1}{a+3} \le \frac{7}{8} + \frac{1}{4} = \frac{9}{8}$ nên $\frac{7}{8} + \frac{1}{a+3} = 1 \Rightarrow a = 5,\ n = 6$. Dễ thấy các bộ sáu cần tìm là $(1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 2)$ (cùng các hoán vị).

(2i4) $x_{n-1} = 0$. Khi đó, $4 = 1 + \frac{8}{8n+1}2^2$, không xảy ra!

2ii. Giả sử $x_n = 1$. Lúc này, gọi *a* là số số bằng 1 $(n > a \in \mathbb{N}^*)$, ta có:

$$a = 1 + \frac{8}{8n+1}a^2 \Rightarrow \frac{1}{a-1} - \frac{1}{8} = n - (a+1) \in \mathbb{N}\ \ (a > 1);$$

nhưng $-\frac{1}{8} < \frac{1}{a-1} - \frac{1}{8} \le 1 - \frac{1}{8} < 1$ nên $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow a = 9,\ n = 10$.

Dễ thấy các bộ mười cần tìm là $(0;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1)$ (cùng các hoán vị).

Câu 3: Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'},\ \vec{b} = \overrightarrow{AB},\ \vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

Có: $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB'} = k(\vec{a} + \vec{b}),\ \ \overrightarrow{DN} = m\overrightarrow{DA'} = m(\vec{a} - \vec{c}),\ \overrightarrow{BP} = n\overrightarrow{BC'} = n(\vec{a} + \vec{c})$ với *k*, *m*, *n* là các số thực (*k* khác 0 và 1). Từ đó,

$$\begin{cases} \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = (\vec{b} + \vec{c}) - k(\vec{a} + \vec{b}) = -k\vec{a} + (1-k)\vec{b} + \vec{c} \\ \overrightarrow{MD'} = \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AM} = (\vec{a} + \vec{c}) - k(\vec{a} + \vec{b}) = (1-k)\vec{a} - k\vec{b} + \vec{c} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{AM} = \vec{c} + m(\vec{a} - \vec{c}) - k(\vec{a} + \vec{b}) = (m-k)\vec{a} - k\vec{b} + (1-m)\vec{c} \\ \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{AM} = \vec{b} + n(\vec{a} + \vec{c}) - k(\vec{a} + \vec{b}) = (n-k)\vec{a} + (1-k)\vec{b} + n\vec{c}. \end{cases} \quad (*)$$

Tính *m* theo *k*: $\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{MD'}$ không cùng phương; hơn nữa, $\overrightarrow{MC},\ \overrightarrow{MD'},\ \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng nên tồn tại *x*, *y* thỏa $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{MC} + y\overrightarrow{MD'}$

$$\Leftrightarrow (m-k)\vec{a} - k\vec{b} + (1-m)\vec{c} = x[-k\vec{a} + (1-k)\vec{b} + \vec{c}] + y[(1-k)\vec{a} - k\vec{b} + \vec{c}]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - k = -kx + (1-k)y \\ -k = (1-k)x - ky \qquad (1) \\ 1 - m = x + y. \end{cases}$$

Từ đó: $m = \dfrac{1}{2(1-k)}$ (trong (1), cộng hai PT đầu và dùng PT cuối).

Tính *n* theo *k*: $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD'}$, $\overrightarrow{MP}$ đồng phẳng nên có *z*, *t* thỏa mãn:

$$\overrightarrow{MP} = z\overrightarrow{MC} + t\overrightarrow{MD'}$$

$$\Leftrightarrow (n-k)\vec{a} + (1-k)\vec{b} + n\vec{c} = z[-k\vec{a} + (1-k)\vec{b} + \vec{c}] + t[(1-k)\vec{a} - k\vec{b} + \vec{c}]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n - k = -kz + (1-k)t \\ 1 - k = (1-k)z - kt \\ n = z + t. \end{cases}$$

Tương tự trên, ta có: $n = -\dfrac{1}{2k} + 1$.

Cuối cùng, với *m* và *n* đã tìm, thay vào (*) và tính toán ta có

$$(1-k)\overrightarrow{MN} + k\overrightarrow{MP} = \vec{0} \Rightarrow \text{đpcm}.$$

Câu 4: Có thể xem $x \geq \max\{1; y\}$. Khi đó:

1. Nếu $x \geq 1 > y > 0$ thì $\begin{cases} x^x \geq x^y \\ y^y > y^x \end{cases} \Rightarrow$ đpcm (không có dấu "=").

2. Nếu $x \geq y \geq 1$ thì $\begin{cases} x^{x-y} - 1 \geq y^{x-y} - 1 \geq 0 \\ 1 \geq \left(\dfrac{y}{x}\right)^y > 0 \end{cases} \Rightarrow x^{x-y} - 1 \geq \left(\dfrac{y}{x}\right)^y \left(y^{x-y} - 1\right)$

$$\Rightarrow x^{x-y} - 1 \geq \frac{y^x}{x^y} - \frac{y^y}{x^y} \Rightarrow x^x - x^y \geq y^x - y^y$$

$\Rightarrow$ đpcm (dấu "=" xảy ra chỉ khi $x = y$).

Câu 5: Kiểm tra trực tiếp: $\left[\dfrac{1}{x}\right] = \begin{cases} 2n & \text{khi } \dfrac{1}{2n+1} < x \leq \dfrac{1}{2n}; \\ 2n-1 & \text{khi } \dfrac{1}{2n} < x \leq \dfrac{1}{2n-1}; \end{cases}$

nên trên mỗi nửa khoảng $I_n = \left(\dfrac{1}{2n+1}; \dfrac{1}{2n-1}\right)$ (với *n* nguyên dương), thì

$$f(x) = \begin{cases} 2n(2n+1)\left(x - \dfrac{1}{2n+1}\right) & \text{khi } \dfrac{1}{2n+1} < x \leq \dfrac{1}{2n}; \\ -2n(2n-1)\left(x - \dfrac{1}{2n-1}\right) & \text{khi } \dfrac{1}{2n} < x \leq \dfrac{1}{2n-1}; \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{2n}\right)=1,\ f\left(\frac{1}{2n+1}\right)=0=f\left(\frac{1}{2n-1}\right).$$

Vậy f liên tục trên mỗi nửa khoảng đó và tập giá trị của f trên mỗi I_n là cả đoạn $[0;\ 1]$. (1)

Đặt $x_n = 1/(2n+1)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to(x_n)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(x_n)^+} f(x) = 0 = f(x_n)$, nên *f* liên tục tại từng điểm x_n.

Từ đó suy ra *f* liên tục trên nửa khoảng $(0;\ 1] = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} I_n$, và *f* có tính chất nhận giá trị trung gian trên $(0;\ 1]$.

Cuối cùng, chỉ còn phải xét trường hợp $1 \geq \alpha > \beta = 0$ và *c* là một số thực thuộc khoảng giữa $f(\alpha)$ và $f(\beta) = f(0) \in [0;\ 1]$. Khi *n* đủ lớn, ta có $I_n \subset (\beta;\ \alpha)$, nên theo (1) tìm được $\gamma \in I_n \subset (\beta;\ \alpha)$ sao cho $f(\gamma) = c$.

Câu 6: Để cho gọn, ta ký hiệu tập tất cả các đa thức với hệ số thực (của biến *x*) bởi $\mathbb{R}[x]$, và gọi $\mathcal{A}$ là tập tất cả các đa thức $T \in \mathbb{R}[x]$ chỉ nhận giá trị không âm $(\forall x \in \mathbb{R},\ T(x) \geq 0)$.

(i) Trước hết, xét trường hợp $R = 0$ (tức là $R(x) \equiv 0$):

Khi đó, yêu cầu của bài toán trở thành: $P = Q \in \mathcal{A}$, và ta nhận được bộ nghiệm $(P, Q, R) = (T, T, 0)$ *nhưng chỉ với* các đa thức $T \in \mathcal{A}$.

(ii) Trường hợp còn lại, $R \neq 0$:

Ta viết lại điều kiện của bài toán dưới dạng $\sqrt{P} + \sqrt{Q} = \dfrac{P-Q}{\sqrt{P}-\sqrt{Q}} = \dfrac{P-Q}{R}$

$$\text{và giải hệ: } \begin{cases} \sqrt{P} - \sqrt{Q} = R \\ \sqrt{P} + \sqrt{Q} = \dfrac{P-Q}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{P} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{P-Q}{R} + R\right) \\ \sqrt{Q} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{P-Q}{R} - R\right), \end{cases}$$

suy ra $\sqrt{P}$ và $\sqrt{Q}$ là các phân thức (không âm).

Vậy tồn tại các đa thức N, S nguyên tố cùng nhau (ta ký hiệu $(N, S) = 1$) trên $\mathbb{R}[x]$, hệ số của luỹ thừa bậc cao nhất của biến số *x* trong $S(x)$ là 1, để $\sqrt{P} = \dfrac{N}{S}$ (tức là $\sqrt{P(x)} = \dfrac{N(x)}{S(x)}$ với mọi *x* mà $S(x) \neq 0$).

Từ đó, $N^2 = S^2P \,\vdots\, S^2$, nhưng $(N^2, S^2) = 1$ trên $\mathbb{R}[x]$ nên $S^2 = 1 = S$. Và ta được: $\sqrt{P} = N \Rightarrow P = N^2$ với $N \in \mathcal{A}$.

Tương tự, $Q = M^2$ với $M \in \mathcal{A}$.

Thử lại, ta nhận *thêm* bộ nghiệm

$$\big(P(x), Q(x), R(x)\big) = \Big((N(x))^2, (M(x))^2, N(x) - M(x)\Big),$$

với các đa thức $M, N \in \mathcal{A}$.

Cuối cùng, ta biết rằng nếu $T \in \mathbb{R}[x]$ và nếu $z = \alpha + i\beta$ là một nghiệm phức của phương trình $T(x) = 0$ thì $\overline{z} = \alpha - i\beta$ cũng là một nghiệm phức của phương trình đó (α, β là các số thực, $\beta \neq 0$).

Lúc này, ta nhận xét: $(x - z)(x - \overline{z}) = x^2 + bx + c$ là một tam thức bậc hai với các hệ số thực $(b = -2\alpha, c = \alpha^2 + \beta^2)$ và có biệt thức âm. Từ đó, sử dụng định lý Bezout và định lý cơ bản của Đại số, ta dễ dàng thấy rằng A chính là tập tất cả các đa thức $T \in \mathbb{R}[x]$ có dạng: $T(x) \equiv a\prod_{j=1}^{n}(x^2 + b_jx + c_j)$.

Trong đó, $a \geq 0$ còn *n* là một số tự nhiên (khi $n = 0$, tích "rỗng" tương ứng sẽ được hiểu là bằng 1); $(b_j)_{j=1}^{n}$, $(c_j)_{j=1}^{n}$ là hai dãy hữu hạn các số thực, *không nhất thiết phân biệt*, sao cho $\Delta_j := c_j^2 - 4d_j \leq 0$ $(\forall j)$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÀ RỊA – VŨNG TÀU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1: Phương trình: $\sin x.\sin 4x = 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{6} - x) - 4\sqrt{3}.\cos^2 x.\sin x.\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin x.\sin 4x = 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{6} - x) - \sqrt{3}\cos x.\sin 4x$

$\Leftrightarrow \sin 4x.(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 2\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{6} - x)$

$\Leftrightarrow \sin 4x.(\sin\frac{\pi}{6}\sin x + \cos\frac{\pi}{6}\cos x) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{6} - x)$

$\Leftrightarrow \sin 4x\cos(\frac{\pi}{6} - x) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{6} - x) \Leftrightarrow \cos(\frac{\pi}{6} - x) = 0$ hoặc $\sin 4x = \sqrt{2}$

Kết quả : $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Câu 2: Cố định 1 vị trí cho 1 học sinh nữ, đánh dấu các ghế còn lại từ 1 đến 9.

Gọi không gian mẫu là Ω, ta có $|\Omega| = 9!$.

Gọi A là biến cố không có hai học sinh nữ ngồi cạnh nhau. Xét các trường hợp.

+ 1 học sinh nữ ngồi ghế số 2, 1 học sinh nữ ngồi ghế số 4 $\Rightarrow$ học sinh nữ còn lại ngồi các ghế 6, 7, 8; hoán vị 3 vị trí, ta có 3.3! cách.

+ 1 học sinh nữ ngồi ghế số 2, 1 học sinh nữ ngồi ghế số 5 $\Rightarrow$ học sinh nữ còn lại ngồi các ghế 7, 8 ; hoán vị 3 vị trí, ta có 2.3! cách.

+ 1 học sinh nữ ngồi ghế số 2, 1 học sinh nữ ngồi ghế số 6 ⇒ học sinh nữ còn lại ngồi ghế số 8; hoán vị 3 vị trí, ta có 3! cách.

+ 1 học sinh nữ ngồi ghế số 3, 1 học sinh nữ ngồi ghế số 5 ⇒ học sinh nữ còn lại ngồi các ghế 7, 8; hoán vị 3 vị trí, ta có 2.3! cách.

+ 1 học sinh nữ ngồi ghế số 3, 1 học sinh nữ ngồi ghế số 6 ⇒ học sinh nữ còn lại ngồi ghế số 8; hoán vị 3 vị trí, ta có 3! cách.

+ 1 học sinh nữ ngồi ghế số 4, 1 học sinh nữ ngồi ghế số 6 ⇒ học sinh còn lại ngồi ghế số 8; hoán vị 3 vị trí ta có 3! cách.

$\Rightarrow |\Omega_A| = 6!\,(3.3! + 2.3! + 3! + 2.3! + 3! + 3!) = 10.6!.3!$

Kết luận $P(A) = \dfrac{10.6!.3!}{9!} = \dfrac{5}{42}$

Câu 3: Ta có: $3\left[\dfrac{3b^2 + 3c^2 - 3a^2 + 2bc}{(b+c)^2 - a^2}\right]^4 + 4\tan^6\dfrac{A}{2} = 7$

$$\Leftrightarrow 3\left(\dfrac{3\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1}\right)^4 + 4\tan^6\dfrac{A}{2} = 7 \Leftrightarrow 3\left(\dfrac{3\cos A + 1}{1+\cos A}\right)^4 + 4\tan^6\dfrac{A}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow 3\left(2 - \tan^2\dfrac{A}{2}\right)^4 + 4\tan^6\dfrac{A}{2} = 7 \qquad (*)$$

Mặc khác và: $\left(2 - \tan^2\dfrac{A}{2}\right)^4 + 1 + 1 + 1 \geq 4.\left(2 - \tan^2\dfrac{A}{2}\right)$

$$\Rightarrow 3\left(2 - \tan^2\dfrac{A}{2}\right)^4 + 9 \geq 12\left(2 - \tan^2\dfrac{A}{2}\right) \qquad (1)$$

$$\tan^6\dfrac{A}{2} + 1 + 1 \geq 3\tan^2\dfrac{A}{2} \Rightarrow 4\tan^6\dfrac{A}{2} + 8 \geq 12\tan^2\dfrac{A}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3\left(2 - \tan^2\dfrac{A}{2}\right)^4 + 4\tan^6\dfrac{A}{2} \geq 7$

Vậy đẳng thức (*) $\Leftrightarrow \begin{cases}\left(2 - \tan^2\dfrac{A}{2}\right)^4 = 1\\ \tan^6\dfrac{A}{2} = 1\end{cases} \Leftrightarrow \tan^2\dfrac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow A = \dfrac{\pi}{2}$

Câu 4: Xét hàm số $g(x) = (x+1).f(x) - \dfrac{x^3}{x+2}$

$\Rightarrow$ g(x) là đa thức bậc 2009 và $g(k) = (k + 1).f(k) - \frac{k^3}{k+2} = 0\ \forall k \in N^*,\ k \le 2009.$

$\Rightarrow g(x) = a.(x - 1)(x - 2) \ldots. (x - 2009)$

Ta có $g(1) = 0;\ f(1) = \frac{1}{1} = 1;\ g(-1) = a(-2)(-3)\ldots(-2010)$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2010!} \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2010!}(x - 1)(x - 2) \ldots (x - 2009)$

Ta có: $g(2010) = 2011.f(2010) - \frac{(2010)^3}{2012};\ g(2010) = -\frac{2009.2008\ldots1}{2010!} = -\frac{1}{2010}$

$$\Rightarrow f(2010) = \left[\frac{(2010)^3}{2012} - \frac{1}{2010}\right].\frac{1}{2011}$$

Câu 5: Ta chứng minh: $a_n = \frac{1}{2^n}.\cot\frac{\pi}{2^{n+1}}\ \ \forall n \ge 1\ (*)$

+ Với n = 1, ta có $a_1 = \frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow (*)$ đúng

+ Giả sử (*) đúng với n = k, tức là: $a_k = \frac{1}{2^k}.\cot\frac{\pi}{2^{k+1}}$

+ Ta chứng minh (*) với n = k + 1, thật vậy:

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \sqrt{a_k^2 + \frac{1}{4^k}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{\pi}{2^{k+1}} + \sqrt{\frac{1}{4^k}.\cot^2 + \frac{\pi}{2^{k+1}} + \frac{1}{4^k}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}.\cot\frac{\pi}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k}.\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}\right) = \frac{1}{2^{k+1}}.\frac{2\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}}$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}}.\cot\frac{\pi}{2^{k+2}}$$

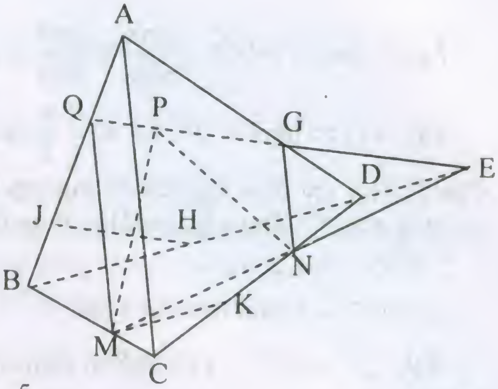
Vậy $a_n = \frac{1}{2^n}.\cot\frac{\pi}{2^{k+1}},\ \forall n \ge 1.$

Tính $\lim a_n$: $$\lim a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}.\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}.\frac{2}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}$$

Câu 6:

– Dựng thiết diện MNGQ

– Dựng MK // BD $\Rightarrow \frac{DE}{DB} = \frac{1}{3}$ (do MK=DE)



– Dựng HJ // EQ. Ta có:

$$\frac{AQ}{QJ}=\frac{AP}{PH}=\frac{4}{5}\Rightarrow AQ=\frac{4}{5}QJ\quad(1)$$

và $$\frac{BQ}{QJ}=\frac{BE}{HE}=\frac{BE}{HD+DE}$$

$$=\frac{BE}{\frac{1}{2}BD+\frac{1}{3}BD}$$

$$=\frac{BE}{\frac{5}{6}BD}=\frac{6}{5}.\frac{BE}{\frac{3}{4}BE}=\frac{8}{5}\Rightarrow QJ=\frac{5}{8}QB\quad(2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AQ=\frac{4}{5}QJ=\frac{4}{5}\frac{5}{8}QB=\frac{1}{2}QB\Rightarrow\frac{QA}{AB}=\frac{1}{3}$

Do MC : MB = 1 : 2 $\Rightarrow\frac{CM}{CB}=\frac{1}{3}$

Nên $\frac{QA}{AB}=\frac{CM}{CB}=\frac{1}{3}\Rightarrow QM\ //\ AC\Rightarrow AC\ //\ (QEM)$

$\Rightarrow NG\ //\ AC\Rightarrow$ MNGQ là hình thang cân có $QM=\frac{2}{3}a,\ GN=\frac{a}{3}$

ΔAQG có: $AQ=\frac{1}{3}a$, $AG=\frac{2}{3}a$, áp dụng định lí Cosin ta có (góc $A=60^0$)

$$\Rightarrow QG^2=\frac{a^2}{9}+\frac{4}{9}a^2-2\frac{1}{3}.\frac{2}{3}a^2.\frac{1}{2}=\frac{3a^2}{9}=\frac{a^2}{9}\Rightarrow QG=\frac{a}{3}$$

Gọi đường cao hình thang cân MNGQ là h

$$h^2=QG^2-\left(\frac{QM-GN}{2}\right)^2=\frac{1}{9}a^2-\left(\frac{\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{12}\Rightarrow h=\frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}h(QM+GN)=\frac{1}{2}\frac{a}{2\sqrt{3}}(\frac{3}{2}a+\frac{1}{3}a)=\frac{11a^2}{24\sqrt{3}}$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH GIA LAI
TRƯỜNG THPT PLEIKU

Câu 1: $2\tan x+\cot x=\sqrt{3}+\frac{2}{\sin 2x}\quad(1)$

Điều kiện: $\sin x\neq 0$ và $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{m\pi}{2};\ m\in Z$

Ta có : $\tan x + \cot x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{2}{\sin 2x}$

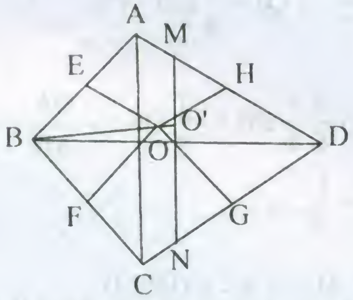
Vậy : (1) $\Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi ; k \in Z$

Câu 2: Mọi lũy thừa nguyên dương của 6 có tận cùng bằng 6 nên 16^n cũng có tận cùng như 6^n. Như vậy, mọi lũy thừa bậc 4n của 2 sẽ có tận cùng bằng 6. (vì $2^{4n} = 16^n$).

Ta có: $3^4 - 1$ chia hết cho 4 nên $2^{3^4} - 1$ có tận cùng là 6.

Vậy: $2^{3^4} = 2.2^{3^4} - 1$ có chữ số cuối cùng là 2.

Câu 3



Giả sử E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

Gọi K là trung điểm của đường chéo BD; MN là đoạn thẳng đi qua K và song song với đường chéo AC. ($M \in AD$; $N \in CD$).

Ta chứng minh MN trùng với tập hợp tất cả các điểm O nằm bên trong tứ giác sao cho diện tích của các tứ giác EBFO và HOGD bằng $\dfrac{S}{4}$; trong đó S là diện tích của tứ giác lồi ABCD.

Ta có: $S_{\Delta ABO} = 2.S_{\Delta EBO}$ và $S_{\Delta BCO} = 2.S_{\Delta BFO}$.

Vậy: Diện tích tứ giác ABCO bằng hai lần diện tích tứ giác EBFO.

Tương tự với hai tứ giác AOCD và HOGD.

Ta sẽ chứng minh đoạn thẳng MN là tập hợp tất cả các điểm O sao cho diện tích tứ giác ABCO bằng $\dfrac{S}{2}$.

Giả sử O thuộc đoạn thẳng MN. Vì MN //AC nên $S_{\Delta AOC} = S_{\Delta AKC}$

$\Rightarrow$ Diện tích các tứ giác ABCO và ABCK bằng nhau.

Mặt khác K là trung điểm của BD nên:

$$S_{\Delta ABK} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABD} \text{ và } S_{\Delta BCK} = \frac{1}{2} S_{\Delta BCD}.$$

Do đó diện tích tứ giác ABCK bằng $\dfrac{S}{2}$.

Giả sử O không thuộc đoạn thẳng MN. Kí hiệu O' là giao điểm của OB và MN vì tính chất lồi của tứ giác ABCD nên O' thuộc đoạn thẳng MN.

Theo chứng minh trên ta có diện tích của ABCO' bằng $\frac{S}{2}$.

Do đó diện tích của ABCO không thể bằng $\frac{S}{2}$.

Lập luận tương tự đối với đường chéo AC.

Vậy: Điểm cần tìm là giao điểm của hai đường thẳng, mà mỗi đường đi qua trung điểm của một trong hai đường chéo và song song với đường chéo còn lại.

Câu 4: Đặt: $A = b + c$, $B = c + a$, $C = a + b$

Vậy: $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ và $a + b + c = \frac{1}{2}(A + B + C)$

$$\text{Ta có } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \left(\frac{a}{b+c}+1\right) + \left(\frac{b}{c+a}+1\right) + \left(\frac{c}{a+b}+1\right) - 3$$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3$$

$$= \frac{1}{2}(A+B+C)\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}\right) \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Câu 5: Với $n \geq 1$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có :

$$U_{n+1} + (1 - U_n) \geq 2\sqrt{U_{n+1}(1 - U_n)} > 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1 \Rightarrow U_{n+1} > U_n$$

$\Rightarrow (U_n)$ là dãy số tăng và bị chặn trên $\Rightarrow$ Tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim U_n = U$

$$\text{Vậy: } U(1-U) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow U^2 - U + \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \left(U - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow U = \frac{1}{2}$$

Vậy: $\lim U_n = \frac{1}{2}$

Câu 6: $xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y), \forall x, y \in R$ (1)

Cho $x = y = 1$ ta có $2f(1) = 2(f(1))^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{array}\right.$

a) Xét trường hợp $f(1) = 0$

Cho $y = 1$ vào (1). Ta có $f(x) = 0, \forall x \in R$

b) Xét trường hợp $f(1) = 1$

Cho $y = 1$ ta có $x + f(x) = (x+1)f(x) \Rightarrow x(f(x) - 1) = 0$

Do đó: Với mọi $x \neq 0$ thì $f(x) = 1$

Kết hợp cả hai trường hợp ta có

$$f(x) = 0, \forall x \in R \text{ và } f(x) = \begin{cases} 1 \text{ khi } x \neq 0 \\ a \text{ khi } x = 0 \end{cases}, \text{ a là số tùy ý}$$

Thử lại : Với $xy \neq 0$ hoặc $x = y = 0$ thì (1) thỏa mãn.

Với $\begin{cases} x \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(y) = a \end{cases}$

Khi đó $xf(y) + yf(x) = ax$ và $(x + y)f(x)f(y) = (x + 0)a = ax$

Vậy các hàm số trên thỏa mãn (1)

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KON TUM
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KON TUM

Câu 1: Với $x > 0$ và $y > 0$ thì từ (1) suy ra $0 < x < 1$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1 - x - x^2}{x} \\ (y+1)(x+y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} - x - 1 \\ \left(\dfrac{1}{x} - x\right)\left(\dfrac{1}{x} - 1\right) = 1 \ (2') \end{cases}$$

$(2') \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$ liên tục trên đoạn $[0;1]$.

$$f'(x) = 3\left(x^2 - x\right) - x - 1 < 0,\ \forall x \in (0;1) \text{ và } f\left(\frac{1}{2}\right).f(1) < 0.$$

Suy ra trên (0;1) phương trình (2') có một nghiệm duy nhất $x_0 \in \left(\dfrac{1}{2};1\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x_0} - x_0\right)\left(\frac{1}{x_0} - 1\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_0} - 1 + x_0 = 1 \ (3)$$

Đặt $x_0 = \dfrac{1}{2\cos\alpha}\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}\right)$

$$(3) \Leftrightarrow 8\cos^3\alpha - 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right) - 2\left(2\cos^2\alpha - 1\right) + 2\cos\alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3\alpha - 2\cos 2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\alpha.\cos 3\alpha - 2\sin\alpha.\cos 2\alpha + 2\sin\alpha.\cos\alpha - \sin\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4\alpha = \sin 3\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = k2\pi \\ \alpha = \dfrac{\pi}{7} + k\dfrac{2\pi}{7} \end{array}\right.$$

Vì $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$ nên

$$\alpha = \frac{\pi}{7} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{7}} \Rightarrow y_0 = \frac{1}{x_0} - x_0 - 1 = x_0 - x_0^2 = \frac{2\cos\frac{\pi}{7} - 1}{4\cos^2\frac{\pi}{7}}.$$

Vậy $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{7}};\dfrac{2\cos\dfrac{\pi}{7}-1}{4\cos^2\dfrac{\pi}{7}}\right)$.

Câu 2: Giả sử A là tập con của X không chứa bất kỳ A_i nào, và có số phần tử lớn nhất thoả mãn điều kiện bài toán.

Giả sử $|A|=k$. Theo giả thiết với mỗi $x\in X\setminus A$ thì tồn tại $i(x)\in\{1,2,...,m\}$ thoả mãn $A_{i(x)}\subseteq A\cup\{x\}$.

Đặt $L_x=A\cap A_{i(x)}$. Vì $A_{i(x)}\not\subset A$, $\left|A_{i(x)}\right|=3$ nên $A_{i(x)}=\{x,a,b\}$, với $a,b\in A$.

Suy ra L_x có đúng hai phần tử.

Bởi vì $\left|A_i\cap A_j\right|\le 1$ với mọi $i\neq j$ nên tất cả L_x đều khác nhau.

Ta có C_k^2 tập con của tập A có hai phần tử. Do đó có thể có nhiều nhất C_k^2 các tập L_x. Vì vậy $n-k\le C_k^2$ hay $k^2+k\ge 2n$.

Suy ra $k\ge\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{1+8n})>\sqrt{2n}-\dfrac{1}{2}$. Vậy $k\ge\left[\sqrt{2n}\right]$.

Câu 3: Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{SA'}=\dfrac{1}{n}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB'}=\dfrac{1}{2n+1}\overrightarrow{SB}$.

Suy ra

$$n(2n+1)\overrightarrow{B'A'}=n\left(2\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}\right)+\overrightarrow{SA}=n\left(2\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}\right)+n\overrightarrow{SA'}$$

$$=n\left(2\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}\right)+n\left(\overrightarrow{SI}+\overrightarrow{IA'}\right)=n\left(2\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SI}\right)+n\overrightarrow{IA'}$$

Gọi I là điểm sao cho $2\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SI}=\vec{0}$.

Khi đó, $n(2n+1)\overrightarrow{B'A'}=n\overrightarrow{IA'}$.

Suy ra A', B' và I thẳng hàng hay đường thẳng A'B' đi qua điểm cố định I. (1).

Ta lại có $\overrightarrow{SA'}=\dfrac{1}{n}\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SC'}=\dfrac{2}{3n+1}\overrightarrow{SC}$. Suy ra

$$n(3n+1)\overrightarrow{C'A'}=n\left(3\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}\right)+\overrightarrow{SA}=n\left(3\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}\right)+n\overrightarrow{SA'}$$

$$=n\left(3\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}\right)+n\left(\overrightarrow{SJ}+\overrightarrow{JA'}\right)=n\left(3\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SJ}\right)+n\overrightarrow{JA'}$$

Gọi J là điểm sao cho $3\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SJ}=\vec{0}$.

Khi đó $n(3n+1)\overrightarrow{C'A'}=n\overrightarrow{JA'}$.

Suy ra A', C' và J thẳng hàng hay đường thẳng A'C' đi qua điểm cố định J. (2)
Từ (1) và (2) suy ra mặt phẳng (A'B'C') luôn đi qua một đường thẳng cố định IJ.

Câu 4: Lấy $a = b = 3,\ c = d = e = 2$, ta có $\dfrac{\sqrt{30}}{6\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2} \geq T$.

Ta chứng minh $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\right)^2} \geq \dfrac{\sqrt{30}}{6\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}$.

Khi đó $T = \dfrac{\sqrt{30}}{6\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{X^2}{2},\ c^2+d^2+e^2 \geq \frac{(c+d+e)^2}{3} = \frac{X^2}{3};$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)} = \sqrt{2X},\ \sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e} \leq \sqrt{3(c+d+e)} = \sqrt{3X}.$$

Suy ra $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2} \geq \sqrt{\dfrac{5}{6}}.X$ (1)

và $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\right)^2 \leq \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 X$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\sqrt{e}\right)^2} \geq \dfrac{\sqrt{30}}{6\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{2a}{3} = \dfrac{2b}{3} = c = d = e$. Vậy $T = \dfrac{\sqrt{30}}{6\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}$.

Câu 5: Từ sự xác định của dãy số (u_n), ta có

$$U_n = \alpha u_{n-1}^2;$$

$$U_{n-1}^2 = \alpha^2 u_{n-2}^4;$$

$$U_{n-2}^4 = \alpha^4 u_{n-3}^8;$$

...

$$U_2^{2^{n-1}} = \alpha^{2^{n-1}} u_1^{2n};$$

$$U_1^{2^n} = \alpha^{2^n} u_0^{2^{n+1}};$$

...

Nhân vế theo vế các đẳng thức trên, và giản ước các thừa số chung, ta có

$$u_n = \alpha.\alpha^2.\alpha^4...\alpha^{2n}.u_0^{2n+1} = \alpha^{1+2+2^2+...+2^n}.1,$$

$$u_n = \alpha^{2^{n+1}-1} = \alpha^{v_n - 1}.$$

Trong đó $v_n = 2^{n-1}$ là số hạng tổng quát của một cấp số nhân và $\beta = -1$, và yêu cầu được chứng minh.

Câu 6: Từ (3) thay y bởi x ta được

$$3f(x) - 2g(x) = 10g(x) - 30x \Rightarrow 3f(x) = 12g(x) - 30x$$

$$\Rightarrow f(x) = 4g(x) - 10x \quad (4)$$

Thay vào (3) ta được $12g(x) - 30x - 2g(x) = 10g(y) - 30y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow g(x) = 3x - 3y + g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5)$$

Thay y = 0 vào (5), ta được: $g(x) = 3x + g(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Thay vào (4) ta được: $f(x) = 2x + 4g(0), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $g(0) = a$ ta có $f(x) = 2x + 4a, \ g(y) = 3x + a, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad (6)$

Thay (6) vào (2) ta được $6(2x + 4a).(3x + a) + 25 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 36x^2 + 84ax + 24a^2 + 25 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 42^2 - 36(24a^2 + 25) = 864(1 - a^2) \leq 0 \Leftrightarrow |a| \geq 1.$$

Kết hợp với (1) suy ra g(0) = 1 hoặc g(0) = –1.

+ Với g(0) = 1 ta được f(x) = 2x + 4, g(x) = 3x+1 thoả (3).

+ Với g(0) = –1 ta được f(x) = 2x – 4, g(x) = 3x–1 thoả (3).

Vậy: Có hai cặp hàm số thoả mãn đề bài là f(x) = 2x + 4, g(x) = 3x+1
hoặc f(x) = 2x – 4, g(x) = 3x–1.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PHÚ YÊN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH

Câu 1: Giả sử ngược lại ab > 0.

Không mất tính tổng quát ta giả sử a > 0 và b > 0 (vì nếu ngược lại thì ta lấy –x, –a, – b thay cho x, a, b).

1. Nếu c > 0: Từ phương trình $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ có a, b, c > 0 nên nếu phương trình có nghiệm thì các nghiệm $x_i < 0$ hay $x_i.x_j > 0$

Mặt khác theo viet $\sum_{i \neq j} x_i.x_j = 0$. Mâu thuẫn

2. Nếu c = 0: $x^4 + ax^3 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + ax^2 + b) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3+ax^2+b=0\ (*) \end{array}\right.$$

Vì $ax^2>0$, $b>0$ nên (*) phải có 3 nghiệm thực, âm.

Xét phương trình $x^3+ax^2+b=0(*)$ có $\sum\limits_{i\neq j} x_i.x_j=0$ mâu thuẫn với (*)

3. Nếu $c<0$: Từ phương trình $x^4+ax^3+bx+c=0$ có $\prod\limits_{i=1}^{4} x_1=c<0$ suy ra phương trình có 1 nghiệm âm hoặc 3 nghiệm âm

a. Nếu phương trình có 1 nghiệm âm: Gọi $x_1<0$ và $x_2,x_3,x_4>0$.

Theo Viet ta có $x_1+x_2+x_3+x_4=-a<0 \Rightarrow -x_1>x_2+x_3+x_4$

$$\Rightarrow -x_1(x_2+x_3+x_4)>(x_2+x_3+x_4)^2$$

$$\Rightarrow -x_1x_2-x_1x_3-x_1x_4>x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_2x_3+2x_3x_4+2x_2x_4$$

$$\Rightarrow -x_1x_2-x_1x_3-x_1x_4>x_2x_3+x_3x_4+x_2x_4 \Rightarrow \sum_{i\neq j} x_ix_j<0\ (**)$$

Mặt khác theo Viet: $\sum\limits_{i\neq j} x_ix_j=0$ mâu thuẫn với (**).

b. Nếu phương trình có 3 nghiệm âm: Gọi $x_2,x_3,x_4<0$ và $x_1>0$

Theo viet ta có $\sum\limits_{i\neq j\neq k} x_ix_jx_k=-b<0$

hay $x_1x_2x_3x_4\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)<0 \Rightarrow \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}>0$

(do $x_1x_2x_3x_4<0$) hay $\frac{1}{x_1}>-\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_4}$ (I)

Mặt khác: $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=0$

$$\Rightarrow -x_1(x_2+x_3+x_4)=x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 \qquad \text{(II)}$$

Nhân vế theo vế (I) và (II) ta được:

$$-x_2-x_3-x_4>-\left(\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)(x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)$$

hay $x_2+x_3+x_4<\left(\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)(x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)$

$$\Leftrightarrow x_2+x_3+x_4<2(x_2+x_3+x_4)+\left(\frac{x_3x_4}{x_2}+\frac{x_2x_4}{x_3}+\frac{x_2x_3}{x_4}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0<x_2+x_3+x_4+\left(\frac{x_3x_4}{x_2}+\frac{x_2x_4}{x_3}+\frac{x_2x_3}{x_4}\right) \qquad \text{(III)}$$

Mà $x_2 + x_3 + x_4 < 0$ và $\frac{x_3x_4}{x_2} + \frac{x_2x_4}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_4} < 0$, mâu thuẫn với (III).

Câu 2: Với $p = 2$, $p^2 + k$ là hợp số với mọi k chẵn.

Với $p > 3$. Ta có $p^2 \equiv 1(\text{mod}\,3)$.

Mặt khác, nếu k là số nguyên dương chẵn và $k \equiv 2(\text{mod}\,3)$ thì $p^2 + k$ chia hết cho 3.

Với $p = 3$ thì $p^2 + k$ chia hết cho 3 nếu $k \equiv 1(\text{mod}\,5)$.

Vậy k thoả mãn điều kiện của bài toán khi và chỉ khi k là nghiệm dương của hệ phương trình: $\begin{cases} k \equiv 0(\text{mod}\,2) \\ k \equiv 2(\text{mod}\,3) \\ k \equiv 1(\text{mod}\,5). \end{cases}$

Theo định lý Thặng dư Trung Hoa, $k \equiv 26(\text{mod}\,30)$ là nghiệm của hệ trên, do đó có vô số k thoả mãn điều kiện đề bài.

Câu 3: Gọi M là điểm bất kì, ta luôn có: $0 \le \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right)^2$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M là trọng tâm tứ diện ABCD.

Khai triển (1), ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} +$$
$$+2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} \ge 0$$

Ta có: $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2 + MB^2 - \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)^2 = MA^2 + MB^2 - BA^2$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2 + MB^2 - BA^2$$

Tương tự

$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = MA^2 + MC^2 - CA^2$; $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD} = MA^2 + MD^2 - DA^2$

$2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = MB^2 + MC^2 - CB^2$; $2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = MC^2 + MD^2 - DC^2$;

$2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = MB^2 + MD^2 - DB^2$

Do đó, bất đẳng thức (1)viết lại:

$$4\left(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2\right) \ge AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$$

Khi $M \equiv O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có bán kính R, ta có

$AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2 \le 16R^2$ (2)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tứ diện ABCD là tứ diện gần đều.

Ta có (2) $\Leftrightarrow \left(AB^2 + AC^2 + BC^2\right) + \left(AC^2 + AD^2 + DC^2\right) + \left(AD^2 + AB^2 + DB^2\right)$

$$+\left(BC^2 + BD^2 + DC^2\right) \le 32R^2 \quad (3)$$

Gọi S_{ABC}, S_{ACD}, S_{ADB}, S_{ADC} lần lượt là diện tích các mặt (ABC), (ACD), (ADB), (ADC).

Xét tam giác ABC, ta có:

$AB^2 + AC^2 + BC^2 = 4S_{ABC}.(\cot A + \cot B + \cot C) \geq 4\sqrt{3}S_{ABC}$

Vậy $AB^2 + AC^2 + BC^2 \geq 4\sqrt{3}S_{ABC}$. Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều.

Tương tự

$AC^2 + AD^2 + DC^2 \geq 4\sqrt{3}S_{ACD}$; $AD^2 + AB^2 + DB^2 \geq 4\sqrt{3}S_{ADB}$;

$BC^2 + BD^2 + DC^2 \geq 4\sqrt{3}S_{BDC}$

Do đó (3) viết lại: $4\sqrt{3}\left(S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ADB} + S_{BDC}\right) \leq 32R^2 \Leftrightarrow S \leq \dfrac{8\sqrt{3}}{R^2}$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tứ diện ABCD là tứ diện đều.

Câu 4: Với x > 0, biến đổi và áp dụng BĐT Cauchy ta có :

$1 + x^3 = (1 + x)\left(1 - x + x^2\right) \leq \left(\dfrac{2 + x^2}{2}\right)^2$. Suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{\left(1 + x^3\right)}} \geq \dfrac{2}{2 + x^2}$ (*)

Đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi: $(1 + x) = \left(1 - x + x^2\right) \Leftrightarrow 2x = x^2 \Leftrightarrow x = 2$

Ta có $1 + a^4\sqrt{a} = 1 + \left(a\sqrt{a}\right)^3$, $1 + b^4\sqrt{b} = 1 + \left(b\sqrt{b}\right)^3$, $1 + c^4\sqrt{c} = 1 + \left(c\sqrt{c}\right)^3$

Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$S \geq \frac{4a^3}{\left(2 + a^3\right)\left(2 + b^3\right)} + \frac{4b^3}{\left(2 + b^3\right)\left(2 + c^3\right)} + \frac{4c^3}{\left(2 + c^3\right)\left(2 + a^3\right)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a\sqrt{a} = 2, b\sqrt{b} = 2, c\sqrt{c} = 2 \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt[3]{4}$

Tiếp theo ta chứng minh:

$$\frac{4a^3}{\left(2 + a^3\right)\left(2 + b^3\right)} + \frac{4b^3}{\left(2 + b^3\right)\left(2 + c^3\right)} + \frac{4c^3}{\left(2 + c^3\right)\left(2 + a^3\right)} \geq \frac{4}{3}(1)$$

Thật vậy BĐT (1) tương đương với:

$\Leftrightarrow 3\left[a^3\left(2 + c^3\right) + b^3\left(2 + a^3\right) + c^3\left(2 + b^3\right)\right] \geq \left(2 + a^3\right)\left(2 + b^3\right)\left(2 + c^3\right)$

$\Leftrightarrow 3\left[2\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + \left(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3\right)\right] \geq$

$$8 + 4\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + 2\left(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3\right) + a^3b^3c^3$$

$\Leftrightarrow 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + \left(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3\right) \geq 72(2)$ (vì abc = 4)

Áp dụng BĐT Cauchy ta có : $2\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \geq 2.3abc = 6.4 = 24$

$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq 3\sqrt[3]{a^6b^6c^6} = 3a^2b^2c^2 = 3.4^2 = 48$

Do đó: $2\left(a^3+b^3+c^3\right)+\left(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\right)\geq 24+48=72$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt[3]{4}$

Vậy $\min S=\frac{4}{3}$, đạt được khi $a=b=c=\sqrt[3]{4}$

Câu 5: Ta có : $x_{n+1}=x_n^2-5x_n+9(*)\Rightarrow x_{n+1}-x_n=(x_n-3)^2\geq 0\Rightarrow x_{n+1}\geq x_n$

Suy ra dãy $\{x_n\}$ tăng.

Nếu dãy $\{x_n\}$ bị chặn thì dãy $\{x_n\}$ có giới hạn.

Đặt $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, suy ra : $a\geq x_1=2009$.

Từ (*) suy ra: $a=a^2-5a+9\Leftrightarrow(a-3)^2=0\Leftrightarrow a=3$: Mâu thuẫn với $a\geq 2009$.

Do đó $\{x_n\}$ không có giới hạn, tức $x_n\to\infty$ khi $n\to\infty$.

Từ (*) suy ra $x_{n+1}-3=x_n^2-5x_n+6=(x_n-2)(x_n-3)$

Suy ra $\frac{1}{x_{n+1}-3}=\frac{1}{x_n-3}-\frac{1}{x_n-2}\Rightarrow\frac{1}{x_n-2}=\frac{1}{x_n-3}-\frac{1}{x_{n+1}-3}$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k-2}=\frac{1}{x_1-3}-\frac{1}{x_{n+1}-3}=\frac{1}{2006}-\frac{1}{x_{n+1}-3}$$

Vì $x_n\to\infty$ khi $n\to\infty$, nên $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{2006}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐĂKLĂK
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN DU

Câu 1: Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+2x+22}-\sqrt{y}=(y+1)^2\\ \sqrt{y^2+2y+22}-\sqrt{x}=(x+1)^2\end{cases}$, với $x\geq 0$; $y\geq 0$

Đặt $\begin{cases}u=x+1\geq 1\\ v=y+1\geq 1\end{cases}$ ta có $\begin{cases}\sqrt{u^2+21}-\sqrt{v-1}=v^2\\ \sqrt{v^2+21}-\sqrt{u-1}=u^2\end{cases}$ (A)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{u^2+21}-\sqrt{v-1}=v^2\\ \sqrt{u^2+21}-\sqrt{v^2+21}+\sqrt{u-1}-\sqrt{v-1}=v^2-u^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{u^2+21}-\sqrt{v-1}-v^2=0 & (1)\\ \sqrt{u^2+21}+\sqrt{u-1}+u^2=\sqrt{v^2+21}+\sqrt{v-1}+v^2 & (2)\end{cases}$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+21}+\sqrt{t-1}+t^2$ trên $[1;+\infty)$ có

$$f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+21}}+\frac{1}{2\sqrt{t-1}}+2t>0\ \forall t>1;$$

f(t) liên tục bên phải tại t = 1 ⇒ f(t) đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên phương trình (2): $f(u)=f(v);\ \forall u;v\in[1;+\infty)\Leftrightarrow u=v$.

Vậy hệ $\Rightarrow\begin{cases}u=v\ge 1\\ \sqrt{u^2+21}-\sqrt{u-1}-u^2=0\qquad(3)\end{cases}$

Xét hàm số $g(u)=\sqrt{u^2+21}-\sqrt{u-1}-u^2$ có

$g'(u)=\dfrac{u}{\sqrt{u^2+21}}-\dfrac{1}{2\sqrt{u-1}}-2u<0$, với $\forall u>1$; g(u) liên tục bên phải tại u = 1

⇒ g(u) nghịch biến trên $[1;+\infty)$ ⇒ phương trình (3) nếu có nghiệm thì nghiệm đó duy nhất; ta lại có $g(2)=\sqrt{4+21}-\sqrt{2-1}-2^2=0\Rightarrow u=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3) ⇒ (u; v) = (2; 2) là nghiệm hệ (A) ⇒ (x; y) = (1; 1) là nghiệm của hệ đã cho.

Câu 2: Không mất tính tổng quát giả sử $x=\max\{x,y,z\}\Rightarrow 0<yz\le 1$

Ta chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+yz}}\ (1);\quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2}{\sqrt{1+yz}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}\qquad(2)$$

a) Với (1) ta có : $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2\le\dfrac{1}{1+y^2}+\dfrac{1}{1+z^2}=\dfrac{1+y^2+1+z^2}{(1+y^2)(1+z^2)}$

$$=1+\frac{1-(yz)^2}{(1+y^2)(1+z^2)}\le 1+\frac{1-(yz)^2}{(1+yz)^2}=\frac{2}{1+yz}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)^2\le\frac{4}{1+yz}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+yz}}$$

b) Với (2): Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\le\dfrac{\sqrt{2}}{1+x}$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{2}{\sqrt{1+yz}}\le\frac{\sqrt{2}}{1+x}+\frac{2}{\sqrt{1+yz}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\frac{1}{1+x}+\sqrt{\frac{2}{1+yz}}\le\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{2}-\frac{1}{1+x}-\sqrt{\frac{2}{1+yz}}=\frac{1+3x}{2(1+x)}-\sqrt{\frac{2x}{1+x}}=\frac{1+3x-\sqrt{2x}.2\sqrt{1+x}}{2(1+x)}$$

$$= \frac{1+3x-2\sqrt{2x(1+x)}}{2(1+x)} = \frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt{1+x}\right)^2}{2(1+x)} \geq 0$$

Vậy $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+yz}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$

Câu 3: Từ giả thiết cho:

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{x_{n+1} - x_n}{n} = \frac{x_n - x_{n-1}}{n(n-1)} = \dots = (-1)^n \frac{(x_2 - x_1)}{n!}$$

Suy ra:

$$x_{n+2} = (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n) + \dots + (x_2 - x_1) + x_1 = x_1 + (x_2 - x_1).K_n$$

Trong đó : $K_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$

Từ đó suy ra dãy số đã cho có giới hạn và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{e}$.

Câu 4: Giả thiết: $f(xy-uv) = f(x).f(y) - f(u).f(v), .\forall x,y,u,v \in \mathbb{R}$ (1)

Từ (1) ta có $f(0) = 0$

Trong (1) cho $u = 0 \Rightarrow f(xy) = f(x).f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (2)

Trong (2) cho $x = y = 1 \Rightarrow f(1) = [f(1)]^2 \Rightarrow f(1) = 0$ hoặc $f(1) = 1$

+ Nếu $f(1) = 0$ Trong (2) cho $y = 1 \Rightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

+ Xét $f(1) = 1$ Trong (1) cho $y = v = 1 \Rightarrow f(x-u) = f(x) - f(u)$

Với $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ta có $f(x) = f(x+y-y) = f(x+y) - f(y)$.

$\Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Do đó f cộng tính nên $f(x) = f(1)x$, với $\forall x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = x$, với $\forall x \in \mathbb{Q}$.

Bây giờ trong (1) cho $x = y$; $u = v = 0$

$\Rightarrow f(xy) = f(x^2) = [f(x)]^2 \geq 0 \Rightarrow \forall x \geq 0$ thì $f(x) \geq 0$

Do đó nếu $x < y$ ta có $y - x > 0$ và

$f(y) = f(y-x+x) = f(y-x) + f(x) \Rightarrow f(y) > f(x) \Rightarrow f(x)$ đồng biến.

+ Với x tuỳ ý; ta chọn 2 dãy số hữu tỉ (r_n) và (s_n) đơn điệu ngược chiều cùng hội tụ về x:

$r_n < x < s_n \Rightarrow f(r_n) \leq f(x) \leq f(s_n) \Rightarrow r_n < f(x) < s_n$

Cho $n \to +\infty$ suy ra: $x \leq f(x) \leq x \Rightarrow f(x) = x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Thử lại thấy thoả mãn.

Kết luận: $f(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 5:

1) Nếu b = 0 $\Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 = x^2(x+a) \Rightarrow (a;b) = (u;0)$, với $u \in \mathbb{Z}$

2) Vì hệ số cao nhất của f(x) bằng 1 nên ta viết:

$f(x) = (x+u)(x+v)(x+w)$, với $u, v, w \in Z$ và $u.v.z \neq 0$

Theo Viet $\Rightarrow \begin{cases} uv + vw + wu = b \\ uvw = b \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{w} = 1$ (*)

a) Nếu $u, v, w \in \mathbb{Z}^-$ thì (*) không thoả mãn.

b) Nếu 2 trong 3 số u,v,w là âm; chẳng hạn $u, v \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow \dfrac{1}{w} < 1$

c) Nếu có 2 số dương và một số âm; $u, v \in Z^+, w \in Z^-$; khi u = 1; u = −w

$\Rightarrow f(x) = (x+1)(x+v)(x-v) = (x+1)(x^2 - v^2)$

$\Rightarrow f(x) = x^3 + x^2 - v^2x - v^2 \Rightarrow (a;b) = (1;-v^2)$

d) Nếu $u, v, w \in \mathbb{Z}^+$;giả sử $u \le v \le w \Rightarrow 1 \le \dfrac{3}{u} \Rightarrow u \le 3$

$\Rightarrow u = 2$ hoặc $3 \Rightarrow (u, v, w) = (3,3,3);(2,4,4);(2,3,6)$

Vậy (a; b) là (u; 0) ; (1; $-v^2$) ; (9;27) ; (10;32) ; (11;36)

Khi đó:

$f(x) = x^2(x+u)$; $f(x) = (x+1)(x+v)(x-v) = x^3 + x^2 - v^2x - v^2$

$f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x+3)^3$

$f(x) = x^3 + 10x^2 + 32x + 32 = (x+2)(x+4)^2$

$f(x) = x^3 + 11x^2 + 36x + 36 = (x+2)(x+3)(x+6)$.

Câu 6: Ta có $V = \dfrac{1}{3} r.S_{\text{toàn phần}}$.

Gọi S_i là diện tích mặt đối diện đỉnh A_i $(i = \overline{1;4})$

Ta có bất đẳng thức (6) $\Leftrightarrow \dfrac{m_1.S_1}{h_1S_1} + \dfrac{m_2S_2}{h_2S_2} + \dfrac{m_3S_3}{h_3S_3} + \dfrac{m_4S_4}{h_4S_4} \le \dfrac{R+r}{r}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} m_i.S_i\left(\frac{1}{3V}\right) \le \frac{(R+r)\sum\limits_{i=1}^{4} S_i}{3V} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} m_i.S_i \le R\sum_{i=1}^{4} S_i + r\sum_{i=1}^{4} S_i \qquad \text{(a)}$$

Ta có $\forall i = \overline{1;4}$; $m_i = A_iO_i$ với O_i là tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đối diện đỉnh A_i ta có:

$m_i = A_iO_i \le A_iO + OO_i = R + OO_i \Rightarrow m_i.S_i \le R.S_i + OO_i.S_i$, với $i = \overline{1;4}$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4} m_i.S_i \le R\sum_{i=1}^{4} S_i + \sum_{i=1}^{4} OO_i.S_i = R\sum_{i=1}^{4} S_i + r\sum_{i=1}^{4} S_i \le (R+r)\sum_{i=1}^{4} S_i$, nên (a) đúng

Vậy ta có bất đẳng thức: $\sum_{i=1}^{4} \frac{m_i}{h_i} \le \frac{R+r}{r}$ (đpcm)

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÌNH PHƯỚC
TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUANG TRUNG

Câu 1: Do $xyz = 1$ nên chỉ xảy ra hai khả năng:

Khả năng 1: x, y và z là các số nguyên dương thì từ hệ phương trình trên ta suy ra:

$$\sqrt[3]{xyz}(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4yz} + \sqrt[3]{xy^4z} + \sqrt[3]{xyz^4} = x^2 + y^2 + z^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt[3]{x^4y^2z^2} = \sqrt[6]{x^8y^4z^4} = \sqrt[6]{x^2x^2x^2x^2y^2z^2} \le \frac{4x^2+y^2+z^2}{6};$$

$$\sqrt[3]{xy^4z} \le \frac{x^2+4y^2+z^2}{6}; \sqrt[3]{xyz^4} \le \frac{x^2+y^2+4z^2}{6}$$

Cộng ba bất đẳng thức lại ta có:

$$\sqrt[3]{x^4yz} + \sqrt[3]{xy^4z} + \sqrt[3]{xyz^4} \le x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow x+y+z \le x^2+y^2+z^2.$$

Từ (2) suy ra dấu bằng phải xảy ra ở bất đẳng thức trên nên $x = y = z$.

Thay vào (1) ta có $x = y = z = 1$.

Khả năng 2: Hai trong ba số x, y, z là số âm và một số là số dương. Thế thì: $x + y + z < |x| + |y| + |z|$, thì khi đó áp dụng lập luận trên thì: $|x| + |y| + |z| \le x^2 + y^2 + z^2$.

Trong trường hợp này dẫn đến $x + y + z < x^2 + y^2 + z^2$, tức trong trường hợp này (2) không xảy ra.

Vậy phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất là $(x, y, z) = (1,1,1)$

Cách 2: Dễ nhận thấy $xyz \ne 0$. Từ (1) ta có $z = \frac{1}{xy}$.

Thay vào phương trình (2) ta có: $x + y + \frac{1}{xy} = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + \left(\frac{1}{xy} - 1\right)^2 + (x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2} - 3) = 0 \quad (3)$$

Do $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2} \ge 3$ nên (3) xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Câu 2: Ta nhận thấy rằng tập A chứa vô hạn các phần tử vì dễ dàng nhận thấy các số chính phương khác 0 đều nằm trong A. Và ta chứng minh tập A cũng chỉ chứa các số chính phương (khác 0). Thật vậy, giả sử a là một phần tử bất kỳ của tập A. Gọi b, c, d là ba phần tử khác nhau của A và đều khác a.

Theo giả thiết bài toán thì tồn tại các số nguyên dương m, n, p sao cho:

$$abc = m^2, abd = n^2, acd = p^2.$$

Từ đây suy ra: $a^3b^2c^2d^2 = m^2n^2p^2 \Rightarrow a = \left(\frac{mnp}{abcd}\right)^2$

Vậy a là bình phương của một số hữu tỉ nhưng do a là một số nguyên dương nên a là bình phương của một số nguyên dương. Vậy mọi phần tử của A đều là số chính phương.

Câu 3: Trước tiên ta chứng minh một bổ đề sau:

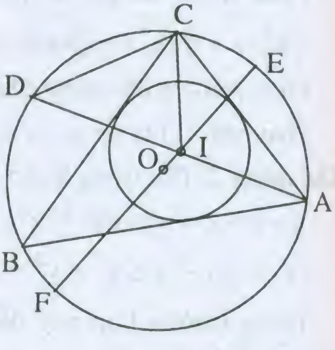
Bổ đề: Đường tròn (I, r) nằm trong đường tròn (O, R). Giả sử A là một điểm bất kỳ trên đường tròn (O, R), AB và AC là hai dây cung của đường tròn (O) cùng tiếp xúc với đường tròn (I).

Khi đó BC là tiếp tuyến của đường tròn (I) khi và chỉ khi $IO = \sqrt{R(R-2r)}$

Chứng minh:

Đường phân giác trong góc A cắt đường tròn (O) tại D. Nối C với I và D. Khi đó BC tiếp xúc với đường tròn (I) khi và chỉ khi $\angle BCI = \angle ACI$. Do

$$\angle CID = \angle ACI + \angle IAC = \angle ACI + \angle IAB$$
$$= \angle ACI + \angle BCD$$
$$\angle DCI = \angle BCI + \angle BCD$$



Vậy $\angle BCI = \angle ACI \Leftrightarrow \angle CID = \angle DCI$.

Tức là khi và chỉ khi $DC = DI$

Gọi EF là đường kính của đường tròn (O) đi qua O và I.

Thì $DC = DI$ khi và chỉ khi:

$$DI.IA = DC.IA = 2R.\sin DAC.\frac{r}{\sin DAC} = 2Rr.$$

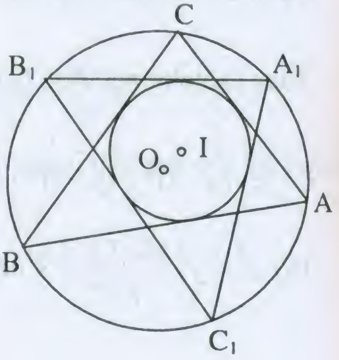
Mặt khác $DI.IA = EI.IF = (R + OI)(R - OI) = R^2 - OI^2$

Vậy BC tiếp xúc với đường tròn (I) khi và chỉ khi $R^2 - OI^2 = 2Rr$, tức là khi và chỉ khi

$$IO = \sqrt{R(R-2r)}.$$

Bổ đề được chứng minh.

Chứng minh bài toán:



Theo bổ đề trên tam giác ABC vừa nội tiếp đường tròn (O) vừa ngoại tiếp đường tròn (I) nên $IO = \sqrt{R(R-2r)}$, với R và r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.

Tam giác $A_1B_1C_1$ có A_1B_1 và A_1C_1 cùng tiếp xúc với đường tròn I và có $IO = \sqrt{R(R-2r)}$ nên theo bổ đề trên thì B_1C_1 cũng tiếp xúc với đường tròn (I) (đpcm).

Câu 4: Nếu $P(x)$ có nghiệm x_0, ta chứng minh x_0 chẵn

+) Thật vậy giả sử x_0 lẻ, ta có $P(x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow x_0^{2008} - 2007x_0^{2007} + (2008+a).x_0^{2006} - 2009x_0 + a = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0^{2007}(x_0 - 2007) + 2008.x_0^{2006} + a\left(x_0^{2006} - 1\right) - 2009x_0 + a = 0 \ (1)$$

Vì x_0 lẻ nên VT(1) lẻ $\neq 0$ (vô lý), suy ra x_0 chẵn.

+) Giả sử x_0 là nghiệm bội nguyên $\Rightarrow P'(x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow 2008.x_0^{2007} - 2007^2.x_0^{2006} + 2006(2008+a)x_0^{2005} - 2009 = 0 \ (2)$$

(vô lý vì VT(2) lẻ nên $P'(x_0) \neq 0$)

Vậy: $P(x)$ không có nghiệm bội nguyên.

Câu 5:

Xét hàm số $f_n(x) = x^n - \cos x$. Ta có $f_n(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Nhận xét rằng $f_n'(x) = nx^{n-1} + \sin x \geq 0, \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Suy ra $f_n(x)$ đồng biến trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Mặt khác $f_n(0) = -1 < 0$ và $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n > 0$.

Suy ra $f_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $a_n \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, tức là tồn tại duy nhất a_n để $\cos a_n = a_n^n$.

Ta chứng minh (a_n) là dãy tăng. Giả sử ngược lại, tồn tại n mà $a_n > a_{n+1}$.

Khi đó $\cos a_n < \cos a_{n+1}$ (do $a_n, a_{n+1} \in [0,1]$ và $a_n^n < a_{n+1}^{n+1} \leq a_{n+1}^n$ (do $a_{n+1} \in [0;1]$). Suy ra $a_n < a_{n+1}$. Mâu thuẫn với điều giả sử trên.

Vậy (a_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi 1. Do đó tồn tại $\lim a_n = \alpha$. Ta có:

$a_n = (\cos a_n)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \alpha = (\cos\alpha)^0 = 1$. Vậy $\lim a_n = 1$.

Câu 6: Trong (1) cho $x = 0$ ta có: $f(0) + y + f(0) = f(f(y)) + yf(0), \forall y \in \mathbb{R}$, hay $f(f(y)) = 2f(0) + y - yf(0), \forall y \in \mathbb{R}$ (*)

Lại cho $x = 1$ trong (1) ta có:

$$f(f(y)) + y + f(1) = f(f(1+y)) + yf(1), \forall y \in \mathbb{R}$$

Sử dụng phép thay thế trong (*) ta có:

$$2f(0) + y - yf(0) + y + f(1) = 2f(0) + (1+y) - (y+1)f(0) + yf(1), \ \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y + f(1) = yf(1) + 1 - f(0), \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y[f(1) - 1] + f(1) - 1 + f(0) = 0, \forall y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(1) - 1 + f(0) = 0 \end{cases}$$

Do đó $f(0)=0$ và thay vào (*) ta có: $f[f(y)]=y, \forall y \in \mathbb{R}$ (**)

Thay (**) vào (1) ta được: $f(xf(y))+y+f(x)=x+y+yf(x)$

$$\Leftrightarrow f(xf(y))+f(x)=x+yf(x), \forall x,y \in \mathbb{R} \qquad (***)$$

Trong (***) thay $y=1$ và sử dụng $f(1)=1$ ta được:

$$2f(x)=x+f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)=x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Thử lại hàm số $f(x)=x$ thỏa mãn phương trình.

Vậy $f(x)=x$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LONG AN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1: Đặt $f(t)=2t^3+3t^2-18$ và $g(t)=t^3+t$ thì hệ phương trình được viết lại:

$$\begin{cases} f(x)=g(y) \\ f(y)=g(z) \\ f(z)=g(x) \end{cases}$$

Giả sử x = max(x, y, z) thì $\begin{cases} x \ge y \\ x \ge z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge g(y) \\ g(x) \ge g(z) \end{cases}$ (do hàm số g đồng biến)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge f(x) \\ g(z) \le f(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x \ge 2x^3+3x^2-18 \\ z^3+z \le 2z^3+3z^2-18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+5x+9) \le 0 \\ (z-2)(z^2+5z+9) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ z \ge 2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra: $2 \le z \le x \le 2 \Rightarrow x=z=2$.

Thế vào hệ phương trình ta được y = 2

Thử lại ta thấy: x = y = z = 2 thoả hệ phương trình.

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất x = y = z = 2.

Câu 2: Dễ thấy dãy $\{x_n\}$ là một dãy tăng.

Đặt $b_n = \frac{a_n}{e^{2^n}}$ $(n \ge 1)$ và $y_n = \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \dots + \sqrt{b_n}}}$.

Ta có: $y_n = \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \dots + \sqrt{b_{n-1} + \frac{\sqrt{a_n}}{e^{2^{n-1}}}}}} = \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \dots + \sqrt{\frac{a_{n-1}}{e^{2^{n-1}}} + \frac{\sqrt{a_n}}{e^{2^{n-1}}}}}}$

$$= \dots = \frac{1}{e}\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}} = \frac{x_n}{e}$$

Từ đó suy ra: dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn tương đương dãy $\{y_n\}$ có giới hạn hữu hạn.

Dễ thấy dãy $\{y_n\}$ tăng nên ta chỉ cần chứng minh nó bị chặn trên.

Ta lại có: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(\ln a_n) < \ln 2$ (giả thiết)

Suy ra $\exists n_0 : \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n}\ln(\ln a_n) < \ln 2 \Rightarrow \ln(\ln a_n) < n\ln 2$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{e^{2^n}} < 1 \Rightarrow b_n < 1,\ \forall n > n_0$$

Đặt $a = \max\{b_1, b_2, ..., b_{n_0}, 1\}$, suy ra $b_n < a,\ \forall n$

Ta có : $y_n = \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + ... + \sqrt{b_n}}} \leq \sqrt{a + \sqrt{a + ... + \sqrt{a}}}$ (*)

Xét dãy $\{z_n\}$: $z_1 = \sqrt{a},\ z_{n+1} = \sqrt{a + z_n},\ \forall n \geq 1$

Chứng minh được dãy $\{x_n\}$ bị chặn trên bởi $M = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

Kết hợp với (*), suy ra dãy $\{y_n\}$ cũng bị chặn trên bởi M.
Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 3: Cho $y = 1$ thì: $f(x) = f\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) + (x - 1)^2$

$$\Leftrightarrow f(x) + 2x = f\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) + 2\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right)$$

Đặt: $g(x) = f(x) + 2x$ thì $g(x) = g\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right)$ (1) và g liên tục.

Do g là hàm số chẵn nên ta xét trên $[0; +\infty)$.
Với $a \geq 0$ ta xét hai trường hợp:
i) $0 \leq a \leq 1$

Xét dãy số $\{x_n\}$ như sau: $x_0 = a$; $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

Vì $0 \leq x_0 \leq 1$, bằng quy nạp ta được $0 \leq x_n \leq 1, \forall n \in N$

Ta lại có: $x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_n \leq \frac{x_n^2 + 1}{2} \Leftrightarrow (x_n - 1)^2 \geq 0$

Từ đó suy ra $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn

Gọi $\lim x_n = k$ thì $k = \frac{k^2 + 1}{2} \Leftrightarrow k = 1$. Vậy $\lim x_n = 1$

Từ đó thế x bởi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vào phương trình (1) ta được

$$g(a) = g(x_0) = g\left(\frac{x_0^2 + 1}{2}\right) = g(x_1) = g\left(\frac{x_1^2 + 1}{2}\right) = g(x_2) = \cdots = g(x_n)$$

$\Rightarrow g(a) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x_n) = g(1)$

ii) $a > 1$

Xét dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau: $x_0 = a, x_{n+1} = \sqrt{2x_n - 1}$

Sử dụng phương pháp của dãy truy hồi ta được $\lim x_n = 1$

Do $x_n = \dfrac{x_{n+1}^2+1}{2}$, nên thế x bởi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vào phương trình (1) ta được:

$$g(a)=g(x_0)=g\left(\frac{x_1^2+1}{2}\right)=g(x_1)=g\left(\frac{x_2^2+1}{2}\right)=g(x_2)=\cdots=g(x_n)$$

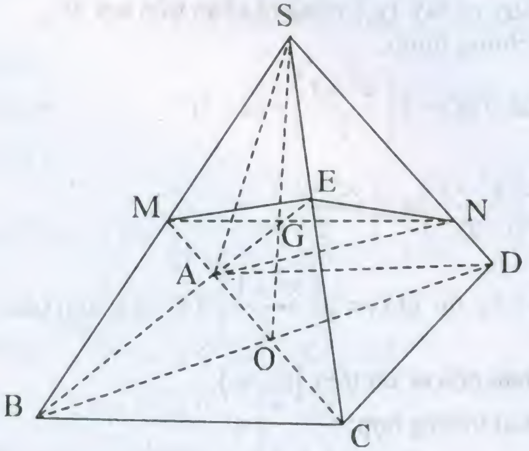
$$\Rightarrow g(a)=\lim_{x\to\infty} g(x_n)=g(1)$$

Từ đó suy ra $g(x)=C, \forall x\in[0;+\infty)$ và do hàm số g chẵn nên:

$g(x)=C, \forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra $f(x)=-2x+C$. Thử lại hàm số $f(x)=-2x+C$ thoả bài toán

Câu 4:



Ta có: $\dfrac{V_0}{V}=\dfrac{V_{SAMEN}}{V_{SABCD}}=\dfrac{V_{SAME}+V_{SANE}}{V_{SABCD}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{V_{SAME}}{V_{SABC}}+\dfrac{V_{SANE}}{V_{SACD}}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{V_0}{V}=\frac{V_{SAMEN}}{V_{SABCD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SB}.\frac{SE}{SC}+\frac{SN}{SD}.\frac{SE}{SC}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{SM}{SB}+\frac{SN}{SD}\right) \quad (1)$$

Gọi O là giao điểm của AC và BD. G là giao điểm của SO và AE. Suy ra G là trọng tâm ΔSAC. Chứng minh $G\in MN$.

Vậy SO, AK, MN đồng quy tại G.

Ta lại có: $\dfrac{S_{SGM}}{S_{SOB}}=\dfrac{SG.SM}{SO.SB}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{SM}{SB}$; $\dfrac{S_{SGN}}{S_{SOD}}=\dfrac{SG}{SO}\cdot\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{SN}{SD}$

Suy ra: $\dfrac{S_{SGM}}{S_{SOB}}+\dfrac{S_{SGN}}{S_{SOD}}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{SM}{SB}+\dfrac{SN}{SD}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{S_{SGM}+S_{SGN}}{S_{SOB}}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{SM}{SB}+\dfrac{SN}{SD}\right)$ (do $S_{SOB}=S_{SOD}$) $\Leftrightarrow \dfrac{S_{SMN}}{S_{SBD}}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{SM}{SB}+\dfrac{SN}{SD}\right)$

$$\Leftrightarrow 3SM.SN=SM.SD+SN.SB \Leftrightarrow \frac{SB}{SM}+\frac{SD}{SN}=3 \quad (2)$$

Đặt $\frac{SB}{SM} = x > 0$, $\frac{SD}{SN} = y > 0$. Từ (2) ta có : $x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$.

Thay vào (1), ta được: $\frac{V_0}{V} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3-x}\right) \Leftrightarrow \frac{V_0}{V} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{3x - x^2}\right)$

Điền kiện để mp(P) cắt cạnh SB là $\frac{SB}{SM} \geq 1$, suy ra $x \geq 1$.

Mà $x = 3 - y$ nên $y \leq 2$

Tương tự : $\frac{SD}{SN} \geq 1$, suy ra $y \geq 1$. Mà $y = 3 - x$ nên $x \leq 2$.

Xét hàm số : $f(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3x - x^2}$ $\quad (x \in [1;2])$.

Ta có : $f'(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2x - 3}{\left(3x - x^2\right)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \in [1;2]$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3};\ f(1) = \frac{3}{8};\ f(2) = \frac{3}{8}$$

Vậy : $\frac{V_0}{V} \leq \frac{3}{8} \Leftrightarrow V_0 \leq \frac{3}{8}V$ (đpcm).

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TIỀN GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN TIỀN GIANG

Câu 1: Do các hệ số của phương trình đều dương và theo giả thiết thì phương trình có 4 nghiệm: x_1, x_2, x_3, x_4 đều thực, nên cả 4 nghiệm này đều âm.

Suy ra: $-x_1 > 0, -x_2 > 0, -x_3 > 0, -x_4 > 0$

Theo định lý Viet thì: $\begin{cases} (-x_1) + (-x_2) + (-x_3) + (-x_4) = 4a \\ (-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_4) = 1 \end{cases}$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$\left[(-x_1) + (-x_2) + (-x_3) + (-x_4)\right]^4 \geq 4^4(-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_4) \quad (1)$$

Ta thu được: $(4a)^4 \geq 4^4$ hay $a \geq 1$.

Kết hợp với giả thiết: $0 < a \leq 1$ ta được: $a = 1$. Khi đó thì (1) xảy ra dấu đẳng thức, suy ra: $(-x_1) = (-x_2) = (-x_3) = (-x_4)$ và $(-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_4) = 1$

Vậy nên: $(-x_1) = (-x_2) = (-x_3) = (-x_4) = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = -1$

Câu 2: Gọi A là tập hợp tất cả các số thoả mãn yêu cầu bài toán

Gọi A^* là tập hợp tất cả các số có 15 chữ số được lập nên bởi các chữ số 0,1,2,3,4 mà mỗi chữ số đều có mặt đúng 3 lần trong số đó.

Gọi A_i là tập hợp tất cả các số thuộc A mà trong mỗi số chữ số $i \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ chiếm đúng 3 vị trí liên tiếp $\Rightarrow A = A^* \setminus \left(\bigcup\limits_{i=0}^{4} A_i\right)$

Ta có $\left|A^*\right| = \dfrac{12 \times 14!}{(3!)^5} = 134534400;$

$$|A_0| = \frac{12.12!}{(3!)^4}; |A_i| = \frac{10.12!}{(3!)^4}, \text{ với } i \neq 0;$$

$$|A_0 \cap A_i| = \frac{10.10!}{(3!)^3}; |A_i \cap A_j| = \frac{8.10!}{(3!)^3} \text{ với } i, j \neq 0;$$

$$|A_0 \cap A_i \cap A_j| = \frac{8.8!}{(3!)^2}; |A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{6.8!}{(3!)^2}, 0 < i < j < k \leq 4;$$

$$|A_0 \cap A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{6.6!}{3!}, \left|\bigcap_1^4 A_{i_j}\right| = \frac{4.6!}{3!}; \left|\bigcap_0^4 A_i\right| = 4.4!$$

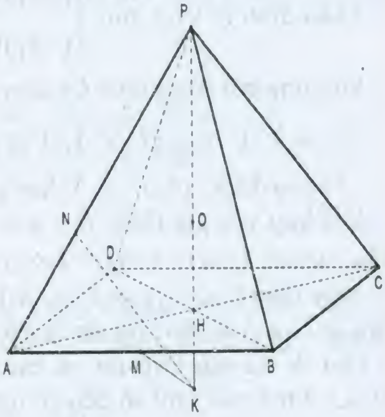
$$\Rightarrow A = \frac{12 \times 14!}{(3!)^5} - \left(\frac{12.12!}{(3!)^4} + 4 \times \frac{10.12!}{(3!)^4}\right) + \left(4 \times \frac{10.10!}{(3!)^3} + C_4^2 \times \frac{8.10!}{(3!)^3}\right)$$

$$- \left(C_4^2 \times \frac{8.8!}{(3!)^2} + C_4^3 \times \frac{6.8!}{(3!)^2}\right) + \left(C_4^3 \times \frac{6.6!}{3!} + \frac{4.6!}{3!}\right) - 4.4!$$

Câu 3: Gọi R,r lần lượt là bán kính của hình cầu tâm K,O. Gọi h là chiều cao của hình chóp kẻ từ P. Do tính đối xứng ta có O và K cùng nằm trên đường cao hạ từ PH của hình chóp.

Cắt hình chóp bằng một mặt phẳng (α) qua đường cao và song song AB, thiết diện nhận được là tam giác cân đỉnh P cạnh đáy EF bằng 2 và cạnh bên bằng $\sqrt{h^2+1}$, tam giác này có đường tròn nội tiếp là thiết diện của hình cầu tâm O với hình chóp, nên đường tròn này có bán kính bằng r.

$$S_{PEF} = pr = \frac{1}{2}r.\left(2 + 2\sqrt{h^2+1}\right); \ S_{PEF} = \frac{1}{2}2.h = h$$



$$\Rightarrow r = \frac{h}{\sqrt{h^2+1}+1} = \frac{\sqrt{h^2+1}-1}{h} \quad (1)$$

Cũng do tính đối xứng, hình cầu tâm K tiếp xúc AB tại trung điểm M của AB

Vì d(K, (ABCD)) = d(O, (ABCD)) = r (giả thiết) nên $R^2 = KM^2 = r^2 + 1$ (2)

Hơn nữa nếu gọi N là tiếp điểm của hình cầu tâm K với PA ta có AN = AM = 1

Khi đó : $PN = PA - AN = PA - 1 = = \sqrt{PH^2 + HA^2} = \sqrt{h^2+2} - 1$

Ta lại có PK = h + r nếu K nằm khác phía với O so với (ABCD);

PK = h – r nếu K nằm cùng phía với O so với (ABCD)

Do vậy : $PK^2 = PN^2 + NK^2 = PN^2 + MK^2$

$$\Leftrightarrow (h \pm r)^2 = \left(\sqrt{h^2+2} - 1\right)^2 + r^2 + 1 \text{ (do (2))} \Leftrightarrow \pm rh = 2 - \sqrt{h^2+2}$$

$$\Leftrightarrow \pm\left(\sqrt{h^2+1} - 1\right) = 2 - \sqrt{h^2+2} \text{ (do (1))} \quad \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Vậy : $V = \frac{1}{3}.4.\frac{\sqrt{7}}{3} = 4\frac{\sqrt{7}}{9}$

Câu 4:

Cách 1

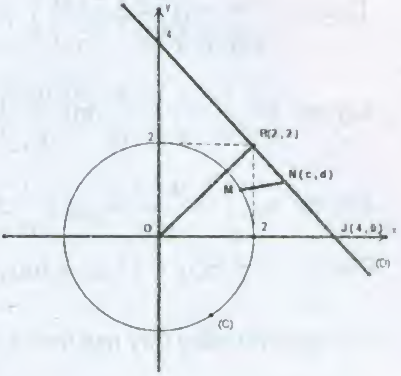
Trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

- Xét điểm M(a,b) thỏa mãn:

$a^2 + b^2 = 4$ thì M thuộc đường tròn (C) tâm O, bán kính: R = 2.

- Xét điểm N (c, d) thỏa mãn:

c + d = 4 thì N thuộc đường thẳng (D) có phương trình: x + y = 4 (D).



Ta có: $MN = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + (c+d)^2 - 2ac - 2bd - 2cd} = \sqrt{20 - 2(ac + bd + cd)}$$

Đường thẳng (D) cắt Ox, Oy lần lượt tại J(4,0) và I(0,4) .

Dựng OB ⊥ IJ, OB cắt (C) tại A thì có:

$OB = 2\sqrt{2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{2} - 2$.

Do MN ≥ AB, với ∀ M ∈ (C) và ∀N ∈ (D) nên:

$$\sqrt{20 - 2(ac + bd + cd)} \geq 2\sqrt{2} - 2 \Rightarrow ac + bd + cd \leq 4 + 4\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi: M ≡ A và N ≡ B hay (a; b) = $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, (c; d) = (2;2).

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức:

ac + bd + cd là $4 + 4\sqrt{2}$ khi $a = b = \sqrt{2}$ và $c = d = 2$

Cách 2

Đặt P = ac + bd + cd, ta có: $ac \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}a^2 + \frac{c^2}{\sqrt{2}}\right)$; $bd \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}b^2 + \frac{d^2}{\sqrt{2}}\right)$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^2 + b^2\right) + \frac{c^2 + d^2}{2\sqrt{2}} + cd = 2\sqrt{2} + \frac{(c+d)^2}{2\sqrt{2}} + cd\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\le \left(2\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)+\frac{(c+d)^2}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4+4\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi: $c=a\sqrt{2}, d=b\sqrt{2}, c=d$ nên: $a=b=\sqrt{2}, c=d=2$.

Do đó: $P_{\max}=4+4\sqrt{2}$ đạt được khi: $(a,b,c,d)=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},2,2\right)$

Câu 5: Nhận xét $u_n>0, v_n>0$ với mọi $n=0, 1, 2, \ldots$

Để đơn giản ta ký hiệu: $\alpha=2009, \alpha\in\mathbb{R}, \alpha>1$.

Đặt: $x_n=\ln u_n-\ln v_n, n=0, 1, 2, \ldots.$

Ta có: $\dfrac{u_{n+2}}{v_{n+2}}=\sqrt[\alpha]{\dfrac{u_n}{v_n}.\left(\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\right)^{\alpha-1}}$

suy ra: $\ln\left(\dfrac{u_{n+2}}{v_{n+2}}\right)=\dfrac{1}{\alpha}.\ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)+\dfrac{\alpha-1}{\alpha}.\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\right)$

Tức là: $x_{n+2}=\dfrac{\alpha-1}{\alpha}.x_{n+1}+\dfrac{1}{\alpha}.x_n$ với mọi: $n=0, 1, 2, \ldots$

Chú ý: $x_0=\ln(\alpha-1), x_1=\ln\alpha$.

Chứng minh bằng quy nạp theo $n=0, 1, 2, \ldots.$ ta có : $x_n=A+B.\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)^n$ (1)

trong đó : $A=\dfrac{1}{\alpha+1}.\ln\left[(\alpha-1).\alpha^{\alpha}\right], B=\dfrac{\alpha}{\alpha+1}.\ln\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)$

(Chúng ta dùng phương trình đặc trưng của dãy số (x_n) để tìm ra công thức trên)

Tương tự: Đặt: $y_n=\ln u_n+\ln v_n, n=0, 1, 2, \ldots.$

Ta có: $u_{n+2}.v_{n+2}=\sqrt[\alpha]{\dfrac{u_n.v_n}{\left(u_{n+1}.v_{n+1}\right)^{\alpha-1}}}$,

suy ra: $\ln\left(u_{n+2}.v_{n+2}\right)=\dfrac{1}{\alpha}.\ln\left(u_n.v_n\right)-\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\ln\left(u_{n+1}.v_{n+1}\right)$

tức là: $y_{n+2}=\dfrac{1}{\alpha}y_n-\dfrac{\alpha-1}{\alpha}y_{n+1}$ với mọi $n=0, 1, 2, \ldots$

Chú ý: $y_0=\ln(\alpha-1), y_1=\ln\alpha$. Chứng minh bằng quy nạp theo $n=0, 1, 2, \ldots$

$$y_n=C(-1)^n+D.\frac{1}{\alpha^n} \text{ trong đó:}$$

$C=\dfrac{1}{\alpha+1}.\ln\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha^{\alpha}}\right), D=\dfrac{1}{\alpha+1}.\ln\left[\alpha(\alpha-1)\right]$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\ln u_n-\ln v_n\right)=A, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\ln u_{2n}+\ln v_{2n}\right)=C$$

và: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\ln u_{2n+1}+\ln v_{2n+1}\right)=-C$

Do đó:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_{2n} = \dfrac{A+C}{2} = \dfrac{1}{2(\alpha+1)}\left[\ln\left((\alpha-1).\alpha^{\alpha}\right) + \ln\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha^{\alpha}}\right)\right]$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\ln(\alpha-1) = \ln\sqrt[2010]{2008}$$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_{2n+1} = \dfrac{A-C}{2} = \dfrac{1}{\alpha+1}\ln\left(\alpha^{\alpha}\right) = \ln\sqrt[2010]{2002^{2009}}$

Do vậy nên : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \sqrt[2010]{2008}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \sqrt[2010]{2009^{2009}}$,

$$\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \frac{1}{\sqrt[2010]{2002^{2009}}}, \lim_{n\to+\infty} v_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt[2010]{2008}}$$

Câu 6: Từ (1) lần lượt thay x bởi ax, a^2x ,... , a^nx ta nhận được:

$$f(x) - 2f(ax) + f(a^2x) = x^2;$$

$$f(ax) - 2f(a^2x) + f(a^3x) = a^2x^2 ;$$

$$f(a^2x) - 2f(a^3x) + f(a^4x) = a^4x^2 ;$$

...

$$f(a^nx) - 2f(a^{n+1}x) + f(a^{n+2}x) = a^{2n}x^2$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên và sử dụng giả thiết $a \in (0; 1)$, ta thu được:

$$f(x) - f(ax) - f(a^{n+1}x) + f(a^{n+2}x) = \frac{1-a^{2(n+1)}}{1-a^2}x^2 \quad (2)$$

Nhận xét rằng: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-a^{2(n+1)}}{1-a^2} = \dfrac{1}{1-a^2}$

Theo giả thiết, ứng với mỗi x cho trước, ta đều có:

$$\lim_{n\to\infty} f(a^{n+1}x) = f(0) \text{ và } \lim_{n\to\infty} f(a^{n+2}x) = f(0)$$

Vậy nên từ (2) suy ra: $f(x) - f(ax) = \dfrac{x^2}{1-a^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$

Tiếp theo, từ (3) lần lượt thay x bởi: ax, a^2x, …, a^nx, ta nhận được:

$$f(x) - f(ax) = \frac{1}{1-a^2}x^2;$$

$$f(ax) - f(a^2x) = \frac{a^2}{1-a^2}.x^2$$

…

$$f(a^nx) - f(a^{n+1}x) = \frac{a^{2n}}{1-a^2}x^2$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên và sử dụng giả thiết $a \in (0; 1)$, ta thu được:

$$f(x) - f\left(a^{n+1}x\right) = \frac{1 - a^{2(n+1)}}{\left(1-a^2\right)^2}x^2$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \to \infty$ ta thu được: $f(x) = \dfrac{x^2}{\left(1-a^2\right)^2} + b$ với $b \in \mathbb{R}$.

Thử lại, ta thấy hàm số: $f(x) = \dfrac{x^2}{\left(1-a^2\right)^2} + b$, với $b \in \mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện của bài toán.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH ĐỒNG THÁP
TRƯỜNG THPT THỊ XÃ CAO LÃNH

Câu 1: Xét hàm số $f(x) = 64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3$ trên $\mathbb{R}$

Trước hết ta chứng minh phương trình (1) có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$.

Do f là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$ nên ta chỉ cần chứng minh f có 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$. Thật vậy:

Do $f(0).f(\frac{1}{2}) = (-3).1 < 0$; $f(\frac{1}{2}).f(\frac{3}{4}) = 1.\left(-\frac{111}{64}\right) < 0$

và $f(\frac{3}{4})f(1) = \left(-\frac{111}{64}\right).1 < 0$

Nên phương trình (1) có ba nghiệm thực thuộc khoảng $(0;1)$. Suy ra phương trình (1) có đúng 6 nghiệm thực (do (1) là phương trình đa thức bậc 6) thuộc khoảng $(-1;1)$.

Đặt $x = \cos t$, với $t \in (-\pi; \pi)$, phương trình (1) trở thành

$$64\cos^6 t - 96\cos^4 t + 36\cos^2 t - 3 = 0 \quad (2)$$

Ta lại có: $\cos 6t = 4\cos^3 2t - 3\cos 2t = 4\left(2\cos^2 t - 1\right)^3 - 3\left(2\cos^2 t - 1\right)$

$$= 32\cos^6 t - 48\cos^4 t + 18\cos^2 t - 1$$

Nên: $(2) \Leftrightarrow 2\cos 6t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 6t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6t = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow t = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}(k \in \mathbb{Z})$$

Do $t \in (-\pi;\pi)$ nên ta chọn $t \in \left\{\frac{\pi}{18};\frac{5\pi}{18};\frac{7\pi}{18};\frac{11\pi}{18};\frac{13\pi}{18};\frac{17\pi}{18}\right\}$

Vậy phương trình (1) có 6 nghiệm là

$$x \in \left\{\cos\frac{\pi}{18};\cos\frac{5\pi}{18};\cos\frac{7\pi}{18};\cos\frac{11\pi}{18};\cos\frac{13\pi}{18};\cos\frac{17\pi}{18}\right\}$$

Câu 2:

Nhận thấy x và y là các số nguyên không âm và $\sqrt{11296320} = 2^3.41.\sqrt{105}$ là số vô tỉ.

Phương trình đã cho có thể viết lại:

$$(x+y)^2 + 4xy - 3361 = 4(x+y)\sqrt{xy} - 328\sqrt{105} \quad (1)$$

Vế trái của (1) là số hữu tỉ nên điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm nguyên là cả hai vế của (1) đều bằng không.

Khi đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x+y)^2 + 4xy - 3361 = 0\\ 4(x+y)\sqrt{xy} - 328\sqrt{105} = 0\end{cases}$

Đặt: S = x + y, P = xy ta được hệ: $\begin{cases}S^2 + 4P - 3361 = 0 & (2)\\ S\sqrt{P} = 82\sqrt{105} & (3)\end{cases}$

Từ (3) ta rút ra được: $P = \frac{82^2.105}{S^2}$. Thay vào (2) và thu gọn được:

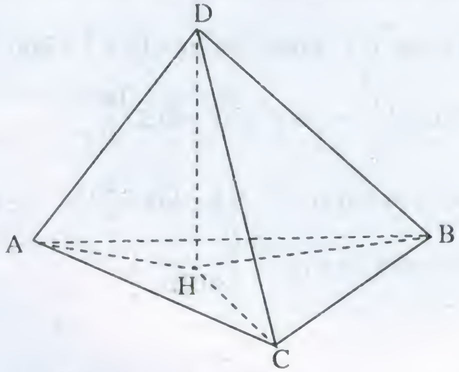
$S^4 - 3361.S^2 + 4.82^2.105 = 0 \Leftrightarrow S^2 = 1681$ hoặc $S^2 = 1680 = 41^2$

Từ đó ta được: S = 41 và P = 420.

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình: $t^2 - 42t + 420 = 0 \Leftrightarrow t = 20$ hoặc $t = 21$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là (20; 21); (21; 20).

Câu 3:



Đặt: $T = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos^2\gamma} + \frac{\cos\beta + \cos\gamma}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos\gamma + \cos\alpha}{\cos^2\beta}$

và $x = \cos\alpha, y = \cos\beta, z = \cos\gamma$, ta có: $x = \frac{DH}{DA}, y = \frac{DH}{DB}; z = \frac{DH}{DC}$

Ta được: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

(vì trong tứ diện ABCD vuông ở D ta có hệ thức: $\frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DB^2} + \frac{1}{DC^2} = \frac{1}{DH^2}$)

trong đó $0 < x,y,z < 1$ do đó các góc α, β, γ đều nhọn. Ta có:

$$(x+y+z)T = (x+y+z)\left(\frac{y+z}{x^2} + \frac{z+x}{y^2} + \frac{x+y}{z^2}\right)$$

$$= \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} + \left(\frac{y+z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z+x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{z}\right)^2$$

$$\geq \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}\right)^2$$

$$\geq 2 + 2 + 2 + \frac{1}{3} \cdot 6^2 = 18 \quad (1) \text{ (theo BĐT Cauchy–Bunhiacôpski)}$$

Mặt khác, cũng theo BĐT Cauchy, thì: $0 < x + y + z \leq \sqrt{3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} = \sqrt{3}$ (2)

Từ các BĐT (1) và (2) ta được: $T \geq \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$

$\Leftrightarrow DA = DB = DC \Leftrightarrow$ Tứ diện ABCD vuông cân ở D.

Câu 4: Đặt $a = \tan\alpha, c = \tan\beta$, ta có: $b = \frac{a+c}{1-ac} = \tan(\alpha+\beta)$.

Vì a, b, c > 0 nên có thể xem $\alpha > 0, \beta > 0$ và $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, khi đó:

$$P = \frac{2}{1+a^2} - \frac{2}{1+b^2} + \frac{3}{1+c^2} = 2\cos^2\alpha - 2\cos^2(\alpha+\beta) + 3\cos^2\beta$$

$$= \cos2\alpha - \cos2(\alpha+\beta) + \cos^2\beta = 2\sin\beta.\sin(2\alpha+\beta) + 3 - 3\sin^2\beta$$

$$= \frac{10}{3} - 3\left[\sin\beta - \frac{1}{3}\sin(2\alpha+\beta\right]^2 - \frac{1}{3}\cos^2(2\alpha+\beta) \leq \frac{10}{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \cos(2\alpha+\beta) = 0 \\ \sin\beta = \frac{1}{3}\sin(2\alpha+\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta = \frac{\pi}{2} \\ \sin\beta = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Suy ra: $\begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ b = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ c = \sqrt{2} \end{cases}$. Vậy: $\text{MaxP} = \frac{10}{3}$

Câu 5: Ta có : $S_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+2}}\left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + ... + \frac{2^n}{n} + \frac{2^{n+1}}{n+1}\right)$

$$= \frac{n+2}{2(n+1)}.\frac{n+1}{2^{n+1}}\left(\frac{2^1}{1} + \frac{2^2}{2} + ... + \frac{2^n}{n}\right) + \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}(S_{n+1} + 1).$$

Tương tự : $S_{n+2} = \frac{n+3}{2(n+2)}(S_{n+1} + 1)$

Từ đó : $S_{n+2} - S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)(S_{n+1}+1) + (n+2)(n+2)(S_n + 1)}{2(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{(n^2 + 4n + 3)(S_{n+1} - S_n) - S_n - 1}{2(n+1)(n+2)}$$

Suy ra rằng nếu $S_{n+1} - S_n \le 0$ thì cả $S_{n+2} - S_{n+1} \le 0$, do $S_n > 0$.

Việc tính toán trực tiếp sẽ cho ta các kết quả:

$$S_1 = 1, S_2 = \frac{3}{2}, S_3 = \frac{5}{3}, S_4 = \frac{5}{3}, S_4 - S_3 \le 0$$

Quy nạp theo n ta kết luận rằng dãy $S_4, S_5...$ giảm dần.

Vì $S_n > 0$ với mọi n nên S_n bị chặn.

Suy ra: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ tồn tại. Ký hiệu giới hạn đó là S.

Từ $S_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)}(S_n + 1)$

Cho n tiến tới vô cùng trong cả hai vế ta được: $S = \frac{1}{2}(S+1) \Leftrightarrow S = 1$.

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$.

Câu 6: Với $x = 0$ ta có $f^2(1) = f^3(1) \Rightarrow f(1) = 0$ hoặc $f(1) = -1$

Lấy đạo hàm hai vế của (*) ta được:

$$4f(1+2x).f'(1+2x) = 1 + 3f^2(1-x).f'(1-x)$$

Với $x = 0$ ta có: $4f(1).f'(1) = 1 + 3f^2(1).f'(1)$

Vì $f(1) \ne 0$ nên $f(1) = -1$.

Suy ra $f'(1) = -\frac{1}{7}$.

Do đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$y = -\frac{1}{7}(x-1) - 1 \Leftrightarrow x + 7y + 6 = 0.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH BẾN TRE
TRƯỜNG THPT CHUYÊN BẾN TRE

Câu 1: Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+z^2+1}+\dfrac{1}{y^2+x^2+1}+\dfrac{1}{z^2+y^2+1}=1 \\ xyz=1 \end{cases}$$

Đặt $x^2=a^3;\ y^2=b^3;\ z^2=c^3$ ta có $a;b;c\ge 0$ và $abc=1$

Ta có : $(a+b)(a-b)^2\ge 0 \Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2)+abc\ge (a+b)ab+abc$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+1\ge ab(a+b+c)\Leftrightarrow \frac{1}{a^3+b^3+1}\le\frac{c}{a+b+c}$$

Tương tự ta có :

$$\frac{1}{b^3+c^3+1}\le\frac{a}{a+b+c}\ ;\ \frac{1}{c^3+a^3+1}\le\frac{b}{a+b+c}$$

Do đó ta có :

$$\frac{1}{x^2+z^2+1}+\frac{1}{y^2+x^2+1}+\frac{1}{z^2+y^2+1}\le\frac{c+a+b}{a+b+c}=1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2=z^2 \\ xyz=1 \end{cases}$

Vậy hệ có 4 nghiệm là:

$(1;1;1), (-1;-1;1), (-1;1;-1), (1;-1;-1)$

Câu 2: * Nếu $x\equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow y\equiv 1 \pmod 3$.

Phương trình đã cho trở thành: $(3m)^3+3(3m)^4+10(3n+1)^3-16=0$.

$\Leftrightarrow 9k=15$: Phương trình không có nghiệm nguyên

* Nếu $x\equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow y\equiv 0 \pmod 3$.

Phương trình đã cho trở thành: $(3m+1)^3+3(3m+1)^4+10(3n)^3-16=0$

$\Leftrightarrow 9k=12$: Phương trình không có nghiệm nguyên

* Nếu $x\equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow y\equiv -1 \pmod 3$.

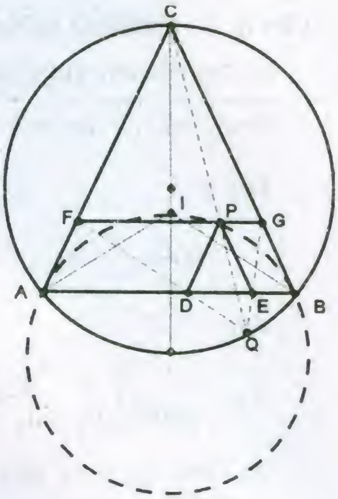
Phương trình đã cho trở thành: $(3m-1)^3+3(3m-1)^4+10(3n-1)^3-16=0$.

$\Leftrightarrow 9k=15$: Phương trình không có nghiệm nguyên

Vậy: Phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Câu 3: Các tam giác PDE và CGF vị tự, do đó các đường thẳng FD, GE và CP cắt nhau tại một điểm.

Gọi Q là giao điểm của đường thẳng CP và đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta cần chứng minh Q nằm trên các đường thẳng GE và FD.



Vì $\widehat{CFG} = \widehat{CBA} = \widehat{CQA}$ nên tứ giác AQPF nội tiếp đường tròn. Tương tự, BQPG là tứ giác nội tiếp.

Hơn nữa, hình thang cân BDPG cũng nội tiếp đường tròn, kéo theo B, Q, D, P, G nằm trên một đường tròn.

Do đó ta được: $\widehat{PQF} = \widehat{PAC}$, $\widehat{PQD} = \widehat{PBA}$ (1)

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC, ta có:

$$\widehat{CAI} = \frac{1}{2}\widehat{CAB} = \frac{1}{2}\widehat{CBA} = \widehat{IBA}.$$

Do đó CA là tiếp tuyến tại A với đường tròn ngoại tiếp ΔAIB.

Điều này dẫn đến $\widehat{PAC} = \widehat{PBA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{PQF} = \widehat{PQD}$ hay F, D, Q thẳng hàng.

Tương tự, G, E, Q cũng thẳng hàng, ta có điều cần chứng minh.

Câu 4: Đặt $x = a + b - c$, $y = b + c - a$, $z = c + a - b$.

Ta có $x, y, z > 0$ và $x + y + z = a + b + c = 2010$.

Suy ra $(x + y)(x + z) = 4ab$; $(y + z)(y + x) = 4bc$; $(z + x)(z + y) = 4ac$.

Bất đẳng thức trên tương đương với:

$$\frac{4ab}{2(1005-c)} + \frac{4bc}{2(1005-a)} + \frac{4ca}{2(1005-b)} \geq 8040$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)(x+z)}{x} + \frac{(y+z)(y+x)}{y} + \frac{(z+x)(z+y)}{z} \geq 4(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+y+z)+yz}{x} + \frac{y(x+y+z)xz}{y} + \frac{z(x+y+z)xy}{z} \geq 4(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} \geq x+y+z$$

Không giảm tính tổng quát, có thể giả sử: $x \geq y \geq z > 0$

Khi đó $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{z}$ và $yz \leq zx \leq xy$.

Áp dụng bất đẳng thức Chebysev ta có:

$$\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{xy}{z} \geq \frac{yz}{y} + \frac{xz}{z} + \frac{xy}{x} = x+y+z.$$

Vậy bất đẳng thức đúng.

Câu 5: Từ giả thiết (ii) suy ra dãy (u_n) tăng ; $u_n \geq u_1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó, nếu dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn l thì l phải là số dương.

Nhưng từ (ii) suy ra $l = 2009l^2 + l \Leftrightarrow l = 0$ mâu thuẫn. Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Ta có:

$$2009{u_k}^2 = u_{k+1} - u_k \Leftrightarrow \frac{2009{u_k}^2}{u_k.u_{k+1}} = \frac{u_{k+1} - u}{u_k.u_{k+1}} \Leftrightarrow \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{1}{2009}\left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}\right).$$

Vậy:

$$v_n = \frac{1}{2009}\left[\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right) + \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right)\right] = \frac{1}{2009}\left(2009 - \frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

Do $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ nên $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

Câu 6: Đặt $t = 6x \Leftrightarrow x = \frac{t}{6}$. Ta có: $f(\frac{2}{3}t) + f(\frac{3}{2}t) = 2f(t), \forall t \in \mathbb{R}$,

hay $f(\frac{2}{3}t) - f(t) = f(t) - f(\frac{3}{2}t), \forall t \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số $g(t) = f(t) - f(\frac{3}{2}t)$.

Ta có : $g(\frac{2}{3}t) = g(t), \forall t \in \mathbb{R}$ (1)

Từ (1), bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$g(t) = g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n t\right), \forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \ (2)$$

Do $f(x)$ liên tục suy ra $g(x)$ liên tục, từ (2) cho $n \to +\infty$, ta được:

$g(t) = g(0) = f(0) - f(0) = 0$

Từ đó: $f(t) = f(\frac{3}{2}t), \forall t \in \mathbb{R}$ hay $f(\frac{2}{3}x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (3)

Từ (3), bằng quy nạp ta chứng minh được:

$$f(x) = f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n x\right), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (4)$$

Do hàm số $f(x)$ liên tục nên từ (4) cho $n \to +\infty$, ta được:

$f(x) = f(0) = 2009$.

Thử lại thấy đúng.

Vậy: $f(x) = 2009, \forall x \in \mathbb{R}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH HẬU GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN VỊ THANH

Câu 1: Đặt: $x = \cos\alpha\,; y = \cos\beta,\ 0 \le \alpha, \beta \le \pi$ khi đó hệ có dạng:

$$\begin{cases}\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha = 1\\ \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha = \dfrac{1}{2}\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}\sin(\beta+\alpha) = 1\\ \sin(\beta-\alpha) = \dfrac{1}{2}\end{cases}$$

do vậy: $$\begin{cases}\beta+\alpha = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\\ \beta-\alpha = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện của α, β ta được: $$\begin{cases}\beta+\alpha = \dfrac{\pi}{2}\\ \beta-\alpha = \dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm: $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}; y = \dfrac{1}{2}$.

Câu 2: Giả sử $n^2 + n + 1 = p_1p_2p_3p_4$, trong đó $p_1; p_2; p_3; p_4$ là bốn số nguyên tố và $p_1 \le p_2 \le p_3 \le p_4$.

Do $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ là số lẻ nên suy ra $p_1; p_2; p_3; p_4$ là các số nguyên tố lẻ, tức $p_1 \ge 3$.

Do $n(n+1)$ có tận cùng là 0, hoặc 2, hoặc 6 nên $n^2 + n + 1$ có tận cùng là 1, hoặc 3, hoặc 7. Như vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 5. Từ đó suy ra $p_i \ne 5, \forall i = 1, 2, 3, 4$

+ Nếu $p_1 = 3 \Rightarrow n^2 + n + 1 = 3p_2p_3p_4 \,\vdots\, 3 \Rightarrow n = 3k + 1\,(k \in \mathbb{N})$.

Khi đó ta có: $(3k+1)^2 + (3k+1) + 1 = 3p_2p_3p_4 \Rightarrow 3k^2 + 3k + 1 = p_2p_3p_4$

$\Rightarrow p_2p_3p_4$ không chia hết cho 3 $\Rightarrow p_2$ không chia hết cho 3.

Mặt khác p_2 không chia hết cho 5 nên $p_2 \ge 5$.

+ Nếu $p_2 = 7$, ta có $3k^2 + 3k + 1 = 7p_3p_4 \,\vdots\, 7 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}k = 7t+1\\ k = 7t+5\end{array}\right.(t \in \mathbb{N})$

Vì n bé nhất nên ta chọn $k = 7t + 1$.

Với $k = 7t + 1$, $21t^2 + 9t + 1 = p_3p_4$.

Chọn $p_3 = 7$, ta có $21t^2 + 9t + 1 = 7p_4 \,\vdots\, 7 \Rightarrow t = 7m + 3\,(m \in \mathbb{N})$.

Từ đó ta được:

$$n = 3k + 1 = 3(7t+1) + 1 = 3\left[7(7m+3)\right] + 1 = 147m + 67, m \in \mathbb{N}$$

Do n bé nhất nên ta chọn $m = 0 \Rightarrow n = 67$.

Khi $n = 67$ ta có $n^2 + n + 1 = 67^2 + 67 + 1 = 3.7.7.31$.

Vậy n = 67 là số nguyên dương bé nhất thoả mãn điều kiện bài toán.

Nói cách khác, ta luôn có $n \geq 67$ trong đó n là số nguyên dương có tính chất $n^2 + n + 1$ có thể phân tích thành tích 4 số nguyên tố.

Câu 3: a. Gọi ABC là thiết diện qua trục của hình nón ⇒ ABC là tam giác đều.

Thiết diện cắt hình cầu S_1 theo 1 đường tròn nội tiếp ΔABC tâm O_1 bán kính r, tiếp xúc BC tại H.

Tính được $BH = r_1\sqrt{3}; AH = 3r_1$.

Tính được $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$, $V = \frac{1}{3}\pi.3r_1^2.3r_1 = 3\pi r_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{4}{9}$

b. Ta chứng minh cho trường hợp có n hình cầu. Mặt phẳng (ABC) cắt hình cầu (S_2) theo giao tuyến là đường tròn tâm O_2 và có bán kính r_2.

Mặt phẳng (ABC) cắt hình cầu (S_n) theo giao tuyến là đường tròn tâm O_n và có bán kính r_n.

Ta chứng minh được $r_2 = \frac{1}{3}r_1, r_3 = \frac{1}{3}r_2, ..., r_n = \frac{1}{3}r_{n-1}$

Suy ra: $V_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V_1, V_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V_2, ..., V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V_{n-1}$

Ta được cấp số nhân $V_1, V_2, ..., V_n$ với cộng bội $q = \frac{1}{3^3}$

Do đó:

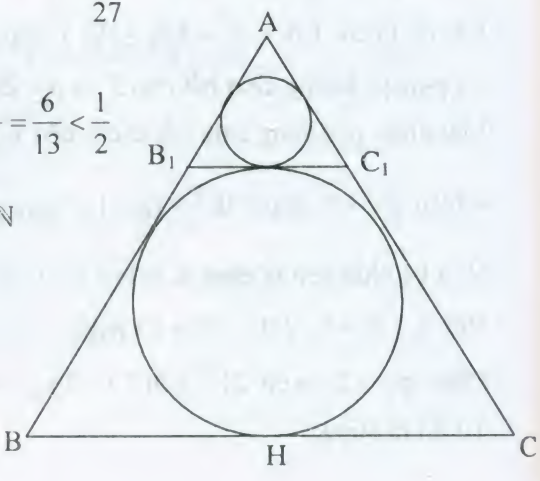
$$V_1 + V_2 + ... + V_n = V_1.\frac{1 - \frac{1}{3^{3n}}}{1 - \frac{1}{27}} = \frac{4}{3}\pi r_1^3.\frac{1 - \frac{1}{3^{3n}}}{1 - \frac{1}{27}} = \frac{18\pi r_1^3}{13}\left(1 - \frac{1}{3^{3n}}\right) < \frac{18}{13}\pi r_1^3$$

Suy ra: $\frac{V_1 + V_2 + ... + V_n}{V} < \frac{18\pi r_1^3}{13.3\pi r_1^3} = \frac{6}{13} < \frac{1}{2}$

Do đó $V_1 + V_2 + ... + V_n < \frac{V}{2}; \forall n \in \mathbb{N}$

Vậy bất đẳng thức cũng đúng với n = 2009, nghĩa là ta có:

$V_1 + V_2 + ... + V_{2009} < \frac{1}{2}V$



Câu 4:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{(1+x)^3}{yz}+(1+x)+y+z\geq 4(x+1);\ \frac{(1+y)^3}{xz}+(1+y)+x+z\geq 4(y+1);$$

$$\frac{(1+z)^3}{xy}+(1+z)+x+y\geq 4(z+1).$$

Cộng theo vế ta được:

$$\frac{(1+x)^3}{yz}+\frac{(1+x)^3}{yz}+\frac{(1+x)^3}{yz}\geq 9+x+y+z\geq 9+3\sqrt[3]{xyz}=12$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là 12.

Câu 5: Với $x=0, y=t-\pi$: Theo tính chất b, ta có:

$$2f(t-\pi)+9f(\pi-t)=1969.\cos(t-\pi)=-1969.\cos t \qquad (1)$$

Với $x=\frac{\pi}{2}, y=t-\frac{\pi}{2}$: Theo tính chất b, ta có:

$$2f(t)+9f(\pi-t)=2008.\cos(t-\frac{\pi}{2})=2008.\sin t \qquad (2)$$

Với $x=t-\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{2}$: Theo tính chất b, ta có:

$$2f(t)+9f(t-\pi)=f(t-\frac{\pi}{2}).\cos\frac{\pi}{2}=0 \qquad (3)$$

Từ (1), (2) cho ta: $2f(t)-2f(t-\pi)=1969.\cos t+2008.\sin t$

Kết hợp với (3), ta được: $f(t)=\frac{9}{22}(1969\cos t+2008\sin t)$

Như vậy hàm số cần tìm là $f(x)=\frac{9}{22}(1969\cos x+2008\sin x)$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH AN GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU

Câu 1: Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}\geq 0 \\ v=\sqrt{\dfrac{x-y}{2}}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u^2=x+y \\ 2v^2=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=u^2+v^2 \\ y=u^2-v^2 \end{cases}$

Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}\dfrac{2(u^2+v^2)(u^2-v^2)+(u^2-v^2)\sqrt{4u^2v^2}}{14}=u+v\\ u^3+v^3=9\\ u\ge 0\\ v\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u+v)(u^3-v^3-7)=0\\ u^3+v^3=9\\ u\ge 0\\ v\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=0\\ u^3+v^3=9\\ u\ge 0\\ v\ge 0\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}u^3-v^3=7\\ u^3+v^3=9\\ u\ge 0\\ v\ge 0\end{cases}\text{ (vô nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u^3=8\\ v^3=1\\ u\ge 0\\ v\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2\\ v=1\end{cases}$$. Vậy phương trình có 1 nghiệm (5;3)

Câu 2: a) Với n chẵn, ta có: $(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i$ (1);

$$(a-b)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(-1)^i a^{n-i}b^i \quad (2)$$

Cộng vế theo vế của (1) và (2) ta được: $(a+b)^n+(a-b)^n=2\sum_{i=0}^{n/2}C_n^{2i}a^{n-2i}b^{2i}$

Do đó: $C_{2n}^0+3C_{2n}^2+...+3^iC_{2n}^{2i}+...+3^nC_{2n}^{2n}=\sum_{i=0}^{n}3^iC_{2n}^{2i}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n}\right]=\frac{1}{2}\left[\left(4+2\sqrt{3}\right)^{n}+\left(4-2\sqrt{3}\right)^{n}\right]$$

$$=2^{n-1}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}\right]=2^n\sum_{i=0}^{n/2}C_n^{2i}3^i2^{n-2i}$$

hay 2^n chia hết $C_{2n}^0+3C_{2n}^2+...+3^iC_{2n}^{2i}+...+3^nC_{2n}^{2n}$

b) Xét dãy số (u_i) với $u_i=C_{2n+i}^n.C_{2n-i}^n$, với i = 0, 1, 2..., k,… n

Ta có: $u_0=(C_{2n}^n)^2$, $u_k=C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n$

Ta sẽ chứng minh (u_i) là dãy giảm. Thật vậy:

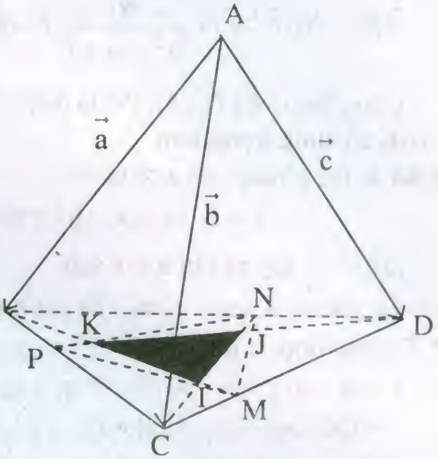
Với $i\ge 1$, xét $u_i\le u_{i-1}\Leftrightarrow\dfrac{(2n+i)!}{n!(n+i)!}.\dfrac{(2n-i)!}{n!(n-i)!}\le\dfrac{(2n+i-1)!}{n!(n+i-1)!}.\dfrac{(2n-i+1)!}{n!(n-i+1)!}$

$$\Leftrightarrow (2n+i)(n-i+1) \le (2n-i+1)(n+i) \Leftrightarrow (2i-1).n \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Do đó $u_k \le u_{k-1} \le .... \le u_1 \le u_0$ mà $u_0 = (C_{2n}^n)^2$, $u_k = C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n$

hay $C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \le \left(C_{2n}^n\right)^2$

Câu 3



Ta cần chứng minh:

$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{PK} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{PK} = \vec{0}$

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Ta có: $\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CI}$

$= -\alpha\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CI} = -\alpha(\vec{c} - \vec{b}) + \overrightarrow{CI}$ (1)

Áp dụng định lý Mê–nê–la–uyt vào tam giác CDN, ứng với 3 điểm thẳng hàng M,I,B ở trên 3 cạnh của tam giác, ta có:

$$\frac{\overline{IC}}{\overline{IN}}.\frac{\overline{BN}}{\overline{BD}}.\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}} = +1 \Leftrightarrow \frac{\overline{IC}}{\overline{IN}}.\frac{\overline{BD}+\overline{DN}}{\overline{BD}}.\frac{\overline{CD}-\overline{CM}}{\overline{MC}} = +1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{IC}}{\overline{IN}}.\left(1 - \frac{\overline{DN}}{\overline{DB}}\right).\left(\frac{\overline{CD}}{\overline{MC}} + 1\right) = +1 \qquad (2)$$

Từ giả thiết $\overrightarrow{CM} = \alpha\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DN} = \alpha\overrightarrow{DB}$, ta được:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{MC}} = -\frac{1}{\alpha}; \frac{\overline{DN}}{\overline{DB}} = \alpha \qquad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta có: $\frac{\overline{IC}}{\overline{IN}}.(1-\alpha).\left(-\frac{1}{\alpha} + 1\right) = +1 \Leftrightarrow \frac{\overline{IC}}{\overline{IN}} = \frac{-\alpha}{(\alpha-1)^2}$

$$\Leftrightarrow (\alpha-1)^2.\overline{IC} = -\alpha\left(\overline{IC} + \overline{CN}\right) \Leftrightarrow \left[(\alpha-1)^2 + \alpha\right]\overline{IC} = -\alpha\overline{CN}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha^2 - \alpha + 1).\overrightarrow{IC} = -\alpha\overrightarrow{CN} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \alpha + 1}\overrightarrow{CN} \qquad (4)$$

Thay (4) vào (1) ta được: $\overrightarrow{MI} = -\alpha(\vec{c} - \vec{b}) + \frac{\alpha}{\alpha^2 - \alpha + 1}\overrightarrow{CN}$ (5)

Lại có:

$$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = (\vec{c} - \vec{b}) + \alpha\overrightarrow{DB} = (\vec{c} - \vec{b}) + \alpha(\vec{a} - \vec{c}) \qquad (6)$$

Thay (6) vào (5) ta được:

$$\overrightarrow{MI} = -\alpha(\vec{c} - \vec{b}) + \frac{\alpha}{\alpha^2 - \alpha + 1}(\vec{c} - \vec{b}) + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \alpha + 1}(\vec{a} - \vec{c}) \qquad (7)$$

Tương tự ta có:

$$\vec{NJ} = -\alpha(\vec{a}-\vec{c}) + \frac{\alpha}{\alpha^2-\alpha+1}(\vec{a}-\vec{c}) + \frac{\alpha^2}{\alpha^2-\alpha+1}(\vec{b}-\vec{a}) \qquad (8);$$

$$\vec{PK} = -\alpha(\vec{b}-\vec{a}) + \frac{\alpha}{\alpha^2-\alpha+1}(\vec{b}-\vec{a}) + \frac{\alpha^2}{\alpha^2-\alpha+1}(\vec{c}-\vec{b}) \qquad (9);$$

Cộng theo vế (7), (8), (9) ta được: $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NJ} + \overrightarrow{PK} = \vec{0} \Leftrightarrow$ Hai tứ diện AMNP và AIJK có cùng trọng tâm

Câu 4: Để ý rằng với $a<b$ ta có:

$$T = |x-a| + |x-b| \geq |(x-a) - (x-b)| = |b-a| = b-a$$

Dấu "=" xảy ra khi $a \leq x \leq b$

Ta giả sử: $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Ta xét hai trường hợp:

* Trường hợp 1: $n = 2m$

$y = |x-a_1| + |x-a_2| + \ldots + |x-a_n|$

$= (|x-a_1| + |x-a_{2m}|) + (|x-a_2| + |x-a_{2m-1}|) + \ldots + (|x-a_m| + |x-a_{m+1}|)$

$\geq (a_{2m} - a_1) + (a_{2m-1} - a_2) + \ldots + (a_{m+1} - a_m)$

$\geq -(a_1 + a_2 + .. + a_m) + (a_{2m} + a_{2m-1} + \ldots + a_{m+1})$

Lại có: $(a_m;a_{m+1}) \subset (a_{m-1};a_{m+2}) \subset \ldots \subset (a_1;a_{2m})$

Nên dấu "=" xảy ra khi $a_m \leq x \leq a_{m+1}$

Vậy $\min y = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + (a_{2m} + a_{2m-1} + \ldots + a_{m+1})$

* Trường hợp 2: $n = 2m + 1$

$y = |x-a_1| + |x-a_2| + \ldots + |x-a_n|$

$= (|x-a_1| + |x-a_{2m+1}|) + (|x-a_2| + |x-a_{2m}|) + \ldots + (|x-a_m| + |x-a_{m+2}|) + |x-a_{m+1}|$

$\geq (a_{2m+1} - a_1) + (a_{2m} - a_2) + \ldots + (a_{m+2} - a_m) + |x-a_{m+1}|$

$\geq -(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + (a_{2m+1} + a_{2m} + \ldots + a_{m+2}) + |x-a_{m+1}|$

$\geq -(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + (a_{2m+1} + a_{2m} + \ldots + a_{m+2}) + 0$

Dấu "=" xảy ra khi $x = a_{m+1}$

Vậy $\min y = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + (a_{2m+1} + a_{2m} + \ldots + a_{m+2})$

Câu 5: a) Ta có: $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}.u_n}{3u_{n+1} + 2u_n + u_{n+1}.u_n} \Rightarrow \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{3}{u_n} + \frac{2}{u_{n+1}} + 1$$

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{4}$. Suy ra (v_n) là dãy số xác định bởi $\begin{cases} v_0 = \frac{5}{4} \\ v_1 = \frac{9}{4} \\ v_{n+2} = 3v_n + 2v_{n+1} \end{cases}$

$\Rightarrow v_n = \alpha.r_1^n + \beta.r_2^n$ $(n \in \mathbb{N})$ với r_1, r_2 là hai nghiệm của phương trình đặc trưng

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \ (r_1 = -1,\ r_2 = 3)$$

$$\Rightarrow v_n = \alpha(-1)^n + \beta.3^n \ (n \in \mathbb{N})$$

Do $\begin{cases} v_0 = \dfrac{5}{4} \\ v_1 = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{5}{4} \\ -\alpha + 3\beta = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{3}{8} \\ \beta = \dfrac{7}{8} \end{cases} \Rightarrow v_n = \dfrac{3}{8}(-1)^n + \dfrac{7}{8}3^n \ (n \in \mathbb{N})$

$$\Rightarrow u_n = \frac{8}{3(-1)^n + 7.3^n - 2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

b) $\lim(u_n.3^n) = \lim \dfrac{8}{3\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n + 7 - 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n} = \dfrac{8}{7}$

Câu 6: Cho $y = 0 \Rightarrow f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

Mà $f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$

$$f(x - y) = f(x + (-y)) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y)$$

Khi $x \neq 0$ và $x \neq 1$, ta có:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) = f\left(1 - \frac{x}{1-x}\right) = f(1) + f\left(\frac{x}{1-x}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{\dfrac{1-x}{x}}\right)$$

$$= 1 + \frac{f\left(\dfrac{1-x}{x}\right)}{\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2} = 1 + \frac{x^2}{(1-x)^2} f\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 1 + \frac{x^2}{(1-x)^2}\left(f\left(\frac{1}{x}\right) - f(1)\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{(1-x)^2}\left(\frac{f(x)}{x^2} - 1\right) = 1 + \frac{f(x)}{(1-x)^2} - \frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{(1-x)^2 + f(x) - x^2}{(1-x)^2} = \frac{1 - 2x + f(x)}{(1-x)^2} \qquad (1)$$

Mặt khác: $f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{f(1-x)}{(1-x)^2} = \dfrac{f(1) - f(x)}{(1-x)^2} = \dfrac{1 - f(x)}{(1-x)^2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $\dfrac{1 - 2x + f(x)}{(1-x)^2} = \dfrac{1 - f(x)}{(1-x)^2}$, $\forall x \neq 0$ và $x \neq 1$

$\Leftrightarrow 1 - 2x + f(x) = 1 - f(x)$ ($x \neq 0$ và $x \neq 1$) $\Leftrightarrow f(x) = x$ ($x \neq 0$ và $x \neq 1$)

Vậy $f\left(\sqrt[3]{2009}\right) = \sqrt[3]{2009}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH VĨNH LONG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM

Câu 1: Tập xác định: $R \setminus \{0;-1\}$

$$2009^{\frac{4+x^2}{x^2}} - 2009^{\frac{34x+4}{x^3+x^2}} = \frac{120-4x^2-4x}{x^2+x}$$

$$\Leftrightarrow 2009^{\frac{4}{x^2}+1} - 2009^{\frac{4}{x^2}+\frac{30}{x^2+x}} = 4\left(\frac{30}{x^2+x}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2009^{\frac{4}{x^2}+1} + 4\left(\frac{4}{x^2}+1\right) = 2009^{\frac{4}{x^2}+\frac{30}{x^2+x}} + 4\left(\frac{4}{x^2}+\frac{30}{x^2+x}\right) \qquad (1)$$

Xét f(t)= $2009^t + 4t$, có f'(t)= $2009^t \ln 2009 + 4$, $\forall t > 0$ tức f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$

Từ (1) suy ra $f\left(\frac{4}{x^2}+1\right) = f\left(\frac{4}{x^2}+\frac{30}{x^2+x}\right) \Leftrightarrow \frac{4}{x^2}+1 = \frac{4}{x^2}+\frac{30}{x^2+x}$

$$\Leftrightarrow x^2+x-30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6 \\ x=5 \end{array}\right. \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{-6;5\}$

Câu 2: Vì vế trái của đẳng thức trên âm khi $n \le 0$ nên ta có thể giả sử $n \ge 1$. Đẳng thức trên có thể viết lại dưới dạng

$(7n-12)3^n + (2n-14)2^n + 24n = 6^n = 3^n 2^n$,

$(2^n - 7n + 12)(3^n - 2n + 14) = 24n + (7n-12)(2n-14) = 14(n-4)(n-3)$.

Bằng qui nạp, ta chứng minh được bất đẳng thức $2^n > 9n - 20$, với mọi $n \ge 5$.

Do đó, với $n \ge 5$ thì: $3^n > 2^n > 9n - 20 > 9n - 35$

Suy ra, với $n \ge 5$ thì:

$2^n - 7n + 12 > 2(n-4) > 0$ và $3^n - 2n + 14 > 7(n-3) > 0$. Do đó

$(2^n - 7n + 12)(3^n - 2n + 14) = 24n + (7n-12)(2n-14) > 14(n-4)(n-3)$

Kiểm tra trực tiếp với $n = 1,2,3,4$, ta nhận được $n = 4$ thỏa điều kiện bài toán.

Vậy $n = 4$.

Câu 3: Giả sử $A_1A_2A_3A_4A_1'A_2'A_3'A_4'$ là khối lập phương đã cho. Khi đó xảy ra hai trường hợp:

a. Ba trong 4 đỉnh có tọa độ nguyên cùng thuộc một mặt. Giả sử đó là A_1,A_2 ,A_3 suy ra $\overrightarrow{A_3A_4} = \overrightarrow{A_2A_1}$ tức A_4 có tọa độ nguyên .

nếu một trong 4 đỉnh A_1', A_2', A_3', A_4' có tọa độ nguyên thì do

$$\overrightarrow{A_1A'_1} = \overrightarrow{A_2A_2'} = \overrightarrow{A_3A'_3} = \overrightarrow{A_4A'_4}$$

Nên các đỉnh còn lại cũng có tọa độ nguyên.

b. Không có 3 đỉnh nào trong 4 đỉnh có tọa độ nguyên cùng thuộc một mặt của hình lập phương.

Do 4 đỉnh không đồng phẳng nên chúng tạo thành các đỉnh của một tứ diện đều có các cạnh là các đường chéo của các mặt của khối lập phương. Giả sử đó là các đỉnh A_1, A_2', A_3, A_4'

Ta có $2\overrightarrow{A_1A_3'} = 2\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_1A_1'}\right)$

$$= \left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_1'}\right) + \left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_4}\right) + \left(\overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_1A_1'}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{A_1A_2'} + \overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_1A_4'}\right)$$

suy ra $2\overrightarrow{A_1A_3'}$ có tọa độ nguyên là (x; y; z)

Đặt $\left(\overrightarrow{A_1A_2'}\right)^2 = \left(\overrightarrow{A_1A_3}\right)^2 = \left(\overrightarrow{A_1A_4'}\right)^2 = a \in \mathbb{Z}$

Ta có $\overrightarrow{A_1A'_2}.\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{A_1A'_2}.\overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{A_1A_3}.\overrightarrow{A_1A_4} = \dfrac{a}{2} = b \in \mathbb{Z}$

Suy ra $x^2 + y^2 + z^2 = 3a + 6b = 12b \;\vdots\; 4$

Do bình phương của một số lẻ chia cho 4 dư 1, nên x, y, z đều là số chẵn, tức $\overrightarrow{A_1A_3'}$ có tọa độ nguyên, hay A_3' có tọa độ nguyên. Khi đó 3 điểm A_2', A'_3, A_4' cùng thuộc một mặt của hình lập phương nên theo a) các đỉnh còn lại cũng có tọa độ nguyên.

Câu 4: Bằng các biến đổi đại số, ta dễ dàng chứng minh được rằng

$$ab + bc + ca + abc = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} = 1.$$

Với mọi $x \in (0;2)$, sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(x+2)^2(4-x^2) = (x+2)(x+2)(2+x)(2-x)$$

$$= \frac{1}{3}(x+2)(x+2)(x+2)(6-3x) \le \frac{1}{3}\left[\frac{3(x+2)+(6-3x)}{4}\right]^4 = 27.$$

Do đó, $\sqrt{4-x^2} \le \dfrac{3\sqrt{3}}{x+2}$. Từ đó suy ra

$$\sqrt{4-a^2} + \sqrt{4-b^2} + \sqrt{4-c^2} \le 3\sqrt{3}\left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2}\right) = 3\sqrt{3}.$$

Câu 5: Ta có: $\dfrac{1}{x_{n+1}} = \dfrac{2+\sqrt{3+x_n^2}}{x_n} = \dfrac{2}{x_n} + \sqrt{\dfrac{3}{x_n^2} + 1}$ (2)

Đặt $y_n = \frac{1}{x_n}$ thì (2) trở thành: $y_{n+1} = 2y_n + \sqrt{3y_n^2 + 1}$

$$\Leftrightarrow \left(y_{n+1} - 2y_n\right)^2 = 3y_n^2 + 1 \Leftrightarrow y_{n+1}^2 + y_n^2 = 4y_{n+1}\cdot y_n + 1 \qquad (3)$$

Thay n+1 bởi n ta cũng được: $y_n^2 + y_{n-1}^2 = 4y_n y_{n-1} + 1 \qquad (4)$

Lấy (3) trừ (4) vế theo vế ta được:

$$y_{n+1}^2 - y_{n-1}^2 = 4y_n\left(y_{n+1} - y_{n-1}\right) \Leftrightarrow y_{n+1} - 4y_n + y_{n-1} = 0 \qquad (5)$$

(ta có $y_{n+1} > y_n > y_{n-1}$)

Phương trình (5) có dạng phương trình đặc trưng:

$$l^2 - 4l + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} l_1 = 2 - \sqrt{3} \\ l_2 = 2 + \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Khi đó : $y_n = C_1 l_1^n + C_2 l_2^n \qquad (*)$

Thay các giá trị n = 1 và n = 2 tương ứng có hệ phương trình:

$$\begin{cases} C_1 l_1 + C_2 l_2 = 1 \\ C_1 l_1^2 + C_2 l_2^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ C_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow y_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{3}\right)^2\right]$$

Vậy $x_n = \frac{2\sqrt{3}}{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{3}\right)^2}, \forall n \geq 1$

Câu 6: Cho y = 1. Thay vào (1) ta có: $f\left(f(x)\right) = f(1) f\left(f(x)\right)$

Vì $f\left(f(x)\right) > 0$ nên $f(1) = 1$

Trong (1) thay y bởi f (x) ta được: $1 = f(1) = f(x) f\left(f(x)\right) f\left(f(x)\right)$

$$\Rightarrow f\left(f(x)\right).f\left(f(x)\right) = \frac{1}{f(x)}$$

hay $f\left(f(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$, với mọi $x \in \mathbb{R}_*^+$

Trong (1) thay y bởi f (y) ta có

$$f\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = f(y) f\left(f(y)\right) f\left(f(x)\right) = f(y).\frac{1}{\sqrt{f(y)}}.\frac{1}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{\frac{f(y)}{f(x)}}, \forall x, y \in \mathbb{R}_*^+$$

Từ (1) có thể viết lại: $\dfrac{f\left(\dfrac{f(x)}{y}\right)}{f(y)} = yf\big(f(x)\big)$. Cho x = 1 ta được $y = \dfrac{f\left(\dfrac{1}{y}\right)}{f(y)}$

Như vậy với mọi $y \in \mathbb{R}_*^+$ luôn có $y = \dfrac{f(u)}{f(v)}$, với $u = \dfrac{1}{y}, v = y$

Khi đó: $f(y) = f\left(\dfrac{f(u)}{f(v)}\right) = \sqrt{\dfrac{f(v)}{f(u)}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{f(u)}{f(v)}}} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$,

hay $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\ \ \forall x \in \mathbb{R}_*^+$. Thử lại: $f\left(\dfrac{f(x)}{y}\right) = f\left(\dfrac{1}{y\sqrt{x}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{y\sqrt{x}}}} = \sqrt[4]{x}\sqrt{y}$

và $yf(y)f\big(f(x)\big) = y\dfrac{1}{\sqrt{y}}.\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{y}.\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}} = \sqrt[4]{x}\sqrt{y}$

Vậy hàm số cần tìm là : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \forall x \in \mathbb{R}_*^+$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG TH THỰC HÀNH ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Câu 1: Đặt $y = x^2$, phương trình (1) trở thành:

$$y\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^{1+\frac{1}{y}} - y^3\ln\left(1+\frac{1}{y^2}\right)^{1+\frac{1}{y^2}} = 1 - y$$

$$\Leftrightarrow y\left[(y+1)\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)-1\right] = y^2\left[\left(y^2+1\right)\ln\left(1+\frac{1}{y^2}\right)-1\right] \qquad (2)$$

Đặt $f(y) = y\left[(y+1)\ln\left(1+\dfrac{1}{y}\right)-1\right]$ thì phương trình (2) có dạng

$$f(y) = f(y^2) \qquad (3)$$

$$f'(y) = (2y+1)\ln\left(1+\frac{1}{y}\right) - 2 = (2y+1)\left[\ln\left(1+\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y+\frac{1}{2}}\right]$$

Đặt $g(y)=\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{y+\frac{1}{2}}$ với $y>0$. Ta có

$$g'(y)=\frac{-1}{y(y+1)}+\frac{1}{y^2+y+\frac{1}{4}}=\frac{-1}{4y(y+1)(y^2+y+\frac{1}{4})}<0,\forall y>0$$

và $\lim\limits_{y\to+\infty} g(y)=0$ nên $g(y)>0\ \ \forall y>0$.

Vì $2y+1>0\ \ \forall y>0$ nên $f'(y)>0\ \ \forall y>0\Rightarrow f(y)$ là hàm tăng khi $y>0$.

Vậy (3) $\Leftrightarrow\ y=y^2\ \Leftrightarrow\ y=1$ (vì $y>0$).

Nghiệm của phương trình đã cho là $x=\pm 1$.

Câu 2: Đặt 2^{2008} tập con của S thoả yêu cầu bài toán là $A_1, A_2, \ldots, A_{2^{2008}}$.

Gọi a là phần tử chung duy nhất của A_1, A_2, A_3.

Đặt $S'=S\setminus\{a\}$

Giả sử trong 2^{2008} đã cho có k tập con của S' là $B_1, B_2, \ldots, B_k$.

Khi đó $2^{2008}-k$ tập còn lại có dạng $\{a, C_j\}, C_j\subset S'$.

Nếu các tập B_i, C_j đều phân biệt mà chúng chính là 2^{2008} tập con của S' nên phải tồn tại B_i, C_j sao cho $|B_i|=1$ hoặc $|C_j|=1$.

Mặt khác theo giả thiết 3 tập bất kì trong $A_1, A_2, \ldots, A_{2^{2008}}$ có đúng 1 phần tử chung nên ta suy ra tất cả chúng có chung 1 phần tử.

Xét trường hợp tồn tại $B_i=C_j$ thì ta có $|B_i\cap B_k\cap\{a, C_j\}|=|B_i\cap B_k|, \forall k\neq i$

Suy ra $|B_i\cap B_k|=1, \forall k\neq i$. Mà theo giả thiết 3 tập bất kì trong $A_1, A_2, \ldots, A_{2^{2008}}$ có đúng 1 phần tử chung nên tất cả chúng phải có chung 1 phần tử.

Vậy ta có kết luận tất cả 2^{2008} tập đã cho có đúng 1 phần tử chung.

Câu 3: Gọi O và G là tâm mặt cầu ngoại tiếp và trọng tâm của tứ diện ABCD, l là tổng độ dài các cạnh của tứ diện.

$$l^2\le 6(AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2)=6M.$$

$$M=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right)^2+\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}\right)^2+\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)^2$$

$$+\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}\right)^2+\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}\right)^2$$

$$=12R^2-2\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OD}-2\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OD}-2\overrightarrow{OC}\overrightarrow{OD}$$

$$=16R^2-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)^2=16R^2-16OG^2\le 16R^2$$

Suy ra $l \le 4\sqrt{6}R$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ABCD là tứ diện đều.

Vậy trong số các tứ diện có cùng bán kính mặt cầu ngoại tiếp thì tứ diện đều có tổng độ dài các cạnh lớn nhất.

Câu 4: $f(x)=\dfrac{x+x^2+\ldots+x^{n-1}}{1+x^n}+\dfrac{x^n}{\left(1+x^n\right)^2}$

Nhận xét: Với $m \ge 2, x > 0$ ta có

$$1+x^m-x^{m-1}-x=(x-1)^2\left(1+x+\ldots+x^{m-2}\right)\ge 0 \Rightarrow x^m+1\ge x^{m-1}+x$$

khi $m=1$ thì $x^m+1=x^{m-1}+x$.

Áp dụng: $1+x^n \ge x+x^{n-1}=x\left(1+x^{n-2}\right)\ge x^2+x^{n-2}=x^2\left(1+x^{n-4}\right)\ge\ldots$

$$\Rightarrow 1+x^n \ge \frac{2}{n-1}\left(x+\ldots+x^{n-1}\right)$$

Mà $\left(1+x^n\right)^2 \ge 4x^n$. Vậy $f(x)\le \dfrac{n-1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{2n-1}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$. Kết luận: $\max\limits_{x>0} f(x)=\dfrac{2n-1}{4}$.

Câu 5: Xét cấp số nhân $a, qa, \ldots, q^{n-1}a, q>1, n\ge 3, a\ge 1; a,q,n\in\mathbb{N}$.

Giả sử $a+qa+\ldots+q^{n-1}a=5^{2009} \Rightarrow 1+q+\ldots+q^{n-1}=\dfrac{q^n-1}{q-1}=5^k, k\ge 2$ (1)

n phải là số lẻ vì nếu n là số chẵn, $n=2m(m>2)$ thì

$$5^k=\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{q^{2m}-1}{q-1}=\frac{q^m-1}{q-1}\left(q^m+1\right)\Rightarrow\begin{cases}q^m+1\ \vdots\ 5\\ q^m-1\ \vdots\ 5\end{cases}\text{ (vô lí).}$$

Giả sử $n=2m+1(m\ge 1)$.

$(1)\Rightarrow q^n\equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow q \not\equiv 0,-1 \pmod 5$.

Nếu $q\equiv \pm 2 \pmod 5 \Rightarrow q^n \equiv \pm 2^n=\pm 2.4^m$

$\equiv \pm 2.(-1)^m \equiv \pm 2 \pmod 5$: Mâu thuẫn với $q^n\equiv 1 \pmod 5$.

Vậy $q\equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 1+q+\ldots+q^{n-1}\equiv n \pmod 5$, nên $(1)\Rightarrow n=5h(h\ge 1)$.

$$(1)\Rightarrow 5^k=\frac{q^{5h}-1}{q-1}=\left(\frac{q^5-1}{q-1}\right)\left(\left(q^5\right)^{h-1}+\ldots+q^5+1\right)\Rightarrow\frac{q^5-1}{q-1}=5^t$$

Nhưng $\dfrac{q^5-1}{q-1}=\dfrac{(q-1+1)^5-1}{q-1}=(q-1)^4+5(q-1)^3+10(q-1)^2+10(q-1)+5$

là một số chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25: Mâu thuẫn.

Vậy $t=1\Rightarrow q=1$ (vô lý).

Suy ra tổng của tất cả n số hạng không thể bằng 5^{2009}.

Câu 6: Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{2f(2)}{x}, x > 1$.

Khi đó $\begin{cases} g(2) = 0 \\ g(x) - g(y) = (y - x)g(xy), \forall x, y > 1 \end{cases}$

$y = 2 \Rightarrow g(x) = (2 - x)g(2x);$

$y = zx \Rightarrow g(x) - g(zx) = (xz - x)g(zx^2)$

$\Rightarrow (x - z)g(x) - (x - z)g(zx) = (x - z)(xz - x)g(zx^2)$

$\Rightarrow (x - z)g(x) - (g(z) - g(x)) = (x - z)(xz - x)g(zx^2)$

$\Rightarrow (x - z + 1)g(x) - g(z) = (x - z)(xz - x)g(zx^2)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (x^2 - z)\left[(x - z + 1)g(x) - g(z)\right] &= (x - z)(xz - x)(x^2 - z)g(zx^2) \\ &= (x - z)(xz - x)(g(z) - g(x^2))\end{aligned}$$

$x = 2 \Rightarrow (4 - z)(-g(z)) = 2(2 - z)(z - 1)(g(z) - g(4))$

$\Rightarrow g(z)\big((4 - z) + 2(2 - z)(z - 1)\big) = 2(2 - z)(z - 1)g(4)$

$\Rightarrow g(z)z(5 - 2z) = 2(2 - z)(z - 1)g(4)$

$\Rightarrow g(z) = \dfrac{2(2 - z)(z - 1)g(4)}{z(5 - 2z)}, z > 1, z \neq \dfrac{5}{2}$

hay $g(2z) = \dfrac{2(2 - 2z)(2z - 1)g(4)}{2z(5 - 4z)}, z > 1, z \neq \dfrac{5}{4}$

Nếu $g(4) \neq 0$ thì từ $g(x) = (2 - x)g(2x)$ ta có

$\dfrac{2(2 - z)(z - 1)g(4)}{z(5 - 2z)} = (2 - z)\dfrac{2(2 - 2z)(z - 1)g(4)}{2z(5 - 4z)}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{(5 - 2z)} = \dfrac{(2 - 2z)}{2(5 - 4z)}, \forall z > 1, z \neq \dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{4}$

Mâu thuẫn.

Vậy $g(4) = 0 \Rightarrow g(z) = 0, \forall z > 1, z \neq \dfrac{5}{2}$

Kết hợp với $g(x) = (2 - x)g(2x)$ suy ra

$g(z) = 0, \forall z > 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{2f(2)}{x} = \dfrac{a}{x}, \forall x > 1$

Thử lại $f(x) = \dfrac{a}{x}, \forall x > 1, a = \text{const}$, thỏa mãn.

Kết luận: $f(x) = \dfrac{a}{x}, \forall x > 1, a = \text{const}$

NĂM 2010

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO AN GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU

Câu 1: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx^2 + m - 1 = y - |\sin x| \\ \tan^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$ (m là tham số)

Tìm m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Câu 2: Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số đôi một khác nhau và thỏa hai điều kiện sau đây?

i. Phải có ba chữ số: 3, 4, 5 đứng liền với nhau;

ii. Phải có hai chữ số: 7, 9 đứng liền với nhau.

Câu 3: Chứng minh rằng: Nếu bốn mặt của một tứ diện có diện tích bằng nhau thì chúng bằng nhau.

Câu 4: Cho 6 số dương a, b, c, x, y, z thỏa: $ax + by + cz = xyz$.

Chứng minh rằng: $x + y + z > \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} + \sqrt{a+b}$

Câu 5: Cho dãy số $u_0, u_1, u_2, \dots$ xác định như sau: $u_0 = 65$

$$u_{k+1} = u_k + \frac{1}{u_k}, k = 0,1,2,\dots$$

Chứng minh rằng: $\sqrt{u_0^2 + 2n} < u_n < \frac{1}{2u_0} + \sqrt{u_0^2 + 2n}$ với $\forall n = 1,2,3,\dots$.

Câu 6: Tìm hàm số $f:(0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn:

$$f\left(\frac{f(x)}{y}\right) = yf(y)f\left(f(x)\right), \forall x, y \in (0;+\infty).$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NINH THUẬN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1: Tìm m để hệ sau có một số chẵn nghiệm

$$\begin{cases} 5\sin x + 2\sin(y - m) + 2 = 2\cos 2x + \sin 3x \\ 3\log_8(2x) + \log_2\left(\sqrt{y}\right) = 2\log_4(m - y) + 2\log_4\left(2\sqrt{y}\right) \end{cases}$$

Câu 2: Cho $n = 2^{53}.3^{17}$. Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương bé hơn n là ước của n^2 nhưng không chia hết n?

Câu 3: Hai nửa đường thẳng trực giao cố định Ax và By có AB là đường thẳng vuông góc chung. Một điểm M di chuyển trên Ax và một điểm N di chuyển trên By. Gọi x, y, a lần lượt là độ dài của AM, BN, AB.

1) Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y, và a để cho ta có: MN = AM + BN.

Hệ thức này sẽ được nghiệm đúng trong suốt bài toán. Tính thể tích của tứ diện ABMN theo a.

2) O là trung điểm của AB, H là hình chiếu của O trên MN. Tính theo x và y:

$$MH^2 - NH^2.$$

Từ đó suy ra rằng MH = MA; NH = NB.

3) Tính theo x và y những khoảng cách từ điểm H đến những mặt phẳng BAx và BAy. Chứng minh rằng H di chuyển trong một mặt phẳng cố định (P) khi MN di chuyển. Tìm quỹ tích của H trong mặt phẳng này.

Câu 4: Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{5}{4} + \frac{1}{6}\left(\cos A + \cos B + \cos C\right).$$

Câu 5: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ được xác định bởi

$$\begin{cases} u_{n+2} - \dfrac{2(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}u_{n+1} + \dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}u_n = \dfrac{2(n+2)}{n+3}, \forall n > 2 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = -3 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{n^2} = 1$.

Câu 6: Tìm tất cả các hàm đa thức $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sao cho

$$f(x-y) + f(y-z) + f(z-x) = 2f(x+y+z),$$

với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ thoả mãn $xy + yz + zx = 0$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO VĨNH LONG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM

Câu 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 9 \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}\right) = 18. \end{cases}$

Câu 2. Cho $a, b, c > 0$ và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{b^2 + b} + \dfrac{b}{c^2 + c} + \dfrac{c}{a^2 + a} \ge \dfrac{3}{2}$.

Câu 3. Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho $p^2 - p + 1 = q^3$.

Câu 4. Cho tam giác ABC, có AD là đường cao.

Chứng minh rằng nếu $AB : AC = 1 : \sqrt{3}$ thì ta có bất đẳng thức $AD \le \frac{\sqrt{3}}{2} BC$.

Câu 5. Tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 2\widehat{ACB}$ và $\widehat{BAC} > 90^0$. Đường thẳng vuông góc với đường thẳng AC tại C cắt đường thẳng AB tại D.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{AB} - \frac{1}{BD} = \frac{2}{BC}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO CÀ MAU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN NGỌC HIỂN

Câu 1: Cho *n* là số nguyên dương lẻ, khác 1.

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} xy + \sqrt{2(x^4 + y^4)} = 1 \\ x^{n+4}y^n + x^n y^{n+4} = \frac{2}{3^{n+2}} \end{cases}$

Câu 2: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương x, y của phương trình sau:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x+y} + 2$$

Câu 3: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ thay đổi, có ba cạnh bên SA, SB, SC đôi một vuông góc. Gọi h là đường cao hình chóp, S_1, S_2, S_3 là diện tích các mặt bên.

Hãy tìm giá trị lớn nhất của tỉ số: $y = \frac{h^2}{S_1 + S_2 + S_3}$.

Câu 4: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.

Chứng minh rằng: $xy + yz + zx \le \frac{1}{2} + 2xyz$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 5: Cho α là một số dương. Lập dãy số (u_n) thỏa $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Chứng minh rằng tồn tại hai số dương α và *A* sao cho $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{u_n^\alpha}{n} \right) = A$.

Câu 6: Cho đa thức f(x) bậc 2008 thỏa: $f(k) = \frac{k^3}{k^2 + 3k + 2}$, với $k \in \mathbb{N}^*, k \le 2009$.

Tính f(2010).

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG TRUNG HỌC THỰC HÀNH ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Câu 1: Giải phương trình $\sqrt[3]{81x-8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$ (*)

Câu 2: Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2(y-5) - xy = x - y + 1.$$

Câu 3: Cho tam giác ABC. Lấy trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt các điểm C_1, B_1, A_1 sao cho $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C_1A}{C_1B} = k\ (k > 0)$. Lấy trên các cạnh $B_1C_1; C_1A_1; A_1B_1$ lần lượt các điểm A_2, B_2, C_2 sao cho $\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{B_2C_1}{B_2A_1} = \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = \frac{1}{k}$

a) Chứng minh AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

b) Tìm k để diện tích tam giác $A_2B_2C_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4: Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z^2 + 2z(x+y) = 8 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = z(y - x)$.

Câu 5: Cho S là tập con có ít nhất 10 phần tử của tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, ..., 99, 100\}$. Chứng minh rằng tồn tại các tập con khác rỗng X và Y của S sao cho X và Y không có phần tử chung và tổng các phần tử của X bằng tổng các phần tử của Y.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có hai điểm B(–1;0), C(1;0), A thay đổi. Gọi H, G lần lượt là trọng tâm và trực tâm của tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm A biết trung điểm K của HG thuộc trục hoành.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT BÌNH PHÚ

Câu 1: Giải phương trình: $x\sqrt{3x+2} + \sqrt{4-x} = \sqrt{2(x^2+1)(x+3)}$.

Câu 2: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình:

$$\frac{11}{5}x - \sqrt{2x+1} = 3y - \sqrt{4y-1} + 2.$$

Câu 3: Cho tam giác ABC có AC = AB + $\frac{1}{2}$BC. M là điểm trên đoạn BC sao cho MB = 3MC. Đường phân giác góc B cắt AM tại N. Chứng minh rằng tam giác BMN cân.

Câu 4: Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn abc = 1.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{bc}{a^2b + a^2c} + \frac{ac}{b^2a + b^2c} + \frac{ab}{c^2a + c^2b}$.

Câu 5: Cho A_n có n phần tử. Tập hợp A_n có bao nhiêu tập con?

Câu 6: Cho hai điểm AB cố định.

Tìm tập hợp điểm M sao cho: $\left|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|3\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LÂM ĐỒNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN THĂNG LONG

Câu 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3x-1+\sqrt{2x+1}=y \\ y^3+3y-1+\sqrt{2y+1}=x \end{cases}$

Câu 2: Giả sử với mỗi số nguyên $n\geq 3$ tồn tại số nguyên dương k sao cho 19^k-97 chia hết cho 2^n nhưng không chia hết cho 2^{n+1}. Chứng minh rằng số $19^{k+2^{n-2}}-97$ chia hết cho 2^{n+1}.

Câu 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi I,J là trung điểm AB, CD. M di động trên AC. Mặt phẳng (IMJ) cắt BD tại N. Chứng minh: $\frac{MA}{MC}=\frac{NB}{ND}$ và $S_{MIJ}=S_{NIJ}$.

Câu 4: Cho a,b,c là các số thực không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}$$

Câu 5: Cho a là số thực dương và dãy $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1=a \\ u_{n+1}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\log_3\sqrt{1+u_n^3},\ \forall n\in N^* \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

Câu 6: Tìm tất cả các đa thức với hệ số thực P(x) thỏa mãn điều kiện:

$P\big(P(x)+x\big)=P(x)P(x+1)$, với mọi $x\in R$. (1)

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRÀ VINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRÀ VINH

Câu 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+2y^3-x=-\frac{1}{4}+3\sqrt{3} \\ y^4+2x^3-y=-\frac{1}{4}-3\sqrt{3} \end{cases}$

Câu 2: Tìm ước số lớn nhất của số $S_n=2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}$, với $n=0,1,2,\ldots,2010$.

Câu 3: Cho tứ diện gần đều ABCD với AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c (a, b, c > 0). M là điểm bất kì trong không gian. Chứng minh rằng bình phương khoảng cách từ M đến một trong các đỉnh tứ diện không lớn hơn tổng bình phương khoảng cách từ M đến 3 đỉnh còn lại. Gọi M, E, K, L là bốn điểm xảy ra dấu đẳng thức. Tìm thể tích khối đa diện (H) là phần chung của tứ diện ABCD và tứ diện MEFL theo a, b, c.

Câu 4: Cho n, k là các số nguyên, k, n ≥ 2.

Chứng minh rằng: $\sqrt[n]{1+\frac{n}{k}} < \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n+1}{k-1}\right)+1$ (với ln là ký hiệu logarit Nê-pe)

Câu 5: Cho $a_0, a_1 = 1$ và $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2$ với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng: $a_{n^2+1} = a_{n+1}.a_n$ với mọi $n \geq 0$

Câu 6: Tìm tất cả các hàm f: **R** → **R** thoả mãn: $f(x^2 - y^2) = (x - y)[f(x) + f(y)]$ với mọi $x, y \in \mathbf{R}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NAM
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM

Câu 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4^{x^2-16} + 3\sqrt{x} + \sqrt{x^2+1} = 4^{y^2-8y} + 3\sqrt{y-4} + \sqrt{y^2-8y+17} \\ y(x^2-1) - 4x^2 + 3x - 8 + \ln(x^2-3x+3) = 0 \end{cases} \qquad (I)$$

Câu 2: Tìm x và y nguyên dương thỏa mãn phương trình:

$$x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}$$

Câu 3: Cho hình lập phương. Mặt phẳng tiếp xúc hình cầu nội tiếp trong hình lập phương cắt hình lập phương theo thiết diện là một tam giác. Chứng minh rằng thiết đó có diện tích nhỏ hơn một nửa diện tích mặt hình lập phương.

Câu 4: Cho x, y, z ≥ 0 thỏa mãn x + y + z = 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{1}{7+3\ln(1+x)-y} + \frac{1}{7+3\ln(1+y)-z} + \frac{1}{7+3\ln(1+z)-x}.$$

Câu 5: Cho dãy số (x_n) xác định bởi: $\begin{cases} x_0 = a, 0 < a \neq 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+5}{2(x_n+2)}, \forall n \in \mathbf{N} \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 6: Tìm tất cả các hàm số f: **N*** → **N*** thỏa mãn các điều kiện:

1) $f(x + 26) = f(x), \forall x \in \mathbf{N}^*$; 2) $f(x^2y) = (f(x))^2.f(y), \forall x, y \in \mathbf{N}^*$.

ĐÁP ÁN

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO AN GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU

Câu 1:

- Điều kiện cần:

Giả sử: $\left(x_0\,;y_0\right)$ là nghiệm của hệ.

Nhận thấy $\left(-x_0\,;y_0\right)$ cũng là nghiệm của hệ.

Vì hệ có nghiệm duy nhất nên $x_0=-x_0 \Leftrightarrow 2x_0=0 \Leftrightarrow x_0=0$.

Suy ra $\left(0;y_0\right)$ là nghiệm của hệ đã cho

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0=m-1 \\ y_0^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=m-1 \\ y_0=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$$

- Điều kiện đủ

Với $m=0$ hệ tương đương $\begin{cases} \left|\sin x\right|=y+1 \\ \tan^2 x+y^2=1 \end{cases}$

Nhận thấy $x=k\pi,\ y=-1$ là nghiệm của hệ $\forall k\in Z$.

Suy ra hệ có vô số nghiệm nên $m=0$ (không thỏa mãn yêu cầu).

Với $m=2$ hệ tương đương $\begin{cases} 2x^2+1+\left|\sin x\right|=y & \text{(a)} \\ \tan^2 x+y^2=1 & \text{(b)} \end{cases}$

(b) suy ra $y^2\le 1 \Leftrightarrow \left|y\right|^2\le 1 \Leftrightarrow \left|y\right|\le 1 \Rightarrow y\le 1$

(a) suy ra vế trái ≥ 1, nên vế phải ≥ 1

Vậy: $y=1$.

Hệ tương đương $\begin{cases} 2x^2+1+\left|\sin x\right|=1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

đó là nghiệm duy nhất, vậy $m=2$ thỏa mãn.

Kết luận: hệ có nghiệm duy nhất khi $m=2$.

Câu 2: Gọi x là nhóm gồm ba chữ số: 3, 4, 5;

y là nhóm gồm hai chữ số: 7, 9.

+ *Trường hợp 1*

Với 1,2,6,8 có C_4^2 cách chọn ra hai chữ số và trong đó có hai chữ số x và y

Với mỗi cách trên có P_4 cách xếp thứ tự của chúng và với cách ấy ở x và y có $P_3\,.\,P_2$ cách xếp vị trí của 3,4,5,7,9

Do đó có $C_4^2.P_4.P_3.P_2$ số cần tìm loại không có chữ số 0

+ *Trường hợp 2:*

Với 1,2,6,8 có C_4^1 cách chọn ra hai chữ số và trong đó có chữ số 0 và hai chữ số x và y.

Ở vị trí đầu tiên (bên trái): Có 3 cách chọn do nó khác 0.

Với mỗi cách chọn trên có: P_3 cách chọn cho các chữ số 0, x và y.

Với mỗi cách chọn trên có: $P_3 . P_2$ cách chọn cho các chữ số 3,4,5 và 7,9.

Do đó có $C_4^1.3.P_3^2.P_2$ số cần tìm loại không có chữ số 0.

+ Từ trường hợp 1 và 2 ta được: $C_4^2.P_4.P_3.P_2 + C_4^1.3.P_3^2.P_2 = 2592$ số cần tìm

Câu 3:

i. Xét tứ diện ABCD với P, Q lần lượt là trung điểm của cạnh AB, CD. Ta có:

PQ là đường vuông góc chung của AB và CD $\Leftrightarrow \begin{cases} AC = BD \\ AD = BC \end{cases}$

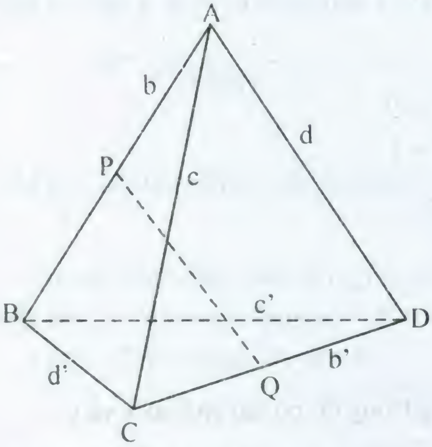
Vì: P là trung điểm AB, Q là trung điểm CD nên:

$$2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \Rightarrow \begin{cases} 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ} = d^2 - d'^2 + c^2 - c'^2 \\ 4\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{PQ} = d^2 - d'^2 + c'^2 - c^2 \end{cases}$$

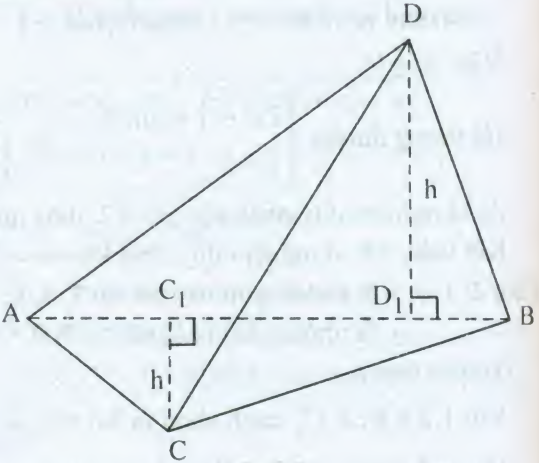
$$\text{Do đó: } \begin{cases} PQ \perp AB \\ PQ \perp CD \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ} = 0 \\ 4\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{PQ} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d^2 - d'^2 + c^2 - c'^2 = 0 \\ d^2 - d'^2 + c'^2 - c^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d^2 - d'^2 = 0 \\ c^2 - c'^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = d' \\ c = c' \end{cases}$$

Trong đó: c, c', d, d' được kí hiệu theo hình (H_1)



Hình 1



Hình 2

ii. Xét tứ diện ABCD với S(ΔABC) = S(ΔABD) $\Rightarrow$ Đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm của CD

Vì: Gọi tên theo hình vẽ (H_2), S(ΔABC) = S(ΔABD) $\Rightarrow DD_1 = CC_1$

ΔCC_1D_1 vuông tại C_1 bằng với ΔC_1D_1D vuông tại D_1 $\Rightarrow CD_1 = C_1D$

Xét tứ diện DCC_1D_1 có $\begin{cases} DD_1 = CC_1 \\ CD_1 = DC_1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Đường vuông góc chung của CD và C_1D_1 lần lượt đi qua trung điểm của CD và C_1D_1

$\Rightarrow$ Đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm của CD

iii. Xét tứ diện ABCD với S(ΔABC) = S(ΔACD) = S(ΔADB) = S(ΔBCD)

Ta có: * $\begin{cases} S(\Delta ABC) = S(\Delta ABD) \\ S(\Delta ACD) = S(\Delta BCD) \end{cases}$ $\Rightarrow$ Đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm của AB và CD $\Rightarrow \begin{cases} AC = BD \\ AD = BC \end{cases}$ (1)

* $\begin{cases} S(\Delta ABC) = S(\Delta ACD) \\ S(\Delta ADB) = S(\Delta BCD) \end{cases}$ $\Rightarrow$ Đường vuông góc chung của AC và BD đi qua trung điểm của AC và BD $\Rightarrow \begin{cases} AB = CD \\ AD = BC \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) tứ diện ABCD có: $\begin{cases} AC = BD \\ AD = BC \\ AB = CD \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ diện ABCD có 4 mặt là những tam giác bằng nhau.

Câu 4: Từ giả thiết $ax + by + cz = xyz$

Ta có:

$$x = \frac{ax}{yz} + \frac{b}{z} + \frac{c}{y} > \frac{b}{z} + \frac{c}{y}; y = \frac{a}{z} + \frac{by}{xz} + \frac{c}{x} > \frac{a}{z} + \frac{c}{x}; z = \frac{a}{y} + \frac{b}{x} + \frac{cz}{xy} > \frac{a}{y} + \frac{b}{x}.$$

Suy ra: $x + y + z > \dfrac{b+c}{x} + \dfrac{c+a}{y} + \dfrac{a+b}{z}$

$$\Rightarrow 2(x+y+z) > x + \frac{b+c}{x} + y + \frac{c+a}{y} + z + \frac{a+b}{z} \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi:

$$x + \frac{b+c}{x} \ge 2\sqrt{b+c}; \ y + \frac{c+a}{y} \ge 2\sqrt{c+a}; \ z + \frac{a+b}{z} \ge 2\sqrt{a+b}.$$

Ta được:

$$x + \frac{b+c}{x} + y + \frac{c+a}{y} + z + \frac{a+b}{z} \ge 2\sqrt{b+c} + 2\sqrt{c+a} + 2\sqrt{a+b} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $x + y + z > \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} + \sqrt{a+b}$.

Câu 5:

i. Ta thấy $0 < u_0 < u_1 < u_2 < ....$ vì vậy $\forall k \geq 0$, ta có: $u_{k+1} - u_k = \frac{1}{u_k} > 0$

$$\Rightarrow (u_{k+1} + u_k)(u_{k+1} - u_k) > 2u_k.\frac{1}{u_k} = 2 \Rightarrow u_{k+1}^2 - u_k^2 > 2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2) > 2n$$

$$\Rightarrow u_n^2 - u_0^2 > 2n \quad \Rightarrow u_n^2 > u_0^2 + 2n \quad \Rightarrow u_n > \sqrt{u_0^2 + 2n} \qquad (1)$$

ii. Do $0 < u_0 < u_1 < u_2 < ....$ vì vậy $\forall k \geq 0$, ta có: $u_{k+1} - u_k = \frac{1}{u_k} < \frac{1}{u_0}$

$$\Rightarrow u_{k+1} + u_k - \frac{1}{u_0} < 2u_k \text{ hay } \left(u_{k+1} + u_k - \frac{1}{u_0}\right)(u_{k+1} - u_k) < 2$$

$$\Rightarrow u_{k+1}^2 - u_k^2 - \frac{1}{u_0}\left(u_{k+1} - u_k\right) < 2 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right) - \frac{1}{u_0}\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1} - u_k\right) < 2n$$

$$\Rightarrow u_n^2 - u_0^2 - \frac{1}{u_0}(u_n - u_0) < 2n \Rightarrow u_n < \frac{1}{2u_0} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{u_0} + 4(u_0^2 + 2n - 1)}$$

$$\Rightarrow u_n < \frac{1}{2u_0} + \frac{1}{2}\sqrt{4u_0^2 + 8n + \left(\frac{1}{u_0} - 4\right)} \quad (*)$$

Do $u_0 = 65 \Rightarrow \frac{1}{u_0^2} - 4 < 0$ Vậy từ (*) có: $u_n < \frac{1}{2u_0} + \sqrt{u_0^2 + 2n}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\sqrt{u_0^2 + 2n} < u_n < \frac{1}{2u_0} + \sqrt{u_0^2 + 2n}$.

Câu 6:

* Cho $x = y = 1$: (1) $\Rightarrow f(f(1)) = f(1)f(f(1))$

$\Rightarrow f(1) = 1$ vì $f(f(1)) \neq 0 \Rightarrow f(f(1)) = 1$.

Cho $x = 1, y \in (0;+\infty)$: (1) $\Rightarrow f\left(\frac{f(1)}{y}\right) = yf(y)f(f(1)) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = yf(y)$

$$\Rightarrow \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{y} = f(y) \text{ (a)}$$

Mặt khác: $f\left(f(y)\right) = f\left(\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{y}\right) = yf(y)f\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right) = yf(y)f\left(yf\left(y\right)\right)$

$$= yf(y)f\left(\frac{f\left(y\right)}{\frac{1}{y}}\right) = yf(y)\frac{1}{y}f\left(\frac{1}{y}\right)f\left(f(y)\right)$$

Vì $f(f(y)) \neq 0$ nên $yf(y)\frac{1}{y}f\left(\frac{1}{y}\right)=1 \Leftrightarrow f(y)f\left(\frac{1}{y}\right)=1$ (b)

Từ (a) và (b) ta có: $f(y)=\frac{1}{\sqrt{y}}$, $\forall y \in (0;+\infty)$.

* Thử lại thấy đúng

Vậy hàm số cần tìm là $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, với $\forall x \in (0;+\infty)$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NINH THUẬN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1:

Dành cho bạn đọc

Câu 2: Đặt $n=p^r.q^s$, trong đó p,q là hai số nguyên tố khác nhau.

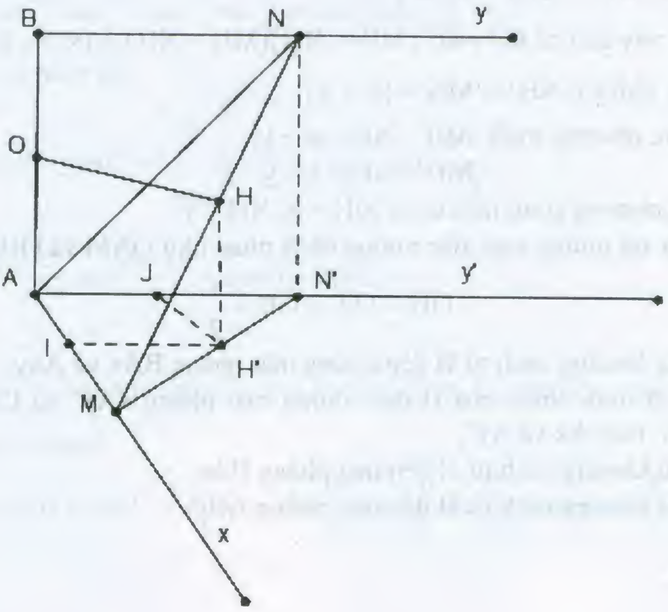
Thế thì, $n^2=p^{2r}.q^{2s}$. Vì thế, n^2 có $(2r+1)(2s+1)$ ước.

Trừ đi ước là n, ta phải có $\frac{(2r+1)(2s+1)-1}{2}=2rs+r+s$ ước của n^2 và bé hơn n.

Vì n có $(r+1)(s+1)$ ước (bao gồm cả n), và mọi ước của n cũng là ước của n^2 nên ta có $2rs+r+s-\left[(r+1)(s+1)-1\right]=rs$ là ước của n^2 bé hơn n và không là ước của n.

Vậy khi $\begin{cases} r=53 \\ s=17 \end{cases}$ thì ta có $rs=901$ số thoả mãn điều kiện đề bài.

Câu 3:



1. Hệ thức giữa x, y và a.

Từ A kẻ đường thẳng song song Ay' với By. Gọi N' là hình chiếu của N trên mặt phẳng xAy'.

Trong tam giác vuông MAN', ta có: $MN'^2 = AM^2 + AN'^2 = x^2 + y^2$.

Mặt khác trong tam giác vuông MNN': $MN^2 = MN'^2 + NN'^2 = x^2 + y^2 + a^2$.

Muốn cho hệ thức MN=AM+BN ta phải có: $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + a^2$

hay: $2xy = a^2$.

Ngược lại, nếu ta có hai số dương x và y nghiệm đúng hệ thức này ta suy ra

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + a^2$$

hay x + y = MN.

Ta có thể coi tứ diện ABMN có đáy là tam giác ABN và chiều cao là MA.

Từ đó thể tích V của nó là: $V = \frac{1}{3}MA.S_{\Delta ABN} = \frac{1}{6}axy$

hay $V = \frac{a^3}{12}$.

2. Tính $MH^2 - NH^2$

Các tam giác vuông OHM và OHN cho ta:

$$MH^2 = OM^2 - OH^2;\ NH^2 = ON^2 - OH^2.$$

Từ đó $MH^2 - NH^2 = OM^2 - ON^2$.

Ta có thể tính OM và ON theo những tam giác vuông góc OAM và OBN.

$$OM^2 = \frac{a^2}{4} + x^2;\ ON^2 = \frac{a^2}{4} + y^2$$

Nghĩa là, $MH^2 - NH^2 = x^2 - y^2$.

Hệ thức này còn có thể viết: $(MH + NH)(MH - NH) = (x+y)(x-y)$.

Ta thấy: $(MH + NH) = MN = (x+y)$

Ta có các phương trình: $MH - NH = x + y$;

$MH - NH = x - y$.

Giải hai phương trình trên ta có MH = x; NH = y.

Ngoài ra xét những tam giác vuông bằng nhau như OAM và OHM ta còn thấy:

$$OH = OA = OB = \frac{a}{2}$$

3. Những khoảng cách từ H đến những mặt phẳng BAx và Aby.

Gọi H' là hình chiếu của H đến những mặt phẳng xAy' và I,J là những hình chiếu của H' trên Ax và Ay';

H'I là khoảng cách từ H đến mặt phẳng BAx;

H'J là khoảng cách từ H đến mặt phẳng ABy.

Ta có: $\dfrac{H'I}{N'A}=\dfrac{MH'}{MN'}=\dfrac{MH}{MN}$.

Nghĩa là: $\dfrac{H'I}{y}=\dfrac{x}{x+y}\Rightarrow H'I=\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{a^2}{2(x+y)}$

Cũng như thế ta có: $\dfrac{H'J}{MA}=\dfrac{N'H'}{N'M}=\dfrac{NH}{NM}$.

Nghĩa là: $\dfrac{H'J}{x}=\dfrac{y}{x+y}\Rightarrow H'J=\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{a^2}{2(x+y)}$.

Những khoảng cách từ điểm H đến hai mặt phẳng ABx vào ABy bằng nhau.
Vậy, điểm H ở trong mặt phẳng phân giác của nhị diện (x,AB,y).
Quỹ tích của H
Gọi (P) là mặt phẳng phân giác nói trên. Điểm O cũng nằm trong mặt phẳng này.
Ta đã chứng minh: OH = OA = OB = a.
Vậy quỹ tích của H ở trong mặt phẳng (P) là nửa đường tròn đường kính AB.

Câu 4: Hoàn toàn có thể chứng minh được

$$\tan\frac{A}{2}\sin B+\tan\frac{B}{2}\sin A\ge 4\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{B}{2}\sin C+\tan\frac{C}{2}\sin B\ge 4\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\qquad (*)$$

$$\tan\frac{C}{2}\sin A+\tan\frac{A}{2}\sin C\ge 4\sin\frac{C}{2}.\sin\frac{A}{2}$$

Cộng vế theo vế ta được

$$\begin{aligned}&\tan\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)+\tan\frac{B}{2}(\sin C+\sin A)+\tan\frac{C}{2}(\sin A+\sin B)\\&\ge 4\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right).\end{aligned}\qquad (1)$$

Hơn nữa, ta có biến đổi

$$\tan\frac{A}{2}(\sin B+\sin C)=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}$$

$$=2\cos\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}=\cos B+\cos C.$$

Tương tự:

$$\tan\frac{B}{2}(\sin C+\sin A)=\cos C+\cos A;\ \tan\frac{C}{2}(\sin A+\sin B)=\cos A+\cos B.$$

Thay vào (1) ta được

$$\cos A+\cos B+\cos C\ge 2\left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\ge\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Mặt khác, hoàn toàn có thể chứng minh được: $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2}$ (**)

Ta xét: $\left[2\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)-3\right]^2\ge 0$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)^2+9\ge 12\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right) \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta được

$$4\left(\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\right)+9\ge 12\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(3+\cos A+\cos B+\cos C)+9\ge 12\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{5}{4}+\frac{1}{6}(\cos A+\cos B+\cos C).$$

Dấu đẳng thức xảy $\Leftrightarrow$ dấu đẳng thức trong (*) và (**) xảy ra

$$\Leftrightarrow A=B=C\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Câu 5: Trước hết ta sẽ tìm số hạng tổng quát của dãy (u_n) bằng cách giải phương trình sai phân:

$$u_{n+2}-\frac{2(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}u_{n+1}+\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}u_n=\frac{2(n+2)}{n+3},\forall n>2 \quad (*)$$

với điều kiện ban đầu $u_1=0$ và $u_2=-3$.

Nhân hai vế của (*) với $\frac{n+3}{n+2}$ ta được

$$(*)\Leftrightarrow\frac{n+3}{n+2}u_{n+2}-\frac{2(n+2)}{n+1}u_{n+1}+\frac{n+1}{n}u_n=2,\forall n>2 \quad (**)$$

Đặt $v_n=\frac{n+1}{n}u_n$.

Thế thì, $(**)\Leftrightarrow v_{n+2}-2v_{n+1}+v_v=2,\forall n>2$ (***)

và $\begin{cases} v_1=2u_1=2.0=0 \\ v_2=\frac{3}{2}u_2=\frac{3}{2}.(-3)=-\frac{9}{2}\end{cases}$

Phương trình đặc trưng $\lambda^2-2\lambda+1=0$ có nghiệm kép là $\lambda=1$. Do đó,

+ Nghiệm tổng quát $\widetilde{v_n}=A+Bn$.

+ Nghiệm riêng của (***) có dạng $v_n^*=an^2$.

Thay vào (***) ta tính được $a=1$. Vậy nghiệm riêng của (***) là $v_n^*=n^2$.

Vậy số hạng tổng quát của dãy (v_n) có dạng $v_n = \widetilde{v_n} + v_n^* = A + Bn + n^2$

$$\begin{cases} v_1 = 2u_1 = 2.0 = 0 \\ v_2 = \dfrac{3}{2}u_2 = \dfrac{3}{2}.(-3) = -\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + 1 = 0 \\ A + 2B + 4 = -\dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{13}{2} \\ B = -\dfrac{15}{2} \end{cases}$$

Vậy $v_n = \dfrac{13}{2} - \dfrac{15}{2}n + n^2$.

Suy ra: $u_n = \dfrac{n}{n+1}v_n = \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{13}{2} - \dfrac{15}{2}n + n^2\right) = v_n = \dfrac{13n}{2(n+1)} - \dfrac{15n^2}{2(n+1)} + \dfrac{n^3}{n+1}$

nên $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{13n}{2(n+1)} - \dfrac{15n^2}{2(n+1)} + \dfrac{n^3}{n+1}}{n^2} = 1$.

Câu 6: Cho $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, thế thì từ phương trình ta có: $f(0) + f(-z) + f(0) = 2f(z)$ (1)

Cho $z = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow 3f(0) = 2f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$. Do đó,

(1) $\Leftrightarrow f(z) + f(-z) = 2f(z) \Leftrightarrow f(z) = f(-z)$. Điều này có nghĩa f là hàm chẵn.

Vì thế, ta có thể viết $f(x) = g(x^2)$ với $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Thế thì,

$$g\left((x-y)^2\right) + g\left((y-z)^2\right) + g\left((z-x)^2\right) = 2g\left((x+y+z)^2\right).$$

Với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$ thoả mãn $xy + yz + zx = 0$.

Ta đặt $\begin{cases} r = x - y \\ s = y - z \end{cases}$. Suy ra $x - z = r + s$. Thế thì,

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + x^2$$

(do $xy + yz + zx = 0$)

$$= \left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \left(xy + yz + zx\right) = \frac{1}{2}\left(r^2 + s^2 + (-r-s)^2\right) = r^2 + s^2 + rs.$$

Do đó, ta có thể viết: $g(r^2) + g(s^2) + g\left((r+s)^2\right) = 2g\left(r^2 + rs + s^2\right)$

Cho $r = s$ thì $2g(r^2) + g(4r^2) = 2g(3r^2)$

Đặt $u = r^2$, ta có: $2g(u) + g(4u) = 2g(3u)$, $\forall u \geq 0$. (2)

Đặt $g(u) = a_0 + a_1u + ... + a_nu^n$. Thế thì, từ (2) suy ra $a_j = 0, \forall j \geq 0$.

Hơn nữa, $g(0) = f(0) = 0$ nên $a_0 = 0$.

Do đó, ta có $g(u) = a_1u + a_2u^2$.

Suy ra $f(r) = g(r^2) = a_1r^2 + a_2r^4$.

Hoàn toàn có thể kiểm tra được hàm đa thức trên thoả mãn điều kiện bài toán.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO VĨNH LONG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM

Câu 1. Đặt $a=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}, b=a=\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$.

Hệ phương trình được viết lại dưới dạng: $\begin{cases} a^3+b^3+1^3=10 \\ (a+b)(b+1)(1+a)=18 \end{cases}$.

Sử dụng đẳng thức $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(a+b)(b+c)(c+a)$,

với $c=1$, ta có: $(a+b+1)^3=64 \Leftrightarrow a+b+1=4 \Leftrightarrow a+b=3$.

Ta được hệ phương trình $\begin{cases} a^3+b^3=9 \\ a+b=3 \end{cases}$. Giải hệ này ta được $(a,b)\in\{(2;1),(1,2)\}$.

Từ đó suy ra $(x;y)\in\{(1;1/8),(1/8;1)\}$.

Câu 2. ***Bổ đề:*** Nếu $a,b,c>0$ và $abc\le 1$ thì $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge a+b+c$.

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{a}{b}.\frac{b}{c}}=3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}\ge 3\sqrt[3]{a^3}=3a.$$

Chứng minh tương tự, ta có được $\frac{2b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3b, \frac{2c}{a}+\frac{a}{b}\ge 3c$.

Do đó $3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 3(a+b+c)$ hay $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge a+b+c$.

Trở lại bài toán ban đầu. Từ kết quả vừa nhận được, chú ý rằng, sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $3=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\le 1$. Kết hợp với bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta được

$$\frac{a}{b^2+b}+\frac{b}{c^2+c}+\frac{c}{a^2+a}=\frac{(a/b)^2}{a+a/b}+\frac{(b/c)^2}{b+b/c}+\frac{(c/a)^2}{c+c/a}$$

$$\ge\frac{(a/b+b/c+c/a)^2}{(a+b+c)+(a/b+b/c+c/a)}$$

$$\ge\frac{(a/b+b/c+c/a)^2}{(a/b+b/c+c/a)+(a/b+b/c+c/a)}=\frac{(a/b+b/c+c/a)}{2}$$

$$\ge\frac{3\sqrt[3]{(a/b).(b/c).(c/a)}}{2}=\frac{3}{2}.$$

Câu 3: Từ điều kiện đã cho, ta suy ra được: $p(p-1)=(q-1)(q^2+q+1)$ (1)

Do đó $p\mid(q-1)$ hoặc $p\mid\left(q^2+q+1\right)$.

Nếu $p\mid(q-1)$ thì $p<q$, suy ra $p^2-p+1=q^3>p^3$ hay

$$(p-1)p>(p-1)\left(p^2+p+1\right) \text{ hay } p>p^2+p+1, \text{ vô lí.}$$

Do đó ta phải có $p\mid\left(q^2+q+1\right)$, hay $q^2+q+1=kp, k\in\mathbb{N}^*$ (2)

Từ (1) ta nhận được $p-1=k(q-1)$ (3)

Từ (2) và (3), ta có $q^2+q+1=k(kq-k+1)$

hay $q^2+\left(1-k^2\right)q+\left(k^2-k+1\right)=0$.

Vì q là số nguyên nên $\Delta=\left(k^2-1\right)^2-4\left(k^2-k+1\right)$ phải là số chính phương.

Hơn nữa, ta để ý rằng $\Delta<\left(k^2-1\right)^2$ và $\Delta\equiv\left(k^2-1\right)^2 \pmod 2$, nên suy ra

$$\Delta\le\left(k^2-3\right)^2 \Leftrightarrow \left(k^2-1\right)^2-\left(k^2-3\right)^2\le 4\left(k^2-k+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(k^2-2\right)\le 4\left(k^2-k+1\right)\Leftrightarrow k\le 3.$$

Nếu $k=2$, thì $\Delta=-3$, không là số chính phương.

Nếu $k=3$, thì $\Delta=6^2$, và ta có được $q=7, p=19$.

Vậy các số nguyên tố cần tìm là $q=7, p=19$.

Câu 4. Không mất tính tổng quát, giả sử $AB=1$ và $AC=\sqrt{3}$.

Khi đó $AD=\sin B$. Do đó ta cần chứng minh bất đẳng thức $\sin B\le\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

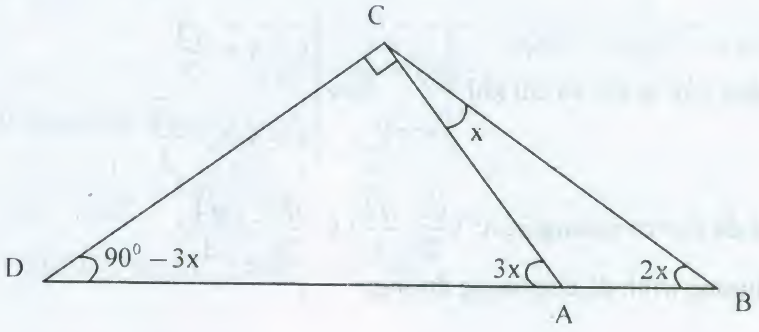
Sử dụng định lý cosin, ta có $a^2=4-2\sqrt{3}\cos A$.

Sử dụng định lí sin, ta có $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin B}$.

Ta để ý rằng $\sin A+\sqrt{3}\cos A\le 2$, do đó:

$$2-\sqrt{3}\cos A\ge\sin A\Rightarrow a^2\ge 2\sin A\Rightarrow a.\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin B}\ge 2\sin A\Leftrightarrow \sin B\le\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Câu 5:



Đặt $\widehat{ACB} = x$. Khi đó ta có

$$\widehat{ABC} = 2x, \widehat{DAC} = 3x,\ \ \widehat{BAC} = \pi - 3x,\ \widehat{BCD} = \frac{\pi}{2} + x, \widehat{BDC} = \frac{\pi}{2} - 3x.$$

Áp dụng định lí sin cho các tam giác ABC, BCD, ta có”

$$\frac{BC}{AB} - \frac{BC}{BD} = \frac{\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{ACB}} - \frac{\sin\widehat{BDC}}{\sin\widehat{BCD}} = \frac{\sin(\pi - 3x)}{\sin x} - \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 3x\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin 3x\cos x - \cos 3x\sin x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x\cos x} = 2.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO CÀ MAU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN NGỌC HIỂN

Câu 1: $\begin{cases} xy + \sqrt{2(x^4 + y^4)} = 1 & (1) \\ x^{n+4}y^n + x^n y^{n+4} = \dfrac{2}{3^{n+2}} & (2) \end{cases}$

Từ (2), biến đổi được: $(xy)^n(x^4 + y^4) = \dfrac{2}{3^{n+2}} \Rightarrow xy > 0$

(*n* là số nguyên dương lẻ, khác 1).

Khi đó, từ (1), với lưu ý: $2(x^4 + y^4) \geq 4x^2y^2$, suy ra: $\begin{cases} 0 < xy \leq \dfrac{1}{3} \\ x^4 + y^4 = \dfrac{(1 - xy)^2}{2} \end{cases}$

Kết hợp (1) và (2), ta có: $(xy)^n(x^4 + y^4) = (xy)^{n-1}xy\dfrac{(1 - xy)^2}{2}$

$$\leq 2.(\frac{1}{3})^{n-1}.\left(\frac{xy + (\frac{1}{2} - \frac{xy}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{xy}{2})}{3}\right)^3 = \frac{2}{3^{n+2}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xy = \dfrac{1}{3} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x = y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm: $(\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}), (-\dfrac{\sqrt{3}}{3}; -\dfrac{\sqrt{3}}{3})$.

Câu 2: Phương trình đã cho tương đương:

$$\sqrt{xy} = 2(1+\sqrt{x+y}) \Leftrightarrow xy = 4(1+x+y+2\sqrt{x+y}).$$

Suy ra: $\sqrt{x+y} \in \mathbb{N}^*$ và $\sqrt{xy}$ là số chẵn.

Đặt $\sqrt{xy} = 2t,\ t \in \mathbb{N}^*$. Phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y} = t+1 \\ \sqrt{xy} = 2t \end{cases}$

Suy ra $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai:

$$z^2 - (t+1)z + 2t = 0 \qquad (*)$$

$$\Delta = t^2 - 6t + 1$$

(*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 3+2\sqrt{2} \\ t \leq 3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vì $t \in \mathbb{N}^* \Rightarrow t \geq 6$.

Khi đó, dễ chứng minh được:

$$(t-5)^2 \leq \Delta < (t-3)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta = (t-5)^2 \\ \Delta = (t-4)^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 6 \\ t = \dfrac{15}{2} \notin \mathbb{N}^* \end{array}\right.$$

Với t = 6, suy ra z = 3 hoặc z = 4, do đó $(x;y) = (9;16)$

và $(x;y) = (16;9)$ là hai nghiệm cần tìm của phương trình đã cho.

Câu 3: Gọi SH là đường cao của hình chóp SABC ($H \in (ABC)$); CH cắt AB tại I.

Xét tam vuông SIC và tam giác vuông SAB ta có:

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}.$$

Đặt:

$$S_1 = dt(SAB) = \frac{1}{2}SA.SB; S_2 = dt(SBC) = \frac{1}{2}SB.SC; S_3 = dt(SAC) = \frac{1}{2}SA.SC.$$

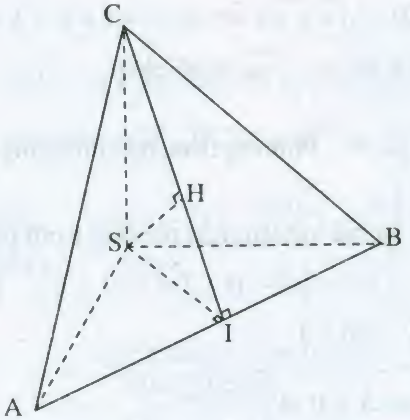
Khi đó: $y = \dfrac{h^2}{S_1+S_2+S_3} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{h^2}} \cdot \dfrac{1}{S_1+S_2+S_3}$

$$= \frac{1}{\dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2}} \cdot \frac{2}{SA.SB + SB.SC + SA.SC} \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{SA^2} \cdot \frac{1}{SB^2} \cdot \frac{1}{SC^2}} \qquad (2)$$

$$SA.SB + SB.SC + SA.SC \geq 3\sqrt[3]{SA^2.SB^2.SC^2} \qquad (3)$$



Từ (1), (2), (3) ta được: $y \le \dfrac{1}{3\sqrt[3]{\dfrac{1}{SA^2}\cdot\dfrac{1}{SB^2}\cdot\dfrac{1}{SC^2}}}\cdot\dfrac{2}{3\sqrt[3]{SA^2.SB^2.SC^2}} = \dfrac{2}{9}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow SA = SB = SC$.

Vậy giá trị lớn nhất của *y* là: $y_{max} = \dfrac{2}{9}$.

Câu 4: Ta có nhận xét: tồn tại hai số trong ba số *x*, *y*, *z* có tính chất cùng lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$, hoặc nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{2}$, giả sử hai số đó là *x*, *y*.

Khi đó, ta có $(2x-1)(2y-1) \ge 0 \Rightarrow x + y - 2xy \le \dfrac{1}{2}$.

Mặt khác từ đẳng thức giả thiết ta lại có:

$$0 < x, y < 1 \Rightarrow x^2 < x;\ y^2 < y \Rightarrow x + y - 2xy > x^2 + y^2 - 2xy \ge 0.$$

Vậy: $0 < x + y - 2xy \le \dfrac{1}{2}$ (1)

Mặt khác:

$$1 = (x^2 + y^2) + z^2 + 2xyz \ge 2xy + z^2 + 2xyz \Rightarrow 1 - z^2 \ge 2xy(1+z)$$

$$\Rightarrow 1 - z \ge 2xy \Rightarrow 1 - 2xy \ge z > 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có:

$$z(x + y - 2xy) \le \frac{1}{2}(1 - 2xy) \Leftrightarrow xy + yz + zx \le \frac{1}{2} + 2xyz \text{ (đpcm).}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x = y = z = \dfrac{1}{2}$.

Câu 5: Dễ thấy từ giả thiết ta có $u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ta có $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2} \Leftrightarrow u_{n+1}^3 = u_n^3 + 3 + \dfrac{3}{u_n^3} + \dfrac{1}{u_n^6}$ (1)

$$\Rightarrow u_{n+1}^3 > u_n^3 + 3 \Rightarrow u_n^3 > u_0^3 + 3n \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được

$$u_{n+1}^3 < u_n^3 + 3 + \frac{3}{u_0^3 + 3n} + \frac{1}{(u_0^3 + 3n)^2} \Rightarrow u_{n+1}^3 < u_n^3 + 3 + \frac{1}{n} + \frac{1}{9n^2}$$

$$\Rightarrow u_n^3 < u_1^3 + 3(n-1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \quad (3)$$

mà $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = 2 - \frac{1}{n} < 2$ và $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} < \sqrt{n}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}} < \sqrt{2n}$,

do đó từ (3) ta có: $u_n^3 < u_1^3 + 3(n-1) + \sqrt{2n} + \frac{2}{9}$ (4)

Từ (2) và (4) suy ra: $u_0^3 + 3n < u_n^3 < u_1^3 + 3(n-1) + \sqrt{2n} + \frac{2}{9}$

$$\Leftrightarrow \frac{u_0^3}{n} + 3 < \frac{u_n^3}{n} < \frac{u_1^3}{n} + \frac{3(n-1)}{n} + \frac{\sqrt{2n}}{n} + \frac{2}{9n}$$

Cho $n \longrightarrow +\infty$, ta được:

$$3 \le \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n^3}{n} \le 3 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n^3}{n} = 3.$$

Vậy $\alpha = A = 3$ là hai số dương cần tìm.

Câu 6: Đặt $g(x) = (x + 1)(x + 2)f(x) - x^3 \Rightarrow g(x)$ là đa thức bậc 2010.

Theo giả thiết $f(k) = \dfrac{k^3}{k^2 + 3k + 2}$, với $k \in \mathbb{N}^*, k \le 2009$

$$\Rightarrow g(x) \text{ có 2009 nghiệm: } 1, 2, .., 2009.$$

nên $g(x) = (x-1)(x-2)...(x-2009)(Ax+B)$ với $A \neq 0, B \neq 0$.

Ta lại có: $g(-1) = 1, g(-2) = -8$, nên có hệ sau:

$$\begin{cases} (-2)(-3)...(-2010)(-A+B) = 1 \\ (-3)(-4)...(-2011)(-2A+B) = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{16}{2011!} - \dfrac{1}{2010!} \\ B = \dfrac{16}{2011!} - \dfrac{2}{2010!} \end{cases}$$

Khi đó $g(2010) = 2009!.(2010A + B) = 2011.2012.f(2010) - 2010^3$

Suy ra $f(2010) = \dfrac{2009!.(2010A + B) + 2010^3}{2011.2012}$, với $\begin{cases} A = \dfrac{16}{2011!} - \dfrac{1}{2010!} \\ B = \dfrac{16}{2011!} - \dfrac{2}{2010!} \end{cases}$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG TRUNG HỌC THỰC HÀNH ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

Câu 1: Đặt $\sqrt[3]{81x-8}+2=3y$ thì $3x=y^3-2y^2+\frac{4}{3}y$.

Kết hợp với (*), ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3y=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x \\ 3x=y^3-2y^2+\frac{4}{3}y \end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình ta có

$$(x-y)(x^2+xy+y^2-2x-2y+\frac{13}{3})=0 \ (**)$$

Ta có

$$x^2+xy+y^2-2x-2y+\frac{13}{3}=\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{2}(y-2)^2+\frac{1}{3}>0$$

nên (**) $\Leftrightarrow x=y$.

Từ đó ta có $3x=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x \ \Leftrightarrow x=0,\ x=\frac{3\pm 2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 2: Ta có $x^2(y-5)-xy=x-y+1$

$$\Rightarrow y=5+\frac{6x-4}{x^2-x+1} \qquad (1)$$

Ta thấy $x^2-x+1>0$ và $x^2-x+1=x(x-1)+1$ là một số lẻ; mà y là một số nguyên nên ta có

$(3x-2)\vdots(x^2-x+1)$ (2)

hay $(3x^2-2x)\vdots(x^2-x+1)$ (3)

Mặt khác $3(x^2-x+1)\vdots(x^2-x+1)$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow (x-3)\vdots(x^2-x+1) \Rightarrow (3x-9)\vdots(x^2-x+1)$ (5)

Từ (2) và (5) $\Rightarrow 7\vdots(x^2-x+1)$.

Từ đó ta có $x^2-x+1=1$ hay $x^2-x+1=7$. Suy ra (x;y) = (0;1), (1;7), (3; 7)

Câu 3: a. Ta có: $\overrightarrow{AB_1}=\frac{\overrightarrow{AC}}{1+k};\overrightarrow{AC_1}=\frac{k\overrightarrow{AB}}{1+k}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA_2}=\frac{k\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AC_1}}{1+k}=\frac{k}{(k+1)^2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

Vậy AA_2 là đường trung tuyến của tam giác ABC.

Tương tự ta có BB_2, CC_2 cũng là đường trung tuyến của tam giác ABC.

Vậy 3 đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại trọng tâm G của tam giác ABC.

b. $S_{AB_1C_1} = S_{BC_1A_1} = S_{CA_1B_1} = \dfrac{kS_{ABC}}{(k+1)^2} = \dfrac{k}{(k+1)^2}$

$\Rightarrow S_{A_1B_1C_1} = 1 - \dfrac{3k}{(k+1)^2} \geq \dfrac{1}{4} (\forall k > 0)$.

Dấu bằng xảy ra khi k = 1.

Tương tự, ta có $S_{A_2B_2C_2} \geq \dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{4} \geq \dfrac{1}{16}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S_{A_2B_2C_2}$ là $\dfrac{1}{16}$ khi k = 1.

Câu 4: Ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ z^2 + 2z(x+y) = 8 & (2) \end{cases}$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2zx + 2zy = 12 \Rightarrow \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{z}{2}\right)^2 = 6 \quad (3)$$

Từ (1) ta có $(2y)^2 + (-2x)^2 = 8 \quad (4)$

Đặt $\vec{u} = \left(x + \dfrac{z}{2}; y + \dfrac{z}{2}\right)$, từ (3) $\Rightarrow \left|\vec{u}\right| = \sqrt{6}$;

$\vec{v} = (2y; -2x)$; từ (4) $\Rightarrow \left|\vec{v}\right| = \sqrt{8}$.

Ta có $\vec{u}.\vec{v} = yz - zx = z(y-x) = A \Rightarrow A \leq \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng, suy ra

$$\frac{x + \frac{z}{2}}{2y} = \frac{y + \frac{z}{2}}{-2x} \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = -z(x+y)$$

$\Rightarrow z(x+y) = -4$, từ (2) $\Rightarrow z^2 = 16 \Leftrightarrow z = \pm 4$.

Vậy $\begin{cases} x + y = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow (x;y) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $4\sqrt{3}$

Câu 5: Ta biết tổng số tập con khác rỗng của S là $2^n - 1$ với n là số phần tử của S.

Ta sẽ chứng minh trong trường hợp S có 10 phần tử. Điều này không làm giảm tính tổng quát vì nếu S có nhiều hơn 10 phần tử thì ta khảo sát trên tập con S' có 10 phần tử (sau khi bỏ bớt đi một số phần tử của S).

Trong trường hợp này thì S có $2^{10}-1=1023$ tập con khác rỗng.

Mỗi tập con của S sẽ có tổng không vượt quá tổng 10 phần tử lớn nhất trong tập A đã cho tức là phải bé hơn 1000. Suy ra có ít hơn 1000 tổng khác nhau. Trong khi đó có hơn 1000 tập con khác rỗng của S vì vậy theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại 2 tập con X và Y có tổng bằng nhau.

Giả sử X và Y nói trên có phần tử chung thì ta sẽ xóa đi các phần tử chung đó trong mỗi tập hợp. Hai tập mới tạo thành sẽ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Gọi A(m;n), ta có $G\left(\frac{m}{3};\frac{n}{3}\right)$

Phương trình (AB): $\frac{n}{m+1}x-y=\frac{-n}{m+1}$

Đường cao kẻ từ C: $x+\frac{n}{m+1}y-1=0$ (1)

Đường cao kẻ từ A: $x=m$ (2)

Trực tâm $H\left(m;\frac{1-m^2}{n}\right)\Rightarrow K\left(\frac{2m}{3};\frac{n^2-3m^2+3}{6n}\right)$.

Ta có $K\in Ox\Leftrightarrow\frac{n^2-3m^2+3}{6n}=0\Leftrightarrow\frac{m^2}{3}-\frac{n^2}{1}=1$.

Vậy tập hợp điểm A là hyperbol (H): $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH

TRƯỜNG THPT BÌNH PHÚ

Câu 1: Điều kiện: $-\frac{2}{3}\le x\le 4$.

Đặt: $\vec{a}=(x;1);\ \vec{b}=(\sqrt{3x+2};\sqrt{4-x})$

PT $\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}\ (k>0)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=k\sqrt{3x+2}\\1=k\sqrt{4-x}\end{cases}\Leftrightarrow -x^3+4x^2-3x-2=0.$$

Kết luận: $S=\left\{2;1+\sqrt{2}\right\}$

Câu 2: Điều kiện: $x,y\in Z; x\ge 0; y\ge 1; x\,\vdots\,5$.

Đặt $z=\frac{11}{5}x-3y-2$

Phương trình trở thành: $z = \sqrt{2x+1} - \sqrt{4y-1}$ (1)

$$\Rightarrow z^2 = 2x + 4y - 2\sqrt{2x+1}.\sqrt{4y-1}$$

$$\Rightarrow z^2 - 2x + 4y - 2 = 2z\sqrt{4y-1} \qquad (2)$$

Vì 4y – 1 không phải là số chính phương nên từ (2) $\Rightarrow z = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{11}{5}x - 3y - 2 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Câu 3: Gọi (A) là đường tròn tâm A bán kính AB; (A) cắt AC và BC tại E và F.

Ta có CF.CB = $CA^2 - AB^2$ (= $P_{C/(A)}$)

$\Rightarrow$ CF.CB = (CA – AB)(CA + CB) $\Rightarrow$ CF.CB = $\frac{1}{2}$BC.(2AB + $\frac{1}{2}$BC)

$\Rightarrow$ CF = AB + $\frac{1}{4}$BC $\Rightarrow$ CF = AB + MC

$\Rightarrow$ MF = AB = AF $\Rightarrow$ tam giác AFM cân tại F

$$\Rightarrow \widehat{NBM} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AFB} = \widehat{AMF}$$

Kết luận: tam giác BMN cân tại N.

Câu 4: Ta có: $\frac{bc}{a^2b + a^2c} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}; \frac{ac}{b^2a + b^2c} = \frac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}; \frac{ab}{c^2a + c^2b} = \frac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Đặt: $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c} \Rightarrow x, y, z > 0$ và $xyz = 1$.

Ta có: $P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki:

$$\left(\sqrt{y+z}\frac{x}{\sqrt{y+z}} + \sqrt{x+z}\frac{y}{\sqrt{x+z}} + \sqrt{x+y}\frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)^2 \le 2(x+y+z).P$$

$$\Rightarrow P \ge \frac{1}{2}(x+y+z) \ge \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y = z =1 suy ra a = b = c = 1.

Vậy: Giá trị nhỏ nhất của P = $\frac{3}{2}$.

Câu 5: Gọi $A_{n-1} = \{a_1; a_2; ...; a_{n-1}\}$ có n – 1 phần tử;

$A_n = \{a_1; a_2; ...; a_{n-1}; a_n\}$ có n phần tử.

Giả sử số tập con của A_{n-1} là S_{n-1}.

Với phần tử thứ a_n của A_n, nếu đem thêm lần lượt vào S_{n-1} tập con của A_{n-1} ta có S_{n-1} tập con mới.

Do đó nếu gọi S_n là số tập con của A_n thì $S_n = 2S_{n-1}$.

Tương tự: $S_{n-1} = 2S_{n-2}$

....

$S_2 = 2S_1$

Nhân vế và đơn giản ta có: $S_n = 2^{n-1}S_1$

Với S_1 là số tập con của $A_1 = \{a_1\}$.

Mà $S_1 = 2$ (tập rỗng và A_1) $\Rightarrow S_n = 2^{n-1}.2 = 2^n$.

Vậy A_n có n phần tử có tất cả 2^n tập con.

Câu 6: Đặt AB = 2a. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm AB, Oy ⊥ AB.

Khi đó A(–a; 0) B(a; 0) Gọi M(x; y)

$$\left|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right|$$

$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (-2a - 4x; -4y)$$

$$3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = (4a - 2x; -2y)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(-2a-4x)^2 + 16y^2} = \sqrt{(4a-2x)^2 + 4y^2}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 16ax + 16x^2 + 16y^2 = 16a^2 - 16ax + 4x^2 + 4y^2$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 + 32ax + 12y^2 = 12a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{8}{3}ax - a^2 = 0.$$

Kết luận: Vậy quỹ tích M là đường tròn: $x^2 + y^2 + \frac{8}{3}ax - a^2 = 0$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LÂM ĐỒNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN THĂNG LONG

Câu 1: Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{2}; y \ge -\frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t - 1 + \sqrt{2t+1}$ trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 + \frac{1}{\sqrt{2t+1}} > 0 \quad \forall t \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ và $f(t)$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ nên $f(t)$ là hàm tăng thực sự trên $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Giả sử $-\frac{1}{2} \le x \le y$; từ hệ phương trình đã cho và do $f(t)$ tăng suy ra $x = y$.

Thay vào hệ phương trình đã cho được $x^3 + 2x - 1 + \sqrt{2x+1} = 0$. (1)

Xét hàm số $g(x)=x^3+2x-1+\sqrt{2x+1}$ trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $g'(x)=3x^2+2+\frac{1}{\sqrt{2x+1}}>0 \quad \forall x\in\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ và $g(x)$ liên tục trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$ nên $g(x)$ là hàm tăng thực sự trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$, mà $g(0)=0$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=0$. Suy ra $x=y=0$.

Thử lại hệ, đúng. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;0)$

Câu 2: Từ giả thiết ta có $19^k-97=2^n.a$, với a là số nguyên dương lẻ. (1)

Ta có $19^{k+2^{n-2}}-97=19^{2^{n-2}}(19^k-97)+97(19^{2^{n-2}}-1)$ (2).

Ta chứng minh nhận xét sau bằng quy nạp: $19^{2^{n-2}}-1=2^n.t_n$ với t_n là số nguyên dương lẻ.

Với $n=3$ khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng với n. Khi đó

$19^{2^{n-1}}-1=(19^{2^{n-2}}+1)(19^{2^{n-2}}-1)=2(2^{n-1}t_n+1)2^n.t_n=2^{n+1}t_{n+1}$ với

$t_{n+1}=(2^{n-1}t_n+1)t_n$ là số nguyên dương lẻ. Nhận xét được chứng minh.

Từ đó, kết hợp với (1) và (2) ta có

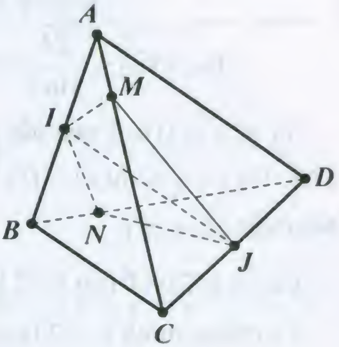
$19^{k+2^{n-2}}-97=19^{2^{n-2}}2^n a+97.2^n t_n=2^n(19^{2^{n-2}}a+97t_n)$ chia hết cho 2^{n+1}.

Câu 3:

* Xét phép chiếu lên trục d, d ⊥ (MINJ) tại O:

$A\mapsto A', B\mapsto B', C\mapsto C', D\mapsto D',$

$I, J, M, N\mapsto O.$



Theo định lí Menelaus trong không gian ta có:

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}}.\frac{\overline{NB}}{\overline{ND}}.\frac{\overline{JD}}{\overline{JC}}.\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}.\frac{\overline{OB'}}{\overline{OD'}}.\frac{\overline{OD'}}{\overline{OC'}}.\frac{\overline{OC'}}{\overline{OA'}}=1.(1)$$

Mặt khác: $\overline{IA}=-\overline{IB};\overline{JC}=-\overline{JD}$.

Thay vào (1) ta có: $\frac{\overline{NB}}{\overline{ND}}.\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}}=1\Rightarrow\frac{MA}{MC}=\frac{NB}{ND}.(2)$

Gọi K trung điểm MN, $\overrightarrow{IK}=\frac{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}}{2}$ (3)

Do (2) $\Rightarrow\frac{AM}{AC}=\frac{BN}{BD}=h\Rightarrow\overrightarrow{AM}=h\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BN}=h\overrightarrow{BD}.$

Từ (3) suy ra: $\overrightarrow{IK}=\frac{h(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})}{2}=h\overrightarrow{IJ}.$

Suy ra: $K \in IJ \Rightarrow \dfrac{S_{MIJ}}{S_{NIJ}} = \dfrac{KM}{KN} = 1 \Rightarrow S_{MIJ} = S_{NIJ}$.

Câu 4: Đặt $p = a + b + c, \quad q = ab + bc + ca, \quad r = abc$.

Ta có $Q = \dfrac{p\left(p^2 - 3q\right) + 3r}{pq - r} + \dfrac{9q}{p^2 - 2q}$.

Chuẩn hóa $p = 1$ ta có $Q = \dfrac{1 - 3q + 3r}{q - r} + \dfrac{9q}{1 - 2q} = \dfrac{1}{q - r} + \dfrac{9q}{1 - 2q} - 3$.

Do đó $Q \geq \dfrac{1}{q} + \dfrac{9q}{1 - 2q} - 3 = \dfrac{1 - 2q}{q} + \dfrac{9q}{1 - 2q} - 1 \geq 5$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} p = 1 \\ r = 0 \\ (1 - 2q)^2 = 9q^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ r = 0 \\ q = \dfrac{1}{5} \end{cases}$.

Từ đó có $a = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{10}$, $b = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{10}$, $c = 0$ và các hoán vị của nó.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng 5.

Câu 5: Xét hàm số:

$$f(x) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\log_3 \sqrt{1 + x^3} \text{ trên } (0; +\infty); \; f'(x) = \frac{x^2}{(x^3 + 1)\ln 3}.$$

Ta có: $x^3 + 1 = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^3}{2} + 1 \geq \dfrac{3x^2}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow \dfrac{x^2}{x^3 + 1} \leq \dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$

$$\Rightarrow 0 < f'(x) \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{3\ln 3} < 1, \; \forall x \in (0; +\infty)$$

Vì $u_{n+1} = f(u_n)$ nên nếu L là giới hạn của dãy $\{u_n\}$ thì L là nghiệm của phương trình $f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = f(x) - x = 0$; $h'(x) = f'(x) - 1 < 0, \forall x > 0 \Rightarrow h(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Lại có $h(2) = 0$ nên $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = x$ trên $(0; +\infty)$.

Ta chứng minh L = 2 là giới hạn của dãy.

Áp dụng định lí La–grăng, luôn tồn tại c nằm giữa hai số u_n và 2 sao cho:

$$|u_{n+1} - 2| = |f(u_n) - f(2)| = |f'(c)||u_n - 2| \leq q|u_n - 2| \; \left(q = \frac{\sqrt[3]{4}}{3\ln 3}\right).$$

$$\leq q^2|u_{n-1} - 2| \leq \ldots \leq q^n|u_1 - 2| \to 0.$$

Vậy: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 2$.

Câu 6: Giả sử bậc của đa thức $P(x)$ là $\deg P(x)\ \forall x \geq \sqrt[3]{\frac{4}{5}}$.

So sánh bậc lũy thừa của hai vế của (1), ta được $n^2 = 2n \Leftrightarrow n = 0 \vee n = 2$.

i) Khi $n = 0$, ta được đa thức hằng $P(x) \equiv c$.

Thế vào (1), ta được phương trình $c = c^2 \Leftrightarrow c = 0 \vee c = 1$.

Vậy $P(x) \equiv 0$ và $P(x) \equiv 1$ là các đa thức hằng thỏa mãn bài ra.

ii) Xét $n = 2$. Giả sử $P(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

So sánh hệ số cao nhất trong (1), ta được $a^3 = a^2 \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy $P(x) = x^2 + bx + c, \quad (b, c \in R)$ (2)

Ta chứng minh mọi đa thức $P(x)$ dạng (2) đều thỏa mãn bài ra.

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}
&P(x)P(x+1) = P(x)(x^2 + 2x + 1 + bx + b + c)\\
&= P(x)(P(x) + 2x + b + 1)\\
&= (P(x))^2 + 2xP(x) + bP(x) + P(x)\\
&= (P(x) + x)^2 + b(P(x) + x) + (P(x) - x^2 - bx)\\
&= (P(x) + x)^2 + b(P(x) + x) + c = P(P(x) + x)
\end{aligned}$$

với mọi $x \in R$, đpcm.

Vậy các đa thức cần tìm là $P(x) \equiv 0$, $P(x) \equiv 1$ và

$$P(x) = x^2 + bx + c, \quad (b, c \in R).$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TRÀ VINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN TRÀ VINH

Câu 1: Ta có $\begin{cases} x^4 + 2y^3 - x = -\frac{1}{4} - 3\sqrt{3} & (1)\\ y^4 + 2x^3 - y = -\frac{1}{4} + 3\sqrt{3} & (2)\end{cases}$

Cộng (1) và (2) vế theo vế:

$$x^4 + 2x^3 - x + \frac{1}{4} + y^4 + 2y^3 - y + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - \frac{1}{2})^2 + (y^2 + y - \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - \frac{1}{2} = 0\\ y^2 + y - \frac{1}{2} = 0\end{cases}$$

Phương trình $t^2 + t - \frac{1}{2} = 0$ có nghiệm: $t = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Thử lại hệ có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Câu 2: $S_o = 1 + 9 + 25 = 35 = 5.7$

$$2^{3n} + 3^{6n+2} \equiv 2^{3n} + 9^{3n+1} \equiv 2^{3n} + (-1)^{3n+1} \pmod 5$$

$$\Rightarrow S_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2} \equiv 2^{3n} + (-1)^{3n+1} \pmod 5$$

$N = 1 \Rightarrow S_1 \equiv 9 \pmod 5 \Rightarrow 5$ không thỏa.

$2^{3n} = 8^n \equiv 1 \pmod 7$

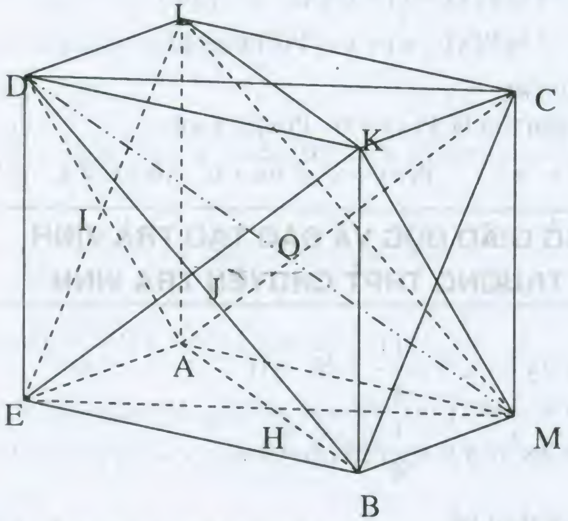
$9 \equiv 2 \pmod 7$, $9^{3n} \equiv 2^{3n} \equiv 8^n \equiv 1 \pmod 7$

$3^{6n+2} = 9.9^{3n} \equiv 2 \pmod 7$;

$5^{6n+2} = 25.25^{3n} \equiv 4.4^{3n} \equiv 4.64^n \equiv 4.1 \equiv 4 \pmod 7$

$S_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2} \equiv 1 + 2 + 4 \equiv 0 \pmod 7$. Vậy số cần tìm là: 7.

Câu 3:



Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần chứng minh một bất đẳng thức:

$MD^2 \le MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện, ta được:

$MA^2+MB^2+MC^2-MD^2$

$= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})^2 + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})^2 + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM})^2 - (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM})^2$

$= 2.R^2 + 2OM^2 - 2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})$

Do ABCD là tứ diện gần đều nên O cũng là trọng tâm do đó:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OD}$

$MA^2+MB^2+MC^2-MD^2 = 2.(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OD})^2 \ge 0$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M đối xứng với D qua O.

Dựng các cặp mặt phẳng song song lần lượt chứa các cặp AB và CD, AC và BD, AD và BC tạo thành hình hộp chữ nhật AEBM.LDKC tâm O

Bốn điểm cần tìm là 4 đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật

Ta có: EK, EM, ED lần lượt cắt BD, ABAD tại J, H, I

Gọi V,V_1 lần lượt là thể tích của hình hộp chữ nhật AEBM.LDKC và của (H), ta có:

$$V_{EHIK}=\frac{1}{4}V_{E.ABD}=\frac{1}{4}V_{D.EAB}=\frac{1}{24}V$$

$$V_{ABCD}=V_{AEBM.LDKC}-4V_{D,AEB}=V-4.\frac{1}{6}V=\frac{1}{3}V$$

$$V_1=V_{ABCD}-4.V_{EHIK}=\frac{1}{3}V-4\frac{1}{24}V=\frac{1}{6}V==\frac{1}{6}EA.EB.ED$$

$$\text{Ta có }\begin{cases}ED^2+EB^2=c^2\\ EA^2+EB^2=a^2\\ ED^2+EA^2=b^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow ED=\sqrt{\frac{c^2+b^2-a^2}{2}}\quad EA=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}\quad EB=\sqrt{\frac{c^2+a^2-b^2}{2}}$$

$$V_1=\frac{\sqrt{2}}{24}\sqrt{\left(c^2+b^2-a^2\right).\left(a^2+b^2-c^2\right).\left(c^2+a^2-b^2\right)}.$$

Câu 4: ***Bổ đề:*** Với mọi số a >0, ta có: $\frac{1}{1+a}<\ln(a+1)-\ln a<\frac{1}{a}$. Chứng minh:

Thật vậy, xét hàm số f(x) = ln x xác định và liên tục trên R^+, $f'(x)=\frac{1}{x}$

Nên áp dụng định lí Lagrange trên [a,a+1] (a > 0)

ta được: $\frac{1}{c}=f'(x)=\frac{\ln(a+1)-\ln a}{(a+1)-a}=\ln(a+1)-\ln a$ với $c\in(a,a+1)$.

Khi đó: $\frac{1}{a+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}\Rightarrow\frac{1}{1+a}<\ln(a+1)-\ln a<\frac{1}{a}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có:

$$\frac{k+1}{k}+\frac{k+2}{k+1}+\ldots+\frac{k+n}{k+n-1}\geq n\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}.\frac{k+2}{k+1}.....\frac{k+n}{k+n-1}}=n\sqrt[n]{\frac{k+n}{k}}$$

Ta cũng có:

$$\frac{k+1}{k}+\frac{k+2}{k+1}+\ldots+\frac{k+n}{k+n-1}=1+\frac{1}{k}+1+\frac{1}{k+1}+\ldots+1+\frac{1}{k+n-1}$$

$$=n+\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{k+n-1}\right).$$

Áp dụng bổ đề: $\sqrt[n]{\frac{k+n}{k}} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{k+1}{k}+\frac{k+2}{k+1}+\ldots+\frac{k+n}{k+n-1}\right)$

$$=\frac{1}{n}\left(n+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+n-1}\right)<\frac{1}{n}\left(n+\ln\left(\frac{k+n}{k-1}\right)\right)=1+\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{n+1}{k-1}\right)$$

Bất đẳng thức đã được chứng minh.

Câu 5: Ta có: $a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n + 2$

Nên: $a_2 + a_0 = 2a_1 + 2$

$a_3 + a_1 = 2a_2 + 2$

……….

$a_n + a_{n-2} = 2a_{n-1} + 2$

$a_{n+1} + a_{n-1} = 2a_n + 2$

Cộng vế với vế:

$a_0 + a_1 + 2(a_2 + a_3 + \ldots + a_{m-1}) + a_n + a_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + 2n$

Vậy $a_{n+1} = a_n + 2n$

hay $a_{n+1} - a_n = 2(n-1)$

$a_2 - a_1 = 0$

$a_3 - a_2 = 2$

$a_4 - a_3 = 4$

……………

$a_{n+1} - a_n = 2n$

$a_{n+1} - a_1 = n(n+1) \Rightarrow a_{n+1} = n^2 + n + 1.$

Mà $a_{n+1} = a_n + 2n \Rightarrow a_n = n^2 - n + 1.$

$a_{n^2+1} = (n^2+1)^2 - (n^2+1) + 1 = [(n+1)^2 - (n+1) + 1](n^2 - n + 1) = a_{n+1}.a_n.$

Câu 6:

Cho $x = y$, ta được $f(0) = 0$.

Cho $x = -1$, $y = 0$ ta được $f(1) = -f(-1)$.

Cho $x = a$, $y = 1$ và cho $x = a$, $y = -1$ ta có:

$f(a^2 - 1) = (a-1)[f(a) + f(1)]$ (1)

$f(a^2 - 1) = (a+1)[f(a) - f(1)]$ (2)

Từ (1), (2) ta được $(a-1)[f(a) + f(1)] = (a+1)[f(a) - f(1)]$

$\Leftrightarrow f(a) = f(1).a$ với mọi $a \in \mathbf{R}$

Vậy $f(x) = kx$ với hằng số k nào đó.

Ngược lại, bất kì hàm số nào có dạng $f(x) = kx$ với hằng số k nào đó đều thỏa yêu cầu đề bài.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NAM
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BỈNH KHIÊM

Câu 1: Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 4$. Đặt $z = y - 4$, $z \geq 0$. Khi đó hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases}4^{x^2-16}+3\sqrt{x}+\sqrt{x^2+1}=4^{z^2-16}+3\sqrt{z}+\sqrt{z^2+1}\,(1)\\ zx^2+3x-z-12+\ln(x^2-3x+3)=0\,(2)\end{cases}\ \text{(II)}$$

Hàm $f(t) = 4^{t^2-16}+3\sqrt{t}+\sqrt{t^2+1}$ có

$$f'(t) = 2t.4^{t^2-16}\ln 4+\frac{3}{2\sqrt{t}}+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}>0, \forall t>0$$

Và f(t) liên tục trên $[0, +\infty)$ nên f(t) đồng biến trên $[0, +\infty)$

$\Rightarrow$ (1) có dạng $f(x) = f(z) \Leftrightarrow x = z \geq 0$.

Thế $z = x$ vào phương trình (2) ta có: $x^3+2x-12+\ln(x^2-3x+3)=0$ (3)

Đặt $g(x) = x^3+2x-12+\ln(x^2-3x+3)$, với $x \geq 0$.

Ta có $g'(x) = 3x^2+2+\dfrac{2x-3}{x^2-3x+3} = 3x^2+\dfrac{2x^2-4x+3}{x^2-3x+3}>0$, mọi $x \geq 0$.

g(x) đồng biến trên $[0, +\infty)$ và $g(2) = 0$ nên $x = 2$ là nghiệm duy nhất của (3).

Hệ (II) có nghiệm x = 2 và t = 2 nên hệ (I) có nghiệm duy nhất (x ; y) là (2, 6).

Câu 2:

+ Nếu y = 1: Ta có $x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -1$ (loại)

+ Xét y > 1: Các số x^{2y} và $(x+2)^{2y}$ cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Số $(x+1)^{2y} = (x+2)^{2y} - x^{2y}$ phải chẵn $\Rightarrow x+1$ chẵn $\Rightarrow x+1 = 2x_1$.

Nên ta có: $(2x_1)^{2y} = (2x_1+1)^{2y} - (2x_1-1)^{2y}$ (1).

+ Dùng công thức khai triển nhị thức Niutơn, khai triển vế trái của (1) ta được

$$(2x_1)^{2y} = \sum_{k=0}^{2y}C_{2y}^k(2x_1)^{2y-k} - \sum_{k=0}^{2y}C_{2y}^k(2x_1)^{2y-k}(-1)^k$$
$$= 2\left(C_{2y}^1(2x_1)^{2y-1}+C_{2y}^3(2x_1)^{2y-3}+\ldots+C_{2y}^{2y-1}(2x_1)\right)$$

Suy ra:

$$2.2y.2x_1 = (2x_1)^{2y} - 2\left(C_{2y}^1(2x_1)^{2y-1}+C_{2y}^3(2x_1)^{2y-3}+\ldots+C_{2y}^{2y-3}(2x_1)^3\right) \qquad (2)$$

Vì $y \geq 2 \Rightarrow 2y \geq 4$. Tất cả các số hạng vế phải của (2) đều chia hết cho $(2x_1)^3$ từ đó suy ra y chia hết cho x_1^2. Khi chia hai vế của (1) cho $(2x_1)^{2y}$ ta được:

$$1 = \left(1+\frac{1}{2x_1}\right)^{2y} - \left(1-\frac{1}{2x_1}\right)^{2y} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{2x_1}\right)^{2y} = 1+\left(1-\frac{1}{2x_1}\right)^{2y} < 2.$$

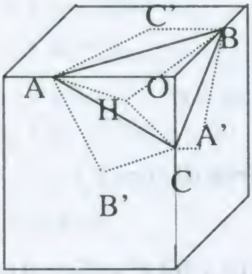
Theo bất đẳng thức Becnuli: $\left(1+\frac{1}{2x_1}\right)^{2y} > 1+2y.\frac{1}{2x_1}$. Suy ra $1+\frac{y}{x_1} < 2 \Rightarrow y < x_1$.

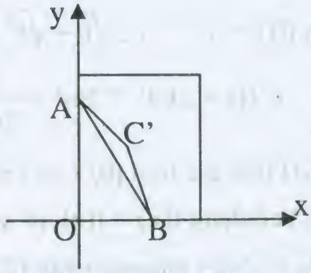
Điều này mâu thuẫn với y chia hết cho x_1^2.

Vì thế phương trình không có nghiệm khi y > 1.

Vậy phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất nguyên dương là x = 3, y = 1.

Câu 3:





Giả sử ABC là thiết diện tam giác của hình lập phương cạnh bằng 2 (diện tích mặt hình lập phương là 4) tiếp xúc hình cầu nội tiếp hình lập phương tại điểm H. Gọi C', B', A' là các tiếp điểm của hình cầu với 3 mặt của hình lập phương trên đó có các đoạn thẳng AB, AC và BC tương ứng. Khi đó C', B', A' là tâm các mặt của hình lập phương.

+ Tính chất tiếp tuyến ⇒ AC' = AH, BC' = BH ⇒ Δ AC'B = Δ AHB.

Tương tự Δ BA'C = Δ BHC, Δ AB'C = Δ AHC.

Vậy diện tích tam giác ABC bằng tổng diện tích các tam giác AC'B, BA'C, CB'A.

Gọi O là đỉnh hình lập phương chung cho 3 mặt chứa các đoạn AB, BC, CA.

+ Đặt OA = a, OB = b, OC = c (0 < a, b, c < 2). Tính diện tích tam giác C'AB bằng phương pháp tọa độ: Chọn hệ trục Oxy sao cho B(b;0), A(0;a) thì C'(1;1).

Ta có phương trình đường thẳng AB: $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$.

+ Khoảng cách từ C' đến AB là $d=\frac{|a+b-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ suy ra $S_{C'AB}=\frac{1}{2}|a+b-ab|$.

Tương tự: $S_{A'BC}=\frac{1}{2}|b+c-bc|$ và $S_{B'AC}=\frac{1}{2}|a+c-ac|$.

+ Ta chứng minh: $\frac{1}{2}|a+b-ab|+\frac{1}{2}|b+c-bc|+\frac{1}{2}|a+c-ac|<2$

$$\Leftrightarrow |a+b-ab|+|b+c-bc|+|c+a-ac|<4 \quad (1)$$

+ BĐT Cô–Si ta có: $\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab \Rightarrow a+b-ab \geq (a+b)-\frac{(a+b)^2}{4} > 0$

(vì 0 < a, b, c < 2)

Tương tự: $b + c - bc > 0$ và $c + a - ca > 0$

+ BĐT (1) $\Leftrightarrow 2(a + b + c) - (ab + bc + ca) < 4$ (2)

+ Ta có $(2 - a)(2 - b)(2 - c) > 0 \Leftrightarrow 8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) - abc > 0$.

Suy ra $8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ca) > 0$ hay $2(a + b + c) - (ab + bc + ca) < 4$.

Vậy (2) đúng.

Câu 4:

+ Vì $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = 6$ nên $0 \leq x, y, z \leq 6$.

Suy ra: $7 + 3\ln(1 + x) - y > 0$, $7 + 3\ln(1 + y) - z > 0$ và $7 + 3\ln(1 + z) - x > 0$.

+ Bất đẳng thức Bunnhiacôpxki ta có:

$$S.[(7 + 3\ln(1 + x) - y) + (7 + 3\ln(1 + y) - z) + (7 + 3\ln(1 + z) - x)] \geq 9$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{9}{21 + 3\ln(1 + x) - x + 3\ln(1 + y) - y + 3\ln(1 + z) - z}$$

$$= \frac{9}{15 + 3\ln(1 + x)(1 + y)(1 + z)}$$

+ Theo bất đẳng thức Cô-si: $\sqrt[3]{(1 + x)(1 + y)(1 + z)} \leq \frac{1 + x + 1 + y + 1 + z}{3} = 3$

$$\Rightarrow \ln(1 + x)(1 + y)(1 + z) \leq 3\ln 3$$

$$\Rightarrow \frac{9}{15 + 3\ln(1 + x)(1 + y)(1 + z)} \geq \frac{9}{15 + 9\ln 3} = \frac{3}{5 + 3\ln 3}$$

$\Rightarrow S \geq \frac{3}{5 + 3\ln 3}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

Vậy Min $S = \frac{3}{5 + 3\ln 3}$.

Câu 5: + Nhận xét: Vì $x_0 = a$, $0 < a \neq 1$ nên $0 < x_n \neq 1$.

+ Ta có: $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 5}{2(x_n + 2)} = \frac{1}{2}\left(x_n - 2 + \frac{9}{x_n + 2}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $x_n + 2 + \frac{9}{x_n + 2} \geq 6$, dấu đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $x_n = 1$

Vậy $x_n + 2 + \frac{9}{x_n + 2} > 6$

$$\Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - 2 + \frac{9}{x_n + 2}) > 1 \Rightarrow x_n > 1, \forall n \in N^*.$$

+ Ta có $x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{2}x_n - 1 + \frac{9}{2(x_n + 2)}$.

Xét hàm $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1 + \frac{9}{2(x+2)}$.

Ta có $f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{9}{2(x+2)^2} < 0, \forall x \in (1;+\infty)$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $(1, +\infty)$

$x_n > 1 \Rightarrow f(x_n) < f(1) = 0 \Rightarrow x_{n+1} - x_n < 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n, \forall n \in N^*$.

Dãy (x_n) với $\forall n \in N^*$ giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên có giới hạn hữu hạn là $b \geq 1$

Từ $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 5}{2(x_n + 2)}$ chuyển qua giới hạn ta được

$$b = \frac{b^2+5}{2(b+2)} \Leftrightarrow b^2 + 4b - 5 = 0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -5 \end{array}\right.$. Vì $b \in [1;+\infty)$ nên chọn b = 1. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Câu 6:

+ Từ điều kiện 1) nên ta chỉ cần xác định giá trị hàm số tại $x \in \{1, 2, 3, ..., 26\}$

Cho x = y = 1 ta có $f(1) = (f(1))^3 \Rightarrow f(1) = 1$.

+ Với mỗi số tự nhiên x ($2 \leq x \leq 26$) và $x \neq 13$ và $x \neq 26$.

Ta xét 2 trường hợp:

a) Nếu x chẵn (x = 2m) thì luôn tồn tại $k \in N^*$ (k lẻ) sao cho $1 + 13k \,\vdots\, x$, tức tồn tại $h \in N^*$ sao cho $1 + 13k = hx \Rightarrow hx^2 = x + 13kx = x + 26km$.

Ta có: $f(x) = f(x + 26km) = f(x^2h) = (f(x))^2.f(h) \Rightarrow 1 = f(x).f(h)$

$\Rightarrow f(x) = 1$ (vì f(x) và $f(h) \in N^*$).

b) Nếu x lẻ (x = 2m + 1) thì luôn tồn tại $k \in N^*$ sao cho $1 + 26k \,\vdots\, x$, tức tồn tại $h \in N^*$ sao cho $1 + 26k = hx \Rightarrow hx^2 = x + 26kx$.

Ta có:

$f(x) = f(x + 26kx) = f(x^2h) = (f(x))^2.f(h) \Rightarrow 1 = f(x).f(h) \Rightarrow f(x) = 1$(vì f(x) và $f(h) \in N^*$)

Vậy với mỗi số tự nhiên x ($2 \leq x \leq 26$) và $x \neq 13$ và $x \neq 26$ ta luôn có f(x) = 1.

+ Ta xét x = 13 và x = 26:

Ta có $f(26) = f(26+26) = f(52) = f(2^2.13) = (f(2))^2.f(13) = f(13)$ (1)

Lại có: $f(13^2.2) = (f(13))^2.f(2) = (f(13))^2$ (2)

và $f(13^2.2) = f(26+12.26) = f(26) = f(13)$ (3) (theo (1))

Từ (2) và (3) suy ra $(f(13))^2 = f(13) \Rightarrow f(13) = 1 \Rightarrow f(26) = f(13) = 1$.

Vậy $f(x) = 1, \forall x \in N^*$.

Thử lại đúng

NĂM 2011

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG

Câu 1: Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} 2^{x+1} < 3x+2 \\ x\ln(1+\dfrac{1}{x})^{1+\frac{1}{x}} - x^3\ln(1+\dfrac{1}{x^2})^{1+\frac{1}{x^2}} > 1-x \end{cases}$

Câu 2: Tìm tất cả các số nguyên x, y, z, t thỏa $1 < x < y < z$ sao cho:

$$xyz - 1 = t(x-1)(y-1)(z-1)$$

Câu 3: Cho tứ diện SABC có tam giác ABC vuông tại B, $AB = BC = a\sqrt{2}$, tam giác SAC đều, mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm BC, (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với SA. Hãy dựng và tính diện tích thiết diện do mặt phẳng (α) cắt tứ diện SABC.

Câu 4: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa $a + b + c = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{a^2+a+4} + \sqrt{b^2+b+4} + \sqrt{c^2+c+4}$$

Câu 5: Cho $m \in R$. Dãy số (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 = 4m^2 - 12m + 11 \\ u_{n+1} = u_n^{\,2} - u_n \quad \forall n \in N^* \end{cases}$.

Tìm m để dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn

Câu 6: Tìm tất cả các đa thức P(x) hệ số thực thỏa: $P(x).P(3x^2) = P(3x^3 + x), \forall x$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH AN GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU

Câu 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - zx - zy = 3 \\ x^2 + y^2 + yz - zx - 2xy = -1 \end{cases}$ (1).

Câu 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x(x-1)(x-2)(x-3) = y^2.$$

Câu 3: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng 1. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua D, vuông góc với mặt phẳng (ABC), cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Tìm vị trí của M, N để diện tích toàn phần của tứ diện DAMN đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Tính các giá trị đó.

Câu 4: Cho ba số dương a, b, c thay đổi.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{\sqrt{bc}}{a + 3\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b + 3\sqrt{ca}} + \frac{\sqrt{ab}}{c + 3\sqrt{ab}}$

Câu 5 : Cho dãy số: (U_n) xác định như sau:

$$(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})\, U_n = \frac{2}{2n+1};\ n = 1, 2, 3...$$

Chứng minh rằng: $U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_{2010} < \frac{1005}{1006}$.

Câu 6: Giả sử một trong các nghiệm của đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (với $a, b \in \mathbb{Z}$) bằng tích của hai nghiệm kia.

Chứng minh rằng số $2P(-1)$ chia hết cho số $P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO NINH THUẬN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1: Giải bất phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \le 2 - \frac{x^2}{4}$ (1)

Câu 2: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \ge 2$ ta có $\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)}.C_{n-k}^{1}$ chia hết cho 4^{n-1}.

Câu 3: Cho tứ diện ABCD với tam diện vuông đỉnh A. M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng $\sqrt{3}MA + MB + MC + MD \ge AB + AC + AD$.

Câu 4: Cho n số đôi một khác nhau $a_1, a_2, ..., a_n$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x - a_1| + |x - a_2| + ... + |x - a_n|$

Câu 5: Cho dãy số (u_n), $n = 1, 2, 3,....$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_n = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{u_n^2}{2011} \end{cases}.$$

Hãy tính $\lim \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + ... + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$.

Câu 6 : Hãy tìm tất cả bộ ba số hữu tỉ (a, b, c) là những nghiệm của phương trình $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HẬU GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN VỊ THANH

Câu 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 & (1) \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 & (2) \end{cases}$

Câu 2: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^n - 1$ là một bội số của 3 và $\frac{2^n - 1}{3}$ là ước số của $4m^2 + 1$ với m là số nguyên nào đó.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = AA'$. Gọi M là điểm trên cạnh AB, xác định vị trí của M sao cho góc giữa AB' và mặt phẳng $(A'MC)$ là 60^0.

Câu 4: Cho x, y, z, t > 0 và $x^3y^3 + y^3z^3 + z^3t^3 + t^3x^3 = 1$. (*)

Chứng minh rằng: $\frac{x^9}{yzt} + \frac{y^9}{xzt} + \frac{z^9}{xyt} + \frac{t^9}{xyz} \geq 1$ (1)

Câu 5: Cho dãy số (a_n) được xác định bởi

$$a_0 = \frac{1}{\cos 2\alpha}, a_n = \frac{a_{n-1} + 1 - \tan^2\alpha}{a_{n-1}\cos 2\alpha + 1}\left(\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy và xác định giới hạn của dãy.

Câu 6: Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ (1)

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒNG THÁP
TRƯỜNG THPT THÀNH PHỐ CAO LÃNH

Câu 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(4^{x+\frac{1}{2}} - 1\right)\left(4^{y+\frac{1}{2}} - 1\right) = 7.2^{x+y-1} \\ 4^x + 4^y + 2^{x+y} - 7.2^x - 6.2^y + 14 = 0 \end{cases}$

Câu 2: Cho tập hợp X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Lập một số N gồm 2010 chữ số thỏa mãn N chia hết 99.999 và các chữ số của N được lấy từ các số thuộc tập X. Tính trung bình cộng tất cả các số N tìm được.

Câu 3: Cho tứ diện ABCD, M là một điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với AD, BD, CD tương ứng cắt các mặt phẳng (BCD), (ACD), (ABD) tại A’, B’, C’. Tìm vị trí điểm M sao cho MA’.MB’.MC’ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4: Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn xyz = 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^4y^4}{x^5+y^5+x^4y^4}+\frac{y^4z^4}{y^5+z^5+y^4z^4}+\frac{z^4x^4}{z^5+x^5+z^4x^4}\le 1$$

Câu 5: Cho dãy số $\left(x_n\right)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

i. $x_1 = 2$

ii. $x_n = \dfrac{x_1+2x_2+...+(n-1)x_{n-1}}{n(n^2-1)}$ với n là số tự nhiên lớn hơn 1.

Tính $\lim u_n$ với $u_n = (n+1)^3 . x_n$.

Câu 6: Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

i. $f(x+y)\le f(x)+f(y)\ \forall x, y\in\mathbb{R}$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÌNH PHƯỚC
TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG

Câu 1: Giải phương trình:

$$\sqrt{(x+6)^3}+\sqrt{x+6}-x^6-12x^5-48x^4-64x^3-x^2-4x=0$$

Câu 2: Tìm tất cả các số nguyên dương p sao cho phương trình

$p\sqrt{vltc} = v+l+t+c$ có nghiệm nguyên dương v, l, t, c

Câu 3: Cho điểm P nằm trên mặt cầu $\left(S\right)$ bán kính R. Xét các hình chóp P.ABC có góc tam diện vuông tại đỉnh P và ba điểm A, B, C nằm trên mặt cầu đó.

Chứng minh rằng các mặt phẳng $\left(ABC\right)$ luôn đi qua một điểm cố định. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC.

Câu 4: Xét các số thực dương v, l, t thỏa mãn hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases}\dfrac{2}{5}\le t\le \min\left\{v, l\right\}\\ vt\ge\dfrac{4}{15}\\ lt\ge\dfrac{1}{5}\end{cases}.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $E\left(v, l, t\right)=\dfrac{1}{v}+\dfrac{2}{l}+\dfrac{3}{t}$.

Câu 5: Cho số thực a. Xét dãy số (x_n), $(n = 1,2,3,...)$ được xác định bởi:

$$x_1 = a, x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n^2 + 3\right)}{3x_n^2 + 1} \text{ với } n = 1, 2, 3,...$$

Chứng minh dãy số trên có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 6: Tìm tất cả các hàm f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa phương trình hàm:

$$f(x^2) - f(y^2) = (x + y)\left(f(x) - f(y)\right) \text{ với mọi x, y thuộc } \mathbb{R}$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH GIA LAI
TRƯỜNG THPT PLEIKU

Câu 1: Giải phương trình: $\sin^{2010} x + \cos^{2010} x = 1$ (1)

Câu 2: Cho n là số nguyên dương chẵn.

Chứng minh rằng: $2^n C_n^0 + 2^{n-2} C_n^2 + 2^{n-4} C_n^4 + ... + 2^2 C_n^{n-2} + C_n^n = \dfrac{3^n + 1}{2}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn, Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Một đường thẳng d thay đổi, luôn đi qua I, cắt hai cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng tổng $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN}$ có giá trị không đổi.

Câu 4: Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $a + b + c \geq 3abc$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3abc$.

Câu 5: Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1 = 4; x_{n+1} = x_n^2 - 2; \forall n \geq 1$

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_1 x_2 ... x_n}$.

Câu 6: Tìm tất cả các hàm f: R → R thỏa mãn

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y), \forall x, y \in R.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH KON TUM
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH

Câu 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x - y)\left(2x^2 + 2xy + 2y^2 - 3\right) = 6\ln\left(\dfrac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{x + \sqrt{x^2 + 4}}\right) \\ x^5 y - 3xy - 1 = 0 \end{cases}.$$

Câu 2: Cho bảng hình chữ nhật kẻ ô vuông có 2010 hàng, 2011 cột. Ký hiệu (m, n) là ô vuông nằm ở giao của hàng thứ m và cột thứ n.

Tô màu các ô vuông của bảng theo quy tắc: lần thứ 1 tô 3 ô vuông (r, s), (r + 1, s + 1), (r + 2, s + 2) với r, s là 2 số cho trước thoả mãn $1 \le r \le 2008$, $1 \le s \le 2009$.

Từ lần thứ 2, mỗi lần tô đúng 3 ô chưa có màu nằm cạnh nhau trong cùng một hàng hoặc cùng một cột. Hỏi bằng cách đó có thể tô màu được hết tất cả các ô vuông của bảng hay không?

❑**Câu 3:** Cho hình chóp S.ABC trong đó SA, SB, SC đôi một vuông góc. Lấy A', B', C' tương ứng trên SA, SB, SC sao cho SA'.SA = SB'.SB = SC'.SC. Vẽ SH vuông góc với mp(A'B'C') tại H; SH cắt mp(ABC) tại G.

Đặt SA = a, SB = b, SC = c với $a \ge b \ge c$.

a) Chứng minh rằng G là trọng tâm tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng $a \ge (3+\sqrt{3})r$ với r là bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp S.ABC.

Câu 4 : Cho các số thực a, b, c thuộc trong khoảng (1; 2).

Chứng minh rằng $\dfrac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}}+\dfrac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a}-a\sqrt{b}}+\dfrac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b}-b\sqrt{c}} \ge 1.$

Câu 5 : Giả sử một dãy số (a_n) bị chặn thỏa mãn

$$a_n < \sum_{k=n}^{2n+2010} \frac{a_k}{k+1} + \frac{1}{2n+2011},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Chứng minh rằng $a_n < \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Câu 6 : Tồn tại hay không hàm số $f:(0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$f^2(x+2011) \ge f(x+y)\big(f(x+2011)+y-2011\big);\ \forall x>0;\ y>2011\ (*).$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BẠC LIÊU
TRƯỜNG THPT BẠC LIÊU

Câu 1: Tìm a để bất phương trình $a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 \ge 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 2: Giải hệ phương trình sau trên tập số nguyên: $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x^2 - xy + x - 2z = 1 \end{cases}$

Câu 3: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D', cạnh là a. Trên cạnh AA' kéo dài về phía A' lấy một điểm M, và trên cạnh BC kéo dài về phía C lấy một điểm N sao cho MN cắt cạnh C'D'. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

Câu 4: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện: $0 \le x, y \le 2$, $1 \le x + y \le 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y$

Câu 5: Chứng minh rằng tồn tại dãy số duy nhất $\{u_n\}$, $u_n \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, sao cho $\cos u_n = u_n^n$. Tìm giới hạn của dãy đó.

Câu 6: Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(f(x) + y^2\right) = f^2(x) - f(x)f(y) + xy + x\ ,\ \forall x, y \in \mathbb{R}\ .$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO CÀ MAU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN NGỌC HIỂN

Câu 1: Giải hệ: $\begin{cases} \sqrt{2x^2y^2 - x^4y^4} = x^{2010} + y^2\left(1 - y^{2010}\right) \\ \sqrt{1 + (x+y)^2} + y\left(2x^{1005} + y^{2011}\right) \le 0 \end{cases}$

Câu 2: Tìm các cặp số nguyên dương (x; y) thỏa hệ sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy \le 49 & (1) \\ xy(x+y) = 7p + r & (2) \text{ với } p, q, r \in \mathbb{N}, r < 7 \\ (x+y)^7 - \left(x^7 + y^7\right) = 7^5.q & (3) \end{cases}$$

Câu 3: Cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp trong một đường tròn. Gọi F là giao điểm của hai đường chéo AC và BD, E là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC. Giả sử M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Chứng minh rằng: $\dfrac{MN}{EF} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB}{CD} - \dfrac{CD}{AB}\right|$.

Câu 4: Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta có:

$$\frac{ab}{3a + 4b + 2c} + \frac{bc}{3b + 4c + 2a} + \frac{ca}{3c + 4a + 2b} \le \frac{a + b + c}{9}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 5:

1. Cho phương trình $x^{2n+1} = x + 1$.

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm thực gọi là u_n.

2. Xét dãy $\{u_n\}$, $n = 1, 2, ...$ với u_n được xác định trong câu 1. Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

❑**Câu 6:** Cho hai hàm số biến số thực *f* và *g* xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x).g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}\ .$$

Chứng minh rằng nếu f không đồng nhất bằng 0 và $|f(x)| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $|g(x)| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

ĐẠI HỌC AN GIANG
TRƯỜNG PHỔ THÔNG THỰC HÀNH SƯ PHẠM

❑**Câu 1:** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1^2 + x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ x_2^2 + x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ x_3^2 + x_3 - x_4 - 1 = 0 \\ x_4^2 + x_4 - x_1 - 1 = 0 \end{cases}$ (*)

Câu 2: Giải phương trình trong số tự nhiên $\frac{19}{x^2} + \frac{79}{y^2} = \frac{z}{1979}$ (1)

Câu 3: Cho tứ diện ABCD có DA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác DAB cân và đáy ABC là tam giác vuông tại B có $\widehat{BAC} = \alpha$. Gọi β là góc tạo bởi hai mặt phẳng (DAC) và (DBC).

Chứng minh rằng: $\tan\alpha.\tan\beta = \frac{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$

Câu 4: Cho $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}, x > 0$

a) Chứng minh rằng: $x - \frac{x^2}{2} < f(x) < x$, $\forall x > 0$

b) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + ... + f\left(\frac{n}{n^2}\right)\right)$

Câu 5: Cho dãy số $\{u_n\}: \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^{\ 2}}{2011} \end{cases}$. Đặt: $S_n = \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + ... + \frac{u_n}{u_{n+1}}$.

Tính $\lim S_n$

Câu 6: Tìm tất cả hàm số f xác định và đồng biến trên $\mathbb{R}$ thoả

$$f\left(\frac{1}{4}f(y) + 2x\right) = 4x + y + 1 \qquad (1)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. CẦN THƠ
TRƯỜNG THPT VIỆT MỸ

Câu 1: Giải phương trình:

$$27x^3 + 54x^2 + 39x + 10 = (x^2 + x + 2)\sqrt{x^2 + x + 1}$$

Câu 2: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$

Câu 3: Cho tứ diện ABCD và điểm P nằm trong tứ diện. Các đường thẳng PA, PB, PC, PD lần lượt cắt các mặt đối diện tương ứng tại A', B', C', D'.

Chứng minh rằng trong bốn tỉ số $\frac{PA}{PA'}, \frac{PB}{PB'}, \frac{PC}{PC'}, \frac{PD}{PD'}$ có ít nhất một tỉ số không bé hơn 3 và có ít nhất một tỉ số không lớn hơn 3.

Câu 4: Cho tam giác ABC không tù nội tiếp đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và A_0, B_0, C_0 lần lượt là hình chiếu của G lên BC, CA, AB. Các đường thẳng qua A, B, C lần lượt vuông góc với GA, GB, GC và đôi một cắt nhau tại A_1, B_1, C_1 ($A \in B_1C_1, B \in A_1C_1, C \in A_1B_1$). Gọi S_0, S_1 lần lượt là diện tích các tam giác $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$.

Chứng minh $\frac{32}{27} \le S_0.S_1 \le \frac{27}{16}$.

Câu 5: Cho các số thực dương a, a_0 thoả $0 < a_0 < \frac{2}{a}$

Xét dãy (a_n) được xác định bởi $\begin{cases} a_1 = a_0 \\ a_{n+1} = a_n(2 - a.a_n) \ \ n = 1, 2, 3... \end{cases}$

Chứng minh dãy (a_n) hội tụ và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Câu 6: Tìm tất cả các hàm số f : [1; +∞) → [1; +∞) thỏa mãn điều kiện

$$f\big(xf(y)\big) = yf(x) \ \ \forall x, y \in \big[1;+\infty\big)$$

ĐÁP ÁN

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG

Câu 1

- $2^{x+1} < 3x + 2$ (1) $\Leftrightarrow 2^{x+1} - 3x - 2 < 0$

Xét $f(x) = 2^{x+1} - 3x - 2$. Tập xác định R.

$$f'(x) = 2^{x+1}\ln 2 - 3;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} = \frac{3}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \log_2\left(\frac{3}{\ln 2}\right) \Leftrightarrow x = -1 + \log_2\left(\frac{3}{\ln 2}\right) = \alpha.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \alpha;\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \alpha;\ f(0) = f(2) = 0.$$

x	−∞		0		α		2		+∞
f '(x)		–		–	0	+		+	
f(x)		↘	0	↗		↘	0	↗	

Từ trên ta có (1) $\Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

- $x\ln(1 + \frac{1}{x})^{1+\frac{1}{x}} - x^3\ln(1 + \frac{1}{x^2})^{1+\frac{1}{x^2}} > 1 - x$ (2).

Do (1) $\Leftrightarrow 0 < x < 2$ nên chỉ cần xét (2) với $x > 0$.

$\forall x > 0$ ta có (2) $\Leftrightarrow x(1 + \frac{1}{x})\ln(1 + \frac{1}{x}) - x^3(1 + \frac{1}{x^2})\ln(1 + \frac{1}{x^2}) > 1 - x$

$$\Leftrightarrow (x + 1)\ln(1 + \frac{1}{x}) - 1 > x[(x^2 + 1)\ln(1 + \frac{1}{x^2}) - 1]$$

$$\Leftrightarrow x[(x + 1)\ln(1 + \frac{1}{x}) - 1] > x^2[(x^2 + 1)(1 + \frac{1}{x^2}) - 1]$$

Xét $g(t) = t[(t + 1)\ln(1 + \frac{1}{t}) - 1] = (t^2 + t)\ln(1 + \frac{1}{t}) - t$ với $t > 0$.

Ta có $g'(t) = (2t + 1)\ln(1 + \frac{1}{t}) + (t^2 + t)\left(\dfrac{-\frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t}}\right) - 1$

$$= (2t + 1)\ln(1 + \frac{1}{t}) - 2 = (2t + 1)[\ln(1 + \frac{1}{t}) - \frac{2}{2t + 1}].$$

Xét $h(t) = \ln(1 + \frac{1}{t}) - \frac{2}{2t + 1}$ với $t > 0$.

$$h'(t) = \frac{-\frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t}} + \frac{4}{(2t + 1)^2} = \frac{4}{(2t + 1)^2} - \frac{1}{t^2 + t}, \forall t > 0$$

$$= \frac{4}{4t^2 + 4t + 1} - \frac{4}{4t^2 + 4t} < 0$$

$\Rightarrow h(t)$ nghịch biến trên $(0, +\infty)$.

Mà $\lim_{t \to +\infty} h(t) = 0 \Rightarrow h(t) > 0, \forall t > 0 \Rightarrow g'(t) > 0, \forall t > 0 \Rightarrow g(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\begin{cases} (2) \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > g(x^2) \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Vậy nghiệm của (I) là $0 < x < 1$.

Câu 2

Vì $1 < x < y < z$ và $x, y, z \in Z \Rightarrow x \geq 2, y \geq 3, z \geq 4$.

Từ (1) ta suy ra:

$$t = \frac{xyz - 1}{(x - 1)(y - 1)(z - 1)}$$

$$= \frac{[(x-1)+1][(y-1)+1)][(z-1)+1]-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}$$

$$= 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(x-1)(y-1)}$$

$$+ \frac{1}{(y-1)(z-1)} + \frac{1}{(z-1)(x-1)}$$

$$\Rightarrow 1 < t \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} < 4.$$

Nếu $x \ge 4$ thì $t \le 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{15} < 2$ (loại)

$\Rightarrow t = 2$ hoặc $t = 3$ và $x = 2$ hoặc $x = 3$.

- *Trường hợp 1: $x = 2$ và $t = 2$: (1) thành: $2yz - 1 = 2(y-1)(z-1)$:* vô nghiệm (vế trái là số lẻ, vế phải là số chẵn)
- *Trường hợp 2*: $x = 2$ và $t = 3$: (1) thành $2yz - 1 = 3(y-1)(z-1)$ $\Leftrightarrow (y-3)(z-3) = 5$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} y-3=1 \\ z-3=5 \end{cases}$ (do $0 \le y-3 < z-3$) $\Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ z=8 \end{cases}$.

  Nhận nghiệm $(x; y; z; t) = (2; 4; 8; 3)$.
- *Trường hợp 3*: $x = 3$ và $t = 2$: (1) thành $3yz - 1 = 4(y-1)(z-1)$ $\Leftrightarrow (y-4)(z-4) = 11$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} y-4=1 \\ z-4=11 \end{cases}$ (do $y-4 < z-4$ và $z-4 \ge 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ z=15 \end{cases}$.

  Nhận nghiệm $(x; y; z; t) = (3; 5; 15; 2)$.
- *Trường hợp 4*: $x = 3$ và $t = 3$: (1) thành $3yz - 1 = 6(y-1)(z-1)$: vô nghiệm (vế phải là bội của 3 còn vế trái không là bội của 3).

  Vậy (1) có nghiệm là $(x; y; z; t) \in \{(2; 4; 8; 3), (3; 5; 15; 2)\}$.

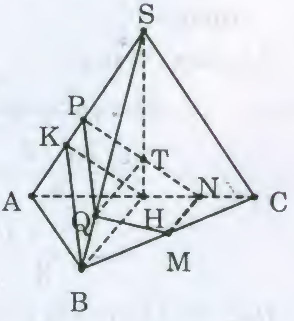
Câu 3

Gọi H là trung điểm AC, kẻ $HK \perp SA$ tại K.

Ta có $BH \perp AC$ ($BA = BC$), $(SAC) \perp (ABC)$

$\Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SA$, mà $HK \perp SA$

$\Rightarrow (BHK) \perp SA \Rightarrow (BHK) // (\alpha)$.



Từ đó có $(\alpha) \cap (ABC)$ là đường thẳng qua M và song song BH cắt AC tại N (Suy ra N là trung điểm HC); $(\alpha) \cap (SAC)$ là đường thẳng qua N và song song HK cắt SA tại P; $(\alpha) \cap (SAB)$ là đường thẳng qua P và song song BK cắt SB tại Q.

Tứ giác MNPQ là thiết diện do mp (α) cắt tứ diện SABC.

Gọi $SH \cap NP = \{T\}$. Ta có $(SBH) \cap \alpha = QT$, $BH \parallel MN$.

$$\Rightarrow QT \parallel BH \parallel MN \Rightarrow QT \perp (SAC).$$

Do đó tam giác PTQ vuông tại T và MNTQ là hình thang vuông tại N và T.

Ta có $AC = AB\sqrt{2} = 2a$; $AH = BH = \dfrac{AC}{2} = a$; $MN = \dfrac{BH}{2} = \dfrac{a}{2}$;

Δ AHK là nửa tam giác đều $\Rightarrow AK = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{a}{2}$; $HK = \dfrac{AH\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{AP}{AK} = \frac{AN}{AH} = \frac{3}{2} \Rightarrow AP = \frac{3}{2}AK = \frac{3a}{4}$$

$$\Rightarrow SP = 2a - \frac{3a}{4} = \frac{5a}{4};\ SK = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow \frac{SP}{SK} = \frac{5}{6}.$$

$$\frac{PT}{HK} = \frac{SP}{SK} = \frac{ST}{SH} = \frac{QT}{BH} \Rightarrow PT = \frac{5}{6}HK = \frac{5a\sqrt{3}}{12};$$

$$QT = \frac{5}{6}BH = \frac{5}{6}a;\ TN = \frac{HN}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Do đó: $S_{MNPQ} = S_{MNTQ} + S_{PTQ} = \dfrac{1}{2}(MN + TQ).TN + \dfrac{1}{2}TQ.PT$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{5}{6}a\right).\frac{a\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}.\frac{5}{6}a.\frac{5a\sqrt{3}}{12} = \frac{19a^2\sqrt{3}}{48}.$$

Câu 4

Ta có: a, b, c là các số thực không âm thỏa $a + b + c = 3$ nên a, b, c thuộc đoạn $[0; 3]$.

Với $\forall x \in [0; 3]$, ta có $\sqrt{x^2 + x + 4} \le \dfrac{2x + 6}{3}$ (*)

Thật vậy:

(*) $\Leftrightarrow 9\left(x^2 + x + 4\right) \le 4x^2 + 36 + 24x \Leftrightarrow 5x^2 - 15x \le 0 \Leftrightarrow 5x(x - 3) \le 0$ (đúng)

Áp dụng (*) ta có

$$P = \sqrt{a^2 + a + 4} + \sqrt{b^2 + b + 4} + \sqrt{c^2 + c + 4}$$

$$\le \frac{2a + 6}{3} + \frac{2b + 6}{3} + \frac{2c + 6}{3} = \frac{2(a + b + c) + 18}{3}$$

$$= \frac{2(3) + 18}{3} = 8.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = 3$; $b = c = 0$ và các hoán vị.

Vậy Max $P = 8$.

Câu 5

Xét hàm số $f(x) = x^2 - x$ ta có: . $\begin{cases} u_1 = (2m-3)^2 + 2 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Ta có: $f'(x) = 2x - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$; $f(1/2) = -1/4$;
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$; $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$1/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - x = x \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 2.$$

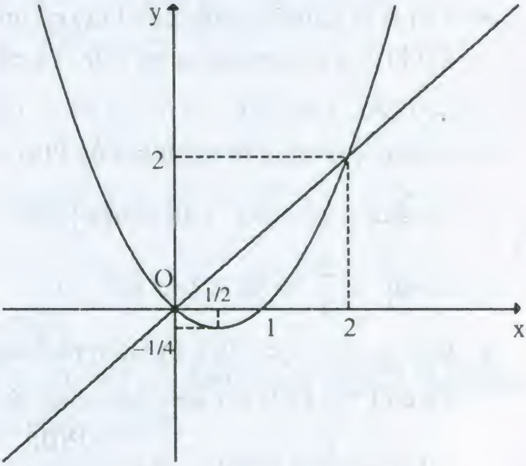
Do $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và f liên tục trên R nên nếu (u_n) hội tụ về L thì ta có $L = f(L)$ tức là L là nghiệm của phương trình $f(x) = x \Rightarrow L \in \{0; 2\}$.

Có 2 trường hợp:

❧ *Trường hợp 1:* $(2m-3)^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow m = 3/2$.
Ta có $u_1 = 2$.
Giả sử $u_k = 2$, khi đó $u_{k+1} = f(u_k) = f(2) = 2$
$\Rightarrow u_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim u_n = 2$.

❧ *Trường hợp 2:* $(2m-3)^2 + 2 > 2 \Leftrightarrow m \neq 3/2$.
Ta có $u_1 = (2m-3)^2 + 2 > 2$, $f((2; +\infty)) = (2; +\infty)$
$\Rightarrow u_n \in (2; +\infty), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mà $f(x) > x, \forall x \in (2; +\infty)$
$\Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
$\Rightarrow (u_n)$ tăng.
Nếu (u_n) bị chặn trên, kết hợp (u_n) tăng ta có (u_n) hội tụ về
$L \in \{0; 2\}$ (*).
Mà (u_n) tăng
$\Rightarrow u_n \geq u_1 \forall n \in \mathbb{N}^*$
$\Rightarrow L \geq u_1 = (2m-3)^2 + 2 > 2$: mâu thuẫn với (*).
Vậy (u_n) tăng và không bị chặn trên.
Từ đó có $\lim u_n = +\infty$.



Kết luận: (u_n) có giới hạn hữu hạn $\Leftrightarrow m = 3/2$.

Câu 6

$$P(x).P(3x^2) = P(3x^3 + x), \forall x \in \mathbb{R} \ (1)$$

- Trường hợp $P(x) \equiv c$ (c là hằng số thực)

  Khi đó (1) $\Leftrightarrow c^2 = c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 1 \end{array}\right.$.

- Trường hợp $\deg P = n \geq 1$

  Giả sử P(x) thỏa (1).

  Với mỗi đa thức F(x) khác đa thức không, kí hiệu F* hoặc (F(x))* chỉ hệ số bậc cao nhất của F(x)

  (1) $\Rightarrow P^*.P^*.3^n = P^*.3^n \Leftrightarrow P^* = 1$.

  (1) $\Rightarrow P^2(0) = P(0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P(0) = 0 \\ P(0) = 1 \end{array}\right.$.

  Nếu P(0) = 0 thì $P(x) = x^m Q(x)$ với m nguyên dương và Q(x) là đa thức hệ số thực thỏa $Q(0) \neq 0$.

  Khi đó: (1) $\Leftrightarrow x^m Q(x) 3^m x^{2m} Q\left(3x^2\right) = \left(3x^3 + x\right)^m Q(3x^3 + x), \forall x$.

  $\Leftrightarrow Q(x)3^m x^{2m} Q\left(3x^2\right) = \left(3x^2 + 1\right)^m Q(3x^3 + x), \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

  $\Leftrightarrow Q(x)3^m x^{2m} Q\left(3x^2\right) = \left(3x^2 + 1\right)^m Q(3x^3 + x), \forall x \in \mathbb{R}$

  (Do Q(x) là đa thức)

  Từ đây lấy x = 0 ta có 0 = Q(0) mâu thuẫn với giả thiết đang xét là $Q(0) \neq 0$

  Vậy không thể có P(0) = 0 tức là phải có P(0) = 1.

- Gọi α là nghiệm phức của P(x) có môđun lớn nhất

  Do $P(0) \neq 0$ nên suy ra $|\alpha| > 0$. Ta có $P(\alpha) = 0$ nên từ (1)

  $\Rightarrow P(3\alpha^3 + \alpha) = 0$.

  $\Rightarrow 3\alpha^3 + \alpha$ cũng là nghiệm của P(x) $\Rightarrow \left|3\alpha^3 + \alpha\right| \leq |\alpha|$.

  $\Rightarrow 2|\alpha| \geq |\alpha| + \left|3\alpha^3 + \alpha\right| = |\alpha| + \left|-3\alpha^3 - \alpha\right| \geq \left|\alpha - 3\alpha^3 - \alpha\right| = 3|\alpha|^3$

  $\Rightarrow |\alpha|^2 \leq \dfrac{2}{3} \Rightarrow |\alpha| < 1 \Rightarrow |\alpha|^n < 1$

- Gọi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là n nghiệm phức của P(x)

  Ta có P* = P(0) = 1 nên theo định lý Viet có

  $|\alpha_1||\alpha_2|...|\alpha_n| = |\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n| = \left|\dfrac{P(0)}{P^*}\right| = 1 \Rightarrow 1 = |\alpha_1||\alpha_2|...|\alpha_n| < |\alpha|^n < 1$: vô lí

  $\Rightarrow$ Không có đa thức P(x) nào có bậc ≥ 1 mà thỏa (1)

  Vậy P(x) là đa thức hệ số thực thỏa (1) $\Leftrightarrow P(x) \equiv 0$ hoặc $P(x) \equiv 1$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH AN GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU

Câu 1

Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2 - z(x+y) + z^2 - 3 = 0\\(x-y)^2 - z(x-y) + 1 = 0\end{cases}$ (2)

Đặt $\begin{cases}u = x + y\\v = x - y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{u+v}{2}\\y = \dfrac{u-v}{2}\end{cases}$.

Hệ (2) trở thành $\begin{cases}u^2 - zu + z^2 - 3 = 0\\v^2 - zv + 1 = 0\end{cases}$ (3).

Hệ (3) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}z^2 \le 4\\z^2 \ge 4\end{cases} \Leftrightarrow z = \pm 2$.

Với $z = 2$ có (3) $\Leftrightarrow u = v = 1 \Rightarrow \begin{cases}x = 1\\y = 0\end{cases}$.

Với $z = -2$ có (3) $\Leftrightarrow u = v = -1 \Rightarrow \begin{cases}x = -1\\y = 0\end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là (1; 0; 2); (–1; 0; –2).

Câu 2

Ta có $y^2 = (x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2)$

$= (x^2 - 3x + 1 - 1)(x^2 - 3x + 1 + 1) = (x^2 - 3x + 1)^2 - 1$

$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1 - y)(x^2 - 3x + 1 + y) = 1$

*) $\begin{cases}x^2 - 3x + 1 - y = -1\\x^2 - 3x + 1 + y = -1\end{cases}$ có nghiệm (1; 0) và (2; 0).

*) $\begin{cases}x^2 - 3x + 1 - y = 1\\x^2 - 3x + 1 + y = 1\end{cases}$ có nghiệm (0; 0) và (3; 0).

Câu 3

* $(P) \perp (ABC)$ và $(P) \cap (ABC) = MN$

Trong mặt phẳng (P) kẻ $DH \perp MN$ thì $DH \perp (ABC)$. Do ABCD là tứ diện đều suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

* Đặt $AM = x; AN = y, x, y \in [0; 1]$

$S_{tp} = S_{AMD} + S_{AND} + S_{AMN} + S_{DMN}$

$$= \frac{1}{2}AM.AD.\sin 60^0 + \frac{1}{2}AN.AD.\sin 60^0 + \frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0 + \frac{1}{2}MN.DH$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(x + y + xy) + \frac{\sqrt{6}}{6}.\sqrt{x^2 + y^2 - xy}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(x + y + xy) + \frac{\sqrt{6}}{6}.\sqrt{(x + y)^2 - 3xy}$$

* Ta có $S_{AMN} = S_{AMH} + S_{ANH}$ hay

$$\frac{\sqrt{3}}{4}.xy = \frac{1}{2}x.AH.\sin 30^0 + \frac{1}{2}y.AH.\sin 30^0 = \frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3}.(x + y) \Rightarrow x + y = 3xy$$

Vậy $S_{tp} = \sqrt{3}xy + \frac{\sqrt{6}}{6}.\sqrt{3xy.(3xy - 1)}$

* S_{tp} lớn nhất khi và chỉ khi tích x.y lớn nhất, S_{tp} nhỏ nhất khi và chỉ khi tích x.y nhỏ nhất, $0 \le x, y \le 1$.

Đặt $xy = t; t \in [0; 1]$ thì $x + y = 3t$. Khi đó x và y là nghiệm của phương trình bậc hai $f(z) = z^2 - 3tz + t = 0$ (1). Những giá trị có thể của t là những giá trị làm cho phương trình (1) có hai nghiệm t_1; t_2 thỏa mãn điều kiện $0 \le t_1 \le t_2 \le 1$

Theo định lí đảo của tam thức bậc hai ta có:

$$\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(0) \ge 0 \\ af(1) \ge 0 \\ \frac{S}{2} < 1 \\ \frac{S}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t^2 - 4t \ge 0 \\ t \ge 0 \\ 1 - 2t \ge 0 \\ 0 < \frac{3t}{2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{9} \le t \le \frac{1}{2}$$

* Vậy

$\text{MinS}_{tp} = \frac{\sqrt{3}}{9}\left(4 + \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow t = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = y = \frac{2}{3}$. Khi đó M, N lần lượt là giao điểm của AB, AC với đường thẳng đi qua H song song với BC.

$$\text{MaxS}_{tp} = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M \equiv B, N \equiv K \\ x = \frac{1}{2}, y = 1 \Leftrightarrow M \equiv I, N \equiv C \end{array}\right.$$

Với I, K lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Câu 4

Đặt $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c}; x, y, z \in (0, +\infty)$.

Khi đó $P = \dfrac{yz}{x^2 + 3yz} + \dfrac{zx}{y^2 + 3zx} + \dfrac{xy}{z^2 + 3xy}$

Ta có: $3P = \dfrac{3yz}{x^2 + 3yz} + \dfrac{3zx}{y^2 + 3zx} + \dfrac{3xy}{z^2 + 3xy} =$

$$= 3 - \left(\frac{x^2}{x^2 + 3yz} + \frac{y^2}{y^2 + 3zx} + \frac{z^2}{z^2 + 3xy}\right) = 3 - Q$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ số:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3yz}}; \frac{y}{\sqrt{y^2 + 3zx}}; \frac{z}{\sqrt{z^2 + 3xy}}\right)$$

và $\left(\sqrt{x^2 + 3yz}; \sqrt{y^2 + 3zx}; \sqrt{z^2 + 3xy}\right)$

Ta được:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3yz}}.\sqrt{x^2 + 3yz} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 3zx}}.\sqrt{y^2 + 3zx} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 3xy}}.\sqrt{z^2 + 3xy}\right)^2$$

$\leq Q.\left(x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3yz + 3zx\right)$

Vì: $xy + yz + zx \leq \dfrac{(x + y + z)^2}{3}$.

Suy ra $Q \geq \dfrac{3}{4}$ do đó $3P = 3 - Q \leq \dfrac{9}{4} \Rightarrow P \leq \dfrac{3}{4}$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$x = y = z$ hay $a = b = c$. Vậy $\min P = \dfrac{3}{4}$.

Câu 5

Ta có: $U_k = \dfrac{2}{(2k+1)(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} = \dfrac{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{2k+1}$

$$\Rightarrow U_k < \frac{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{2\sqrt{k(k+1)}}, \text{ do } \sqrt{k(k+1)} < \frac{k + (k+1)}{2} = \frac{2k+1}{2}$$

$$\Rightarrow U_k < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Do đó: $U_1 + U_2 + ... + U_k < (1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}) + (\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}})$

$$+ ... + \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \Rightarrow U_1 + U_2 + ... + U_k < 1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Vì $1 - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{4k+4}} < 1 - \dfrac{2}{\sqrt{k2 + 4k + 4}} = 1 - \dfrac{2}{k+2} = \dfrac{k}{k+2}$

Vậy: $U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_k < \frac{k}{k+2}$

Khi k = 2010 thì: $U_1 + U_2 + ... + U_{2010} < \frac{2010}{2010+2} = \frac{1005}{1006}$.

Câu 6

Giả sử u, v và uv là các nghiệm của đa thức P(x), theo định lý Viet ta có:

$$u + v + uv = -a,\ uv(1 + u + v) = b,\ u^2v^2 = -c$$

Xét trường hợp $a \neq 1$, ta nhận được

$$b - c = uv(1 + u + v + uv) = uv(1 - a)$$

Suy ra $uv = \frac{b-c}{1-a}$ là số hữu tỉ. Vì $u^2v^2 = -c$ là số nguyên nên uv cũng nguyên.

Do đó ta có $P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))$

$$= (1 + a + b + c) + (-1 + a - b + c) - 2(1 + c)$$
$$= 2(a - 1) = -2(u + v + uv + 1) = -2(1 + u)(1 + v) \neq 0$$

Và $2P(-1) = 2(-1 - u)(-1 - v)(-1 - uv)$

Suy ra $\frac{2P(-1)}{P(1) + P(-1) - 2(1 + P(0))} = 1 + uv$ là số nguyên.

- Trong trường hợp a = 1 ta có đẳng thức

$$0 = u + v + uv + 1 = (1 + u)(1 + v)$$

Do đó một trong các nghiệm bằng –1, hay số 2P(–1) = 0 chia hết cho mọi số nguyên.

Suy ra điều cần chứng minh.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH NINH THUẬN
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Câu 1

Điều kiện $-1 \le x \le 1$, đặt $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0, \pi]$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha} \le 2 - \frac{\cos^2\alpha}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \le 2 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos^4\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]^2\left[\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\right] \ge 0 \quad (2)$$

Chú ý rằng (2) luôn đúng với mọi $\alpha \in [0, \pi]$.

Vậy nghiệm của (1) là $-1 \le x \le 1$.

Câu 2

Ta có
$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)}.C_{n-k}^{1} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)C_{2n+1}^{2(n-k)} = \sum_{k=1}^{n} kC_{2n+1}^{2k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{2k.(2n+1)!}{2.(2k)!(2n-2k+1)!} = \frac{2n+1}{2}\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1}.$$

Mặt khác $4^n = (1+1)^{2n} - (1-1)^{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1}$.

Do đó $\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)}.C_{n-k}^{1} = \frac{2n+1}{2}.\frac{1}{2}.4^n = (2n+1).4^{n-1}$ chia hết cho 4^{n-1}.

Câu 3

Gọi B_1, C_1, D_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên AB, AC, AD. Ta có $\sqrt{3}MA = \sqrt{3(AB_1^2 + AC_1^2 + AD_1^2)} \ge AB_1 + AC_1 + AD_1$

và $MB \ge B_1B$, $MC \ge C_1C$, $MD \ge D_1D$

do đó $\sqrt{3}MA + MB + MC + MD$
$$\ge (AB_1 + B_1B) + (AC_1 + C_1C) + (AD_1 + D_1D) \ge AB + AC + AD$$

đẳng thức xảy ra khi M trùng A.

Câu 4

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

- Nếu $n = 2m$,

$$y = (|x - a_1| + |x - a_{2m}|) + (|x - a_2| + |x - a_{2m-1}|) + ... + (|x - a_m| + |x - a_{m+1}|)$$
$$\ge (a_{2m} - a_1) + (a_{2m-1} - a_2) + ... + (a_{m+1} - a_m)$$
$$\ge -(a_1 + a_2 + ... + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{2m})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a_1 \le x \le a_{2m} \\ a_2 \le x \le a_{2m-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_m \le x \le a_{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow a_m \le x \le a_{m+1}$

Vậy $\min y = -(a_1 + a_2 + ... + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{2m})$

khi $a_m \le x \le a_{m+1}$

- Nếu $n = 2m + 1$,

$$y = (|x - a_1| + |x - a_{2m+1}|) + (|x - a_2| + |x - a_{2m}|)$$
$$+ ... + (|x - a_m| + |x - a_{m+2}|) + |x - a_{m+1}|$$

$$\geq (a_{2m+1} - a_1) + (a_{2m} - a_2) + \ldots + (a_{m+2} - a_m) + |x - a_{m+1}|$$

$$\geq (a_{2m+1} - a_1) + (a_{2m} - a_2) + \ldots + (a_{m+2} - a_m) + 0$$

$$\geq -(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + (a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{2m+1})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a_1 \leq x \leq a_{2m+1} \\ a_2 \leq x \leq a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m \leq x \leq a_{m+2} \\ x - a_{m+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_m \leq x \leq a_{m+2} \\ x = a_{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow x = a_{m+1}$$

Vậy $\min y = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) + (a_{m+2} + a_{m+3} + \ldots + a_{2m+1})$ khi $x = a_{m+1}$.

Câu 5

Ta có $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{u_n^2}{u_n.u_{n+1}} = \dfrac{2011(u_{n+1} - u_n)}{u_n.u_{n+1}} = 2011\left(\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$

Do đó $\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + \ldots + \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = 2011\left(1 - \dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$.

Mặt khác dãy số (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn dưới bởi 1.

Nếu (u_n) bị chặn trên thì tồn tại một giới hạn hữu hạn bằng a, suy ra

$$\lim u_{n+1} = \lim\left(u_n + \frac{u_n^2}{2011}\right) \Leftrightarrow a = a + \frac{a^2}{2011} \Leftrightarrow a = 0 \text{ (vô lý)}$$

Vì vậy dãy không bị chặn trên kéo theo $\lim u_n = \infty$ hay $\lim \dfrac{1}{u_{n+1}} = 0$.

Vậy $\lim\left(\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_2}{u_3} + \ldots + \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right) = 2011$.

Câu 6

Theo định lý Viet ta có (I) $\begin{cases} a + b + c = -a \\ bc + ca + ab = b \\ abc = -c \end{cases}$

* Nếu $c = 0$, (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ ab = b \end{cases}$, giải ra ta được $(a, b) \in \{(0, 0), (1, -2)\}$.

* Nếu $c \neq 0$, (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -a \\ bc + ca - 1 = b \\ ab = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -a \\ c(b + a) - 1 = b \\ ab = -1 \end{cases}$

+ Nếu $a + b = 0$, hệ trở thành $\begin{cases} c = -a \\ -1 = b \\ ab = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$

+ Nếu $a + b \neq 0$,

$$(\text{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -a \\ c(b + a) - 1 = b \\ ab = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2a - b \\ c(b + a) - 1 = b \\ b = \dfrac{-1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2a + \dfrac{1}{a} & (1) \\ c(b + a) - 1 = b & (2) \\ b = \dfrac{-1}{a} & (3) \end{cases}$$

Thế (1), (3) vào (2) ta dẫn đến phương trình $2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$, không có nghiệm hữu tỉ.

Vậy bộ ba số cần tìm là (0, 0, 0), (1, –2, 0), (1, –1, –1).

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HẬU GIANG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN VỊ THANH

Câu 1

Nhận thấy $x = 0$ không thỏa phương trình (2)

Chia 2 vế của hai phương trình cho x^2, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{y^2}{x} = 6 \\ \dfrac{1}{x^2} + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x} + y\right) = 6 \\ \dfrac{1}{x^2} + y^2 = 5 \end{cases}$$

Đặt $u = \dfrac{1}{x} + y;\ v = \dfrac{y}{x}$. Suy ra $\begin{cases} uv = 6 \\ u^2 - 2v = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{6}{u} \\ u^3 - 5u - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = 3 \\ \dfrac{y}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là: $(1; 2); \left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$

Câu 2

Trước hết, lưu ý 3 là ước của $2^n - 1$ khi và chỉ khi n là số chẵn

Bây giờ, giả sử $\ell \geq 3$ là một ước số dương lẻ của n. Khi đó $2^\ell - 1$ không chia hết cho 3 nhưng là một ước số của $2^n - 1$, vì vậy nó là một ước số của $4m^2 + 1$.

Mặt khác, $2^r - 1$ có một ước số nguyên tố p có dạng $4r + 3$.

Lúc đó ta có $(2m)^2 \equiv -1 \pmod{4r+3}$.

Tuy nhiên bình phương của một số không thể nào $\equiv -1 \pmod{4r+3}$.

Như vậy n có dạng 2^k với $k \geq 1$. Với số n như thế ta có:

$$\frac{2^n - 1}{3} = \left(2^{2^1} + 1\right)\left(2^{2^2} + 1\right)\left(2^{2^3} + 1\right)\ldots\left(2^{2^{k-1}} + 1\right).$$

Các thừa số ở vế phải của đẳng thức trên đều nguyên tố cùng nhau với 2 bởi vì tất cả các số đều là lẻ. Thật vậy, giả sử các số trên không nguyên tố cùng nhau. Khi đó tồn tại số nguyên tố p sao cho p chia hết đồng thời cả $2^{2^a} + 1$ lẫn $2^{2^b} + 1$ với $a < b$.

Lúc đó $2^{2^a} + 1 \equiv 2^{2^b} + 1 \equiv -1 \pmod p$.

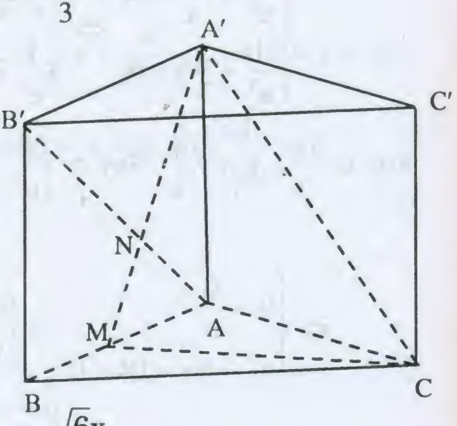
Suy ra $-1 \equiv 2^{2^b} \equiv \left(2^{2^a}\right)^{2^{b-a}} \equiv \left((-1)^2\right)^{2^{b-a-1}} \equiv -1 \pmod p$ suy ra $p = 2$.

Điều này mâu thuẫn.

Chúng cũng là các số Fermat, những số đó là các số nguyên tố cùng nhau. Vì vậy theo định lí thặng dư Trung Quốc, tồn tại số nguyên dương c sao cho $c \equiv 2^{2^{i-1}} \pmod{2^{2^i} + 1}$ với $i = 1, 2, \ldots, k-1$ và $c \equiv 0 \pmod 2$

Đặt $c = 2m$ thì $4m^2 + 1$ là một bội số của $\dfrac{2^n - 1}{3}$.

Câu 3



Ta có thể giả sử $AB = AC = AA' = 1$, gọi $N = A'M \cap AB'$ và đặt $AM = x$. Nhận thấy tam giác AMN đồng dạng với tam giác $B'A'N$ nên $\dfrac{AN}{B'N} = x$.

Mà ta có $AN + NB' = \sqrt{2}$ từ đó suy ra

$$AN = \frac{x\sqrt{2}}{x+1} \Rightarrow d\left(A, (A'MC)\right) = \frac{\sqrt{6}x}{2(x+1)}$$

Gọi V là thể tích của tứ diện $A'AMC$ thì $V = \dfrac{1}{3}AA'.S_{AMC} = \dfrac{x}{6}$ (1).

Mặt khác ta lại có:

$$CM = A'M = \sqrt{1 + x^2};\ A'C = \sqrt{2} \Rightarrow S_{A'CM} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2x^2}$$

suy ra: $V=\frac{1}{3}.d\left(A,\left(A'MC\right)\right).S_{A'MC}=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{6}x}{2(x+1)}.\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2}=\frac{x\sqrt{6\left(2x^2+1\right)}}{12(x+1)}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{x}{6}=\frac{x\sqrt{6\left(2x^2+1\right)}}{12(x+1)}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Kết luận: Vậy M là trung điểm AB.

Câu 4

Đặt $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$, $d=t^3$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow ab+bc+cd+da=1$ và (1) trở thành:

$$\frac{a^3}{\sqrt[3]{bcd}}+\frac{b^3}{\sqrt[3]{acd}}+\frac{c^3}{\sqrt[3]{abd}}+\frac{d^3}{\sqrt[3]{abc}}\geq 1$$

Áp dụng BDT Cauchy, ta có:

$$\frac{a^3}{\sqrt[3]{bcd}}+\frac{b^3}{\sqrt[3]{acd}}+\frac{c^3}{\sqrt[3]{abd}}+\frac{d^3}{\sqrt[3]{abc}}$$
$$\geq 3\left(\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\right)$$

Do đó, ta cần chứng minh:

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3} \quad (2)$$

Ta có: $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{a(b+c+d)}{9}\geq\frac{2}{3}a^2$

$$\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{b(a+c+d)}{9}\geq\frac{2}{3}b^2$$
$$\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{c(a+b+d)}{9}\geq\frac{2}{3}c^2$$
$$\frac{d^3}{a+b+c}+\frac{d(a+b+c)}{9}\geq\frac{2}{3}d^2$$

Khi đó: $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}$

$$\geq\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)-\frac{2}{9}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

Mặt khác ta dễ dàng chứng minh được:

$$2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\leq 3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$$

Và: $a^2+b^2+c^2+d^2=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\sqrt{b^2+c^2+d^2+a^2}$

$$\geq ab+bc+cd+da$$

Vậy $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\ge\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge\frac{1}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=d=\frac{1}{2}$.

Câu 5:

Giả sử x_n, y_n là một nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x_n=x_{n-1}+\left(1-\tan^2\alpha\right).y_{n-1},\ x_0=1\\ y_n=x_{n-1}\cos2\alpha+y_{n-1},\ y_0=\cos2\alpha\end{cases}(*).$$

Khi đó $a_n=\frac{x_n}{y_n}$ là số hạng tổng quát của dãy đã cho.

Thật vậy, với $n=0$ ta có $a_0=\frac{x_0}{y_0}$. Giả sử $a_n=\frac{x_n}{y_n}$. Khi đó

$$a_{n+1}=\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=\frac{x_n+\left(1-\tan^2\alpha\right).y_n}{x_n\cos2\alpha+y_n}=\frac{\frac{x_n}{y_n}+1-\tan^2\alpha}{\frac{x_n}{y_n}\cos2\alpha+1}=\frac{a_n+1-\tan^2\alpha}{a_n\cos2\alpha+1}$$

Từ hệ $(*)$ ta có $x_n+\lambda y_n=(1+\lambda\cos2\alpha)x_{n-1}+\left(\lambda+1-\tan^2\alpha\right)y_{n-1}\ (**)$

Chọn λ sao cho: $\lambda+1-\tan^2\alpha=\lambda(1+\lambda\cos2\alpha)$

$$\Leftrightarrow 1-\tan^2\alpha=\lambda^2.\cos2\alpha\Rightarrow\lambda=\pm\frac{1}{\cos\alpha}$$

Khi đó $(**)\Leftrightarrow x_n+\lambda y_n=(1+\lambda\cos2\alpha)(x_{n-1}+\lambda y_{n-1})$

$$=\ldots=(1+\lambda\cos2\alpha)^n(x_0+\lambda y_0)=(1+\lambda\cos2\alpha)^{n+1}$$

Lần lượt thay $\lambda=\pm\frac{1}{\cos\alpha}$ vào đẳng thức trên ta được

$$\begin{cases}x_n+\frac{1}{\cos\alpha}y_n=\left(1+\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha}\right)^{n+1}\\ x_n-\frac{1}{\cos\alpha}y_n=\left(1-\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha}\right)^{n+1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_n=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha}\right)^{n+1}+\left(1-\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha}\right)^{n+1}\right]\\ y_n=\frac{\cos\alpha}{2}\left[\left(1+\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha}\right)^{n+1}-\left(1-\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha}\right)^{n+1}\right]\end{cases}$$

$$\text{Vậy } a_n = \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\left(1+\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha}\right)^{n+1}+\left(1-\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha}\right)^{n+1}-\left(1-\frac{\cos2\alpha}{\cos\alpha}\right)^{n+1}} \Rightarrow \lim a_n = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Câu 6:

Thay y bởi $x + y$ vào (1), ta có:

$$xf(x) - (x+y)f(x+y) = -yf(2x+y)$$

$$\Leftrightarrow xf(x) - (x-y+2y)f(x+y) = -yf(2x+y)$$

$$\Leftrightarrow xf(x) - (x-y)f(x+y) - 2yf(x+y) = -yf(2x+y) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), với mọi $y \neq 0$ ta thu được:

$$f(y) - 2f(x+y) = -2f(2x+y)$$

Suy ra: $f(x+y) = \dfrac{f(y)+f(2x+y)}{2}$ (3)

Chọn $x = -\dfrac{y}{2}$ với $y \neq 0$, ta được: $f(\dfrac{y}{2}) = f(\dfrac{y+0}{2}) = \dfrac{f(y)+f(0)}{2}$ (4)

Với mọi $z, t \in \mathbb{R}$ và $t \neq 0$ ta chọn $\begin{cases} x = \dfrac{z-t}{2} \\ y = t \end{cases}$

khi đó (3) trở thành $f(\dfrac{z+t}{2}) = \dfrac{f(z)+f(t)}{2}$ (5)

Từ (4) và (5) ta suy ra rằng $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ta luôn có:

$$f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Vì f liên tục thỏa $f(\dfrac{x+y}{2}) = \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ nên $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$

Thử lại, nhận thấy $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy: $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒNG THÁP
TRƯỜNG THPT THÀNH PHỐ CAO LÃNH

Câu 1

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(4^{x+\frac{1}{2}}-1\right)\left(4^{y+\frac{1}{2}}-1\right) = 7.2^{x+y-1} & (1) \\ 4^x + 4^y + 2^{x+y} - 7.2^x - 6.2^y + 14 = 0 & (2) \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = 2^x \\ v = 2^y \end{cases}$ điều kiện $u > 0$; $v > 0$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow u^2 + (v-7)u + v^2 - 6v + 14 = 0$

Để phương trình có nghiệm thì

$$\Delta = (v-7)^2 - 4v^2 + 24v - 56 \geq 0 \Leftrightarrow -3v^2 + 10v - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq v \leq \frac{7}{3}$$

$$(2) \Leftrightarrow v^2 + (u-6)v + u^2 - 7u + 14 = 0$$

$$\Delta = (u-6)^2 - 4u^2 + 28u - 56 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3u^2 + 16u - 20 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq u \leq \frac{10}{3}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left(2u - \frac{1}{u}\right)\left(2v - \frac{1}{v}\right) = \frac{7}{2}$$

Xét hàm số $z = 2t - \frac{1}{t}$ với $t \geq 1$; $z' = 2 + \frac{1}{t} > 0$ với $t \geq 1$.

$\Rightarrow$ z đồng biến khi $t \geq 1$

Khi đó $\qquad u \geq 2 \Rightarrow 2u - \frac{1}{u} \geq \frac{7}{2}$

$\qquad v \geq 1 \Rightarrow 2v - \frac{1}{v} \geq 1$

Suy ra $\qquad \left(2u - \frac{1}{u}\right)\left(2v - \frac{1}{v}\right) \geq \frac{7}{2}$

Vậy (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Câu 2

Gọi M là tập hợp các số N thỏa điều kiện đề bài.

Ta xây dựng ánh xạ f như sau:

Nếu $N = \overline{a_1a_2\ldots a_{2010}}$ thì $f(N) = \overline{b_1b_2\ldots b_{2010}}$

với $b_i = 9 - a_i$ $(i \in \overline{1;2010})$.

Với cách xây dựng như vậy, ta có: $N + f(N) = \underbrace{\overline{99\ldots9}}_{2010}$ chia hết cho 99.999

Suy ra f là song ánh từ $M \to M$

Từ đó ta có

$$2\sum_{N\in M} N = \sum_{N\in M}(N + f(N)) = |M|\left(\underbrace{\overline{99\ldots9}}_{2010}\right) = \underbrace{99\ldots9}_{2010} = 10^{2010} - 1$$

Suy ra trung bình cộng tất cả các số N tìm được là: $\frac{10^{2010}-1}{2}$

Câu 3

Trong mặt phẳng (ABC):

$$AM \cap BC = \{A_1\}, BM \cap AC = \{B_1\}, CM \cap AB = \{C_1\}$$

Trong (DAA_1): Kẻ đường thẳng qua M song song với AD cắt DA_1 tại A'

Xét tam giác DAA_1 có MA' // AD nên $\frac{MA'}{DA} = \frac{MA_1}{AA_1} = \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}$

Tương tự ta có $\frac{MB'}{DB} = \frac{MB_1}{BB_1} = \frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta ABC}}$, $\frac{MC'}{DC} = \frac{MC_1}{CC_1} = \frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}$

Suy ra $\frac{MA'}{DA}+\frac{MB'}{DB}+\frac{MC'}{DC} = 1\left(\text{do } S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = S_{ABC}\right)$

Ta có $\frac{MA'}{DA}+\frac{MB'}{DB}+\frac{MC'}{DC} \geq 3\sqrt[3]{\frac{MA'}{DA}.\frac{MB'}{DB}.\frac{MC'}{DC}}$

Suy ra MA'.MB'.MC' $\leq \frac{1}{27}$DA.DB.DC (không đổi)

Vậy giá trị lớn nhất MA'.MB'.MC' là $\frac{1}{27}$DA.DB.DC, đạt được khi

$$\frac{MA'}{DA} = \frac{MB'}{DB} = \frac{MC'}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{MA_1}{AA_1} = \frac{MB_1}{BB_1} = \frac{MC_1}{CC_1} = \frac{1}{3}$$

Hay M là trọng tâm tam giác ABC.

Câu 4

Đặt $\frac{1}{x} = a; \frac{1}{y} = b; \frac{1}{z} = c$ khi a, b, c dương và abc = 1, bài toán trở thành:

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn abc = 1, chứng minh:

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$$

Ta có:

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{ab}{a^3b^2 + a^2b^3 + ab} = \frac{1}{a^2b + ab^2 + 1} = \frac{1}{a^2b + ab^2 + abc}$$

$$= \frac{1}{ab(a + b + c)} = \frac{c}{a + b + c}$$

Hoàn toàn tương tự ta có:

$$\frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} \leq \frac{a}{a + b + c} \text{ và } \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq \frac{b}{a + b + c}$$

Từ đó ta được:

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1,$$

Dấu « = » xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

Câu 5

Ta có $x_2 = \dfrac{1}{3}$

Với $n \geq 3$ ta có: $x_1 + 2x_2 + ... + nx_n = n^3x_n$. (1)

$x_1 + 2x_2 + ... + (n-1)x_n = (n-1)^3x_{n-1}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra: $n\,x_n = n^3x_n - (n-1)^3x_{n-1}$

$$\Rightarrow x_n = \frac{(n-1)^3 .x_{n-1}}{n^3 - n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 . \frac{n}{n+1} .x_{n-1}$$

$$\Rightarrow x_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 ... \left(\frac{2}{3}\right)^2 . \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n} ... \frac{3}{4} x_2$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{4}{n^2(n+1)}$$

Do đó $\lim u_n = \lim \dfrac{4(n+1)^2}{n^2} = 4$.

Câu 6

Từ i) ta có: $f(nx) = nf(x), \forall n \in \mathbb{N}$

Suy ra $f(x) \leq f(nx)$; $f(0) \geq 0$

Do đó: $0 \leq f(0) \leq f(x) + f(-x)$

Thậy vậy: $x = y = 0 \Rightarrow f(0) \leq f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) \geq 0$

Thay y bởi $-x \Rightarrow f(0) \leq f(x) + f(-x)$

Do đó: $0 \leq f(0) \leq f(x) + f(-x)$

Với $x_0 > 0$ thì: $\dfrac{f\left(\dfrac{x_0}{n}\right)}{\dfrac{x_0}{n}} \geq \dfrac{\dfrac{f(x_0)}{n}}{\dfrac{x_0}{n}} = \dfrac{f(x_0)}{x_0} \geq \dfrac{f(-x_0)}{x_0} \geq \dfrac{f\left(-\dfrac{x_0}{n}\right)}{-\dfrac{x_0}{n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Mặt khác: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f\left(\dfrac{x_0}{n}\right)}{\dfrac{x_0}{n}} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f\left(\dfrac{-x_0}{n}\right)}{-\dfrac{x_0}{n}} = 1$ (do ii)

Suy ra:

$$\frac{f(x_0)}{x_0} = \frac{f(-x_0)}{x_0} = 1, \forall x > 0 \text{ và } f(x) = x \ \forall x \neq 0$$

Cho $x_0 \neq 0$ ta có: $0 \leq f(0) \leq f(x) + f(-x) = x_0 - x_0 = 0$

Nên $f(0) = 0$.

Vậy $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BÌNH PHƯỚC
TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG

Câu 1

Điều kiện: $x \ge -6$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$$\sqrt{(x+6)^3} + \sqrt{x+6} = \left(x^2+4x\right)^3 + (x^2+4x)\,(\text{I})$$

Đặt $f(t) = t^3 + t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Phương trình (I) $\Leftrightarrow$ $f(\sqrt{x+6}) = f(x^2+4x) \Leftrightarrow \sqrt{x+6} = x^2 + 4x\,(\text{II})$

Đặt $\sqrt{x+6} = y+2,\ y \ge -2$

$$(\text{II}) \Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)^2 = y+6\\(y+2)^2 = x+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)(x+y+5) = 0\\(y+2)^2 = x+6\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = y\\y^2+3y-2=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=-y-5\\y^2+5y-1=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = y = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\\ x = y = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\ (\text{loại})\end{array}\right. \vee \begin{cases}x = -y-5\\ \left[\begin{array}{l}y = \dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}\\ y = \dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}\ (\text{loại})\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$; $x = \dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}$.

Câu 2

Với $v, l, t, c \in \mathbb{Z}^+$ ta có thể viết lại phương trình của bài toán dưới dạng tương đương sau

$$\left(v+l+t+c\right)^2 = p^2vltc \Leftrightarrow v^2 + 2(l+t+c)v + (l+t+c)^2 = p^2vltc\ (1)$$

Giả sử p là số nguyên dương sao cho (1) có nghiệm nguyên dương v, l, t, c. Gọi $\left(v_0, l_0, t_0, c_0\right)$ là nghiệm nguyên dương của (1) mà tổng $v_0 + l_0 + t_0 + c_0$ có giá trị nhỏ nhất và không mất tính tổng quát giả sử $v_0 \ge l_0 \ge t_0 \ge c_0\,(*)$

Nhận thấy:

(i) $\left(l_0+t_0+c_0\right)^2$ chia hết cho v_0;

(ii) v_0 là nghiệm của tam thức bậc hai

$$f(v) = v^2 + \left(2(l_0+t_0+c_0) - p^2l_0t_0c_0\right)v + (l_0+t_0+c_0)^2.$$

Từ (i) và (ii), theo định lí Viet ta thấy ngoài nghiệm v_0 tam thức $f(v)$ còn có nghiệm nguyên dương $v_1 = \dfrac{(l_0 + t_0 + c_0)}{v_0}$.

Điều này chứng tỏ: $(v_1;\ l_0;\ t_0;\ c_0)$ là nghiệm nguyên dương của (1).

Từ (*) ta có: $v_1 \ge v_0 \ge l_0 \ge t_0 \ge c_0$ (2)

Theo định lí về dấu tam thức bậc hai và từ (2) ta được

$$0 \le f(l_0) = l_0^2 - p^2 l_0^2 t_0 c_0 + 2(l_0 + t_0 + c_0) l_0 + (l_0 + t_0 + c_0) \le 16 l_0^2 - p^2 l_0^2 t_0 c_0$$

Suy ra: $p^2 l_0^2 t_0 c_0 \le 16 l_0^2 \Rightarrow p^2 \le p^2 t_0 c_0 \le 16 \Rightarrow p \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$

Với $p = 1$ (1) có nghiệm nguyên dương $v = l = t = c = 4$

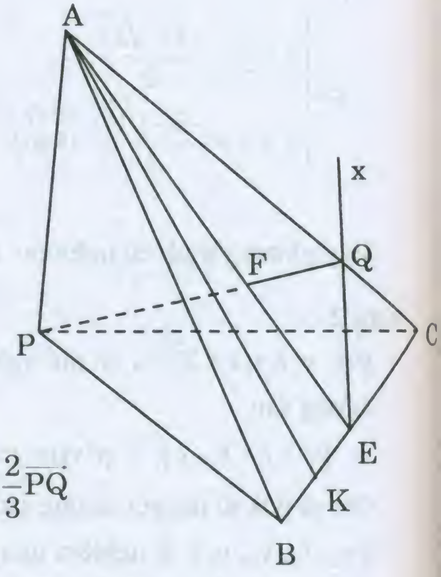
$p = 2$ (1) có nghiệm nguyên dương $v = l = t = c = 2$

$p = 3$ (1) có nghiệm nguyên dương $v = l = 1, t = c = 2$

$p = 4$ (1) có nghiệm nguyên dương $v = l = t = c = 1$

Vậy các giá trị của p thỏa mãn bài toán là $p \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

Câu 3



Gọi E là trung điểm của BC.

Kẻ đường thẳng Ex // PA thì Ex ⊥ (PBC) và mọi điểm trên Ex cách đều P, B, C.

Lấy Q thuộc Ex sao cho $\overrightarrow{EQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA}$

Thì QA = QP = QB = QC nên Q là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCP.

Trên (APEQ) lấy $F = AE \cap PQ$

Vì EQ // PA

nên $\dfrac{PF}{FQ} = \dfrac{AP}{QE} = 2 \Rightarrow PF = 2FQ \Rightarrow \overrightarrow{PF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$

Suy ra F cố định và thuộc mặt phẳng (ABC)

Đặt PA = a, PB = b, PC = c. Kẻ $AK \perp BC \Rightarrow PK \perp BC$

Tính $S = S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC.AK \Rightarrow S^2 = \dfrac{1}{4}BC^2AK^2 = \dfrac{1}{4}BC^2(PA^2 + PK^2)$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(PB^2 + PC^2\right)PA^2 + (BC.PK^2)\right) = \frac{1}{4}\left(a^2.b^2 + a^2c^2 + b^2c^2\right)$$

trong đó $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + BC^2 = 4QE^2 + 4BE^2 = 4R^2$

Áp dụng bất đẳng thức: $xy + yz + zx \le \dfrac{(x+y+z)^2}{3} = \dfrac{16R^4}{3}$

$$\Rightarrow S^2 \le \frac{4}{3}R^4 \Rightarrow S \le \frac{2}{\sqrt{3}}R^2$$

Vậy $S_{max} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}R^2$ xảy ra khi $a = b = c = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$

Câu 4

Từ điều kiện thứ nhất ta có: $\dfrac{1}{t} \le \dfrac{5}{2}; \dfrac{t}{v} < 1$ (1)

Từ điều kiện thứ hai ta có: $\dfrac{1}{vt} \le \dfrac{15}{4} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{v}} \le \dfrac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{t}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{t} = \frac{2}{v} + \frac{1}{t} - \frac{1}{v} = \frac{2}{\sqrt{v}}.\frac{1}{\sqrt{v}} + \frac{1}{t}(1 - \frac{t}{v}) \le \frac{2}{\sqrt{v}}.\frac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{t} + \frac{5}{2}(1 - \frac{t}{v}) \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta được: $\dfrac{2}{\sqrt{v}}.\dfrac{\sqrt{15}}{2}\sqrt{t} \le \dfrac{3}{2} + \dfrac{5t}{2v}$

Do đó từ (3) ta có: $\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{v} \le \dfrac{3}{2} + \dfrac{5t}{2v} + \dfrac{5}{2}(1 - \dfrac{t}{v}) = 4$ (4)

Tương tự ta có: $\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{t} \le \dfrac{9}{2}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra: $P(v, l, t) = \dfrac{1}{v} + \dfrac{2}{l} + \dfrac{3}{t} = \dfrac{1}{v} + \dfrac{1}{t} + 2(\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{t}) \le 13$

Hơn nữa, từ các kết quả trên ta thấy

$$P(v, l, t) = 13 \Leftrightarrow v = \frac{2}{3}, l = \frac{1}{2}, t = \frac{2}{5}.$$

Các giá trị v, l, t trên thỏa mãn điều kiện bài toán.
Vậy $\max P(v, l, t) = 13$.

Câu 5

Xét dãy $x_1 = a, x_{n+1} = \dfrac{x_n(x_n^2 + 3)}{3x_n^2 + 1}$ với n = 1, 2, 3,... (1)

a) Nếu a = 0 thì $x_n = 0, \forall n = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

b) Nếu a = 1 thì $x_n = 1, \forall n = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

c) Xét a > 0 và $a \ne 1$ theo (1) thì x_{n+1} cùng dấu với x_n nên $x_n > 0, \forall n$.

Ta so sánh x_{n+1} và 1: $x_{n+1} - 1 = \dfrac{(x_n - 1)^3}{3x_n^2 + 1}$ (2)

Từ (2) suy ra $x_{n+1} - 1$ và $x_n - 1$ cùng dấu với mọi n.

+) Nếu $0 < a < 1$ thì $x_n < 1$ với mọi n. (2a)

+) Nếu $a > 1$ thì $x_n > 1$ với mọi n. (2b)

Ta so sánh x_{n+1} và x_n : $x_{n+1} - x_n = \dfrac{2x_n(1 - x_n^2)}{3x_n^2 + 1}$ (3)

Từ (3) và (2a) ta có $x_{n+1} > x_n$ với mọi n.

Suy ra: nếu $0 < a < 1$ thì dãy (x_n) là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi 1 nên dãy (x_n) có giới hạn.

Từ (3) và (2b) có $x_{n+1} < x_n$ với mọi n. Suy ra nếu $a > 1$ thì dãy (x_n) là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên dãy (x_n) có giới hạn.

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$. Theo (1) qua giới hạn ta được

$$b = \frac{b(b^2 + 3)}{3b^2 + 1} \Leftrightarrow 2b(b^2 - 1) = 0 \Rightarrow b = 1 \text{ (vì } b > 0).$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

d) Nếu $a < 0$. Xét dãy (y_n) xác định bởi $y_n = -x_n, \forall n$ (4) thì ta đưa về trường hợp c).

Khi đó dãy (y_n) có giới hạn và $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 1$.

Từ (4) kết luận được dãy (x_n) có giới hạn và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -1$.

Câu 6

Cho y = 0:

$$f(x^2) - f(0) = x\big(f(x) - f(0)\big)$$

$$\Leftrightarrow f(x^2) = f(0) + x\big(f(x) - f(0)\big)$$

Cho x = 0: $f(y^2) = f(0) - y\big(f(0) - f(y)\big) = f(0) + y\big(f(y) - f(0)\big)$

Suy ra: $f(x^2) - f(y^2) = xf(x) - yf(y) - f(0)(x - y)$ (1)

Mặt khác:

$$f(x^2) - f(y^2) = (x + y)\big(f(x) - f(y)\big) = xf(x) - yf(y) - xf(y) + f(x) \quad (2)$$

Từ (1) và (2): $xf(y) - yf(x) = f(0).(x - y)$.

Cho $y = 1$: $xf(1) - f(x) = f(0).(x - 1)$

$$\Leftrightarrow f(x) = x\big(f(1) - f(0)\big) + f(0)$$

Vậy $f(x) = kx + b$ với $k = f(1) - f(0)$, $b = f(0)$.

Thử lại ta thấy $f(x) = kx + b$ thỏa bài toán.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO GIA LAI
TRƯỜNG THPT PLEIKU

Câu 1

$$(1) \Leftrightarrow \sin^{2010}x + \cos^{2010}x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin^{2008}x - 1) = \cos^2 x(1 - \cos^{2008}x) \quad (2)$$

Ta thấy $\begin{cases} \sin^2 x \geq 0 \\ \sin^{2008}x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x(\sin^{2008}x - 1) \leq 0, \forall x$

Mà $\begin{cases} \cos^2 x \geq 0 \\ 1 - \cos^{2008}x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \cos^2 x(1 - \cos^{2008}x) \geq 0, \forall x$

Do đó

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x(\sin^{2008}x - 1) = 0 \\ \cos^2 x(1 - \cos^{2008}x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = m\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + m\pi \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \\ x = n\pi \end{array}\right. \end{cases} (m, n \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = k\dfrac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 2

Xét $(x + 1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} x + C_n^n \quad (*)$

$(x - 1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - \ldots - C_n^{n-1} x + C_n^n \quad (**)$

Cộng (*) và (**) theo vế ta được:

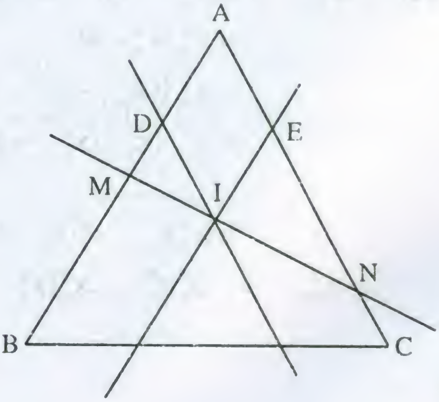
$$(x + 1)^n + (x - 1)^n = 2(C_n^0 x^n + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^n) \quad (***)$$

Trong (***) cho x = 2 ta được

$$3^n + 1 = 2(2^n C_n^0 + 2^{n-2} C_n^2 + \ldots + 2^2 C_n^{n-2} + C_n^n)$$

Từ đó ta được $2^n C_n^0 + 2^{n-2} C_n^2 + 2^{n-4} C_n^4 + \ldots + 2^2 C_n^{n-2} + C_n^n = \dfrac{3^n + 1}{2}$.

Câu 3



Qua I, vẽ đường thẳng song song với AC, cắt AB tại D, và vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AC tại E.

Dễ thấy ADIE là hình thoi.

Đặt AD = DI = IE = EA = k (với k không đổi).

Ta có: $EI \parallel AM$

$$\Rightarrow \frac{NI}{NM} = \frac{EI}{AM} = \frac{k}{AM}. \qquad (1)$$

$$DI \parallel AN \Rightarrow \frac{MI}{NM} = \frac{DI}{AN} = \frac{k}{AN} \qquad (2)$$

Vì $\frac{MI}{NM} + \frac{IN}{NM} = \frac{MN}{MN} = 1$ nên từ (1) và (2) Ta có: $\frac{k}{AM} + \frac{k}{AN} = 1$,

Hay $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{k}$ (không đổi).

Câu 4

Với a, b, c > 0, ta có $a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow (a + b + c)^3 \ge 27abc$. (1)

Giả thiết bài toán cho: $a + b + c \ge 3abc$ (2)

Từ (1) và (2), ta có: $(a + b + c)^4 \ge 81a^2b^2c^2$.

Hay $(a + b + c)^2 \ge 9.abc$. (3)

Ta lại có $a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3}(a + b + c)^2$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)$$

$$= \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}.[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \ge 0$$

Suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 \ge \frac{1}{3}(a + b + c)^2 \ge \frac{1}{3}\,9abc \ge 3abc$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \ge 3abc$.

Câu 5

Rõ ràng $x_n \ge 4, \forall n \ge 1$.

Ta có: $x_{n+1}^2 - 4 = (x_n^2 - 2)^2 - 4 = x_n^4 - 4x_n^2 + 4 - 4$

$$= x_n^2(x_n^2 - 4)$$

$$= x_n^2[(x_{n-1}^2 - 2)^2 - 4] = x_n^2[x_{n-1}^4 - 4x_{n-1}^2 + 4 - 4]$$

$$= x_n^2[x_{n-1}^2(x_{n-1}^2 - 4)]$$

....

$$= x_n^2 x_{n-1}^2 \ldots x_1^2(x_1^2 - 4)$$

$$\Rightarrow x_{n+1}^2 - 4 = x_1^2 x_2^2 \ldots\ldots x_n^2(x_1^2 - 4) \qquad (1)$$

Thay $x_1 = 4$ vào (1) ta có:

$$x_{n+1}^2 - 4 = x_1^2x_2^2....x_n^2.12 \Rightarrow \frac{x_{n+1}^2 - 4}{x_1^2x_2^2...x_n^2} = 12$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}^2}{x_1^2x_2^2...x_n^2} - \frac{4}{x_1^2x_2^2...x_n^2} = 12$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_{n+1}}{x_1x_2....x_n}\right)^2 = 12 + \frac{4}{x_1^2x_2^2...x_n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_1x_2...x_n} = \sqrt{12 + \frac{4}{(x_1x_2....x_n)^2}}.$$

Nhận xét: $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n - 2 = (x_n + 1)(x_n - 2) > 0, \forall n \geq 1.$

$$\Rightarrow 4 = x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n \to +\infty \text{ khi } n \to +\infty.$$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_1x_2.......x_n} = 2\sqrt{3}.$

Câu 6

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y) \quad \forall x, y \in R \qquad (1)$$

Cho $x = y = 1$ ta có $2f(1) = 2(f(1))^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{array}\right.$

a) Xét trường hợp $f(1) = 0$

Cho $y = 1$ vào (1). Ta có $f(x) = 0, \forall x \in R$

b) Xét trường hợp $f(1) = 1$

Cho $y = 1$ ta có $x + f(x) = (x+1)f(x) \Rightarrow x(f(x) - 1) = 0$

Do đó: Với mọi $x \neq 0$ thì $f(x) = 1$

Kết hợp cả hai trường hợp ta có

$$f(x) = 0, \forall x \in R \text{ và } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ với a là số tùy ý}$$

Thử lại: Với $xy \neq 0$ hoặc $x = y = 0$ thì (1) thỏa mãn.

Với $\begin{cases} x \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(y) = a \end{cases}$

Khi đó $xf(y) + yf(x) = ax$ và $(x+y)f(x)f(y) = (x+0)a = ax$

Vậy các hàm số trên thỏa mãn (1).

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KON TUM
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH

Câu 1

Từ $(x-y)(2x^2+2xy+2y^2-3)=6\ln\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2+4}}{x+\sqrt{x^2+4}}\right)$

$\Leftrightarrow 2x^3-3x+6\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)=2y^3-3y+6\ln\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)$ (1)

Xét $f(t)=2t^3-3t+6\ln\left(t+\sqrt{t^2+4}\right)\ \ t\in\mathbb{R}$

$$f'(t)=6t^2-3+\frac{6}{\sqrt{t^2+4}}=6\left(t^2+\frac{1}{\sqrt{t^2+9}}-\frac{1}{2}\right)$$

Ta có $t^2+\dfrac{1}{\sqrt{t^2+4}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{t^2+4}{16}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{t^2+4}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{t^2+4}}+\dfrac{15}{16}(t^2+4)-\dfrac{9}{2}$

$$\geq\frac{3}{4}+\frac{15}{16}(t^2+4)-\frac{9}{2}\geq\frac{3}{4}+\frac{15}{4}-\frac{9}{2}=0$$

Suy ra $f'(t)\geq 0\ \forall t \Rightarrow$ hàm số đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$

Mà (1) $\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

Thay vào phương trình còn lại của hệ ta có $x^6-3x^2-1=0$ (2)

Đặt $x^2=u\ (u\geq 0)$ suy ra $u^3-3u=1$ (3)

Xét $g(u)=u^3-3u-1$ với $u\geq 0$

$g'(u)=3u^2-3$ có $g'(u)=0\Leftrightarrow u=\pm 1$

Bảng biến thiên

u	-1				0		1		2	$+\infty$
g'(u)		+	0	−		−	0	+		
g(u)			↘	-1	-3			↗	1	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên phương trình (3) có nghiệm duy nhất thuộc (0; 2)

Đặt $u=2\cos\alpha$ với $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

(3) trở thành $\cos 3\alpha=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{9}\Rightarrow x=\pm\sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{9}}$

Vậy hệ có nghiệm

$$\left(\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}};\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}\right);\ \left(-\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}};-\sqrt{2\cos\frac{\pi}{9}}\right).$$

Câu 2

Giả sử bằng cách tô của bài, ta có thể tô màu được hết tất cả các ô vuông của bảng đã cho khi đó tổng số lần tô sẽ là (2011.670)

Điền các số vào các ô vuông của bảng theo cách: Tại ô (m, n) điền số m.n.

Gọi S là tổng số tất cả các số đã điền ta có

$$S = (1 + 2 + ... + 2010)(1 + 2 + ... + 2011) \equiv 0(\text{mod}\,3).$$

Mặt khác gọi S_i là tổng của 3 số nằm tại 3 ô vuông ở lần thứ i $(1 \le i \le 2011.670)$

Ta thấy $S_1 = rs + (r + 1)(s + 1) + (r + 2)(s + 2)$

Và $S_i = ab + (a + 1)b + (a + 2)b$

$$(2 \le i \le 2011.670)\ \left(1 \le a \le 2009;\ 1 \le b \le 2011;\ a,b \in \mathbb{N}^+\right)$$

$$\Rightarrow S_1 \equiv 2(\text{mod}\,3)$$

$$S_i \equiv 0(\text{mod}\,3)\ \forall i = 2,3,...,2011.670$$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_2 + ... + S_{2011.670} \equiv 2(\text{mod}\,3) \Rightarrow \text{vô lí.}$$

Vậy không thể tô màu hết tất cả các ô vuông của bảng theo cách tô đã được chỉ ra trong đề bài.

Câu 3

a) Trong tam giác A'B'C', gọi N, L lần lượt là chân các đường cao kẻ từ A', B'.

Trong mặt phẳng (SBC), gọi M là giao điểm của SN với BC.

Trong mặt phẳng (SAC), gọi K là giao điểm của SL với BC.

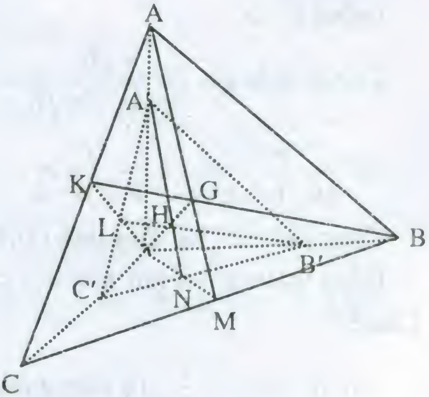
Ta có: SH ⊥ (A'B'C') nên H là trực tâm của tam giác A'B'C'.

Vì

SB'.SB = SC'. SC

nên tứ giác BB'C'C nội tiếp,

do đó $\widehat{B'BC} = \widehat{SC'B'}$



Mà $\widehat{SC'B'} = \widehat{B'SN}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

nên $\widehat{B'BC} = \widehat{B'SM}$.

Suy ra SM = MB. Chứng minh tương tự SM = MC.

Suy ra AM là đường trung tuyến của tam giác ABC.

Chứng minh tương tự, suy ra BK là đường trung tuyến.

Suy ra G là trọng tâm tam giác ABC

b) Ta có:

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{abc}{2(S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SCA} + S_{\Delta ABC})} = \frac{abc}{ab + bc + ca + 2S_{\Delta ABC}}$$

Ta cần chứng minh: $ab + bc + ca + 2S_{\Delta ABC} \ge bc(3 + \sqrt{3})$ (1)

Từ giả thiết $a \ge b \ge c$, ta có: $ab + bc + ca \ge 3bc$ (2)

Trong một tam giác có ít nhất một góc lớn hơn hoặc bằng 60^o, mà $a \ge b \ge c$ nên $\widehat{BAC} \ge 60^o$

Suy ra:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}.\sin\widehat{BAC} \ge \frac{1}{2}\sqrt{4a^2bc}.\frac{\sqrt{3}}{2} \ge \frac{bc\sqrt{3}}{2} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4

Với a, b, c thuộc trong khoảng $(1; 2)$ ta có $4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}$, $4c\sqrt{a} - a\sqrt{b}$, $4a\sqrt{b} - b\sqrt{c}$ là các số dương.

Khi đó $\dfrac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}} \ge \dfrac{a}{a + b + c} \Leftrightarrow b(a + b + c) \ge \sqrt{a}\left(4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}\right)$

$\Leftrightarrow (a + b)(b + c) \ge 4b\sqrt{ac}$,

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có $a + b \ge 2\sqrt{ab}$ và $b + c \ge 2\sqrt{bc}$. Suy ra bất đẳng thức $\dfrac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}} \ge \dfrac{a}{a + b + c}$ (1) đã được chứng minh.

Tương tự ta có: $\dfrac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a} - a\sqrt{b}} \ge \dfrac{b}{a + b + c}$ (2)

và $\dfrac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b} - b\sqrt{c}} \ge \dfrac{c}{a + b + c}$. (3)

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Câu 5

Đặt $b_n = a_n - \dfrac{1}{n}$. Ta chứng minh $b_n < \displaystyle\sum_{k=n}^{2n+2010} \frac{b_k}{k + 1}$, $n = 1, 2, 3...$ (1)

$$(*) \Leftrightarrow a_n - \frac{1}{n} < \sum_{k=n}^{2n+2010} \frac{a_k - \frac{1}{k}}{k + 1} = \sum_{k=n}^{2n+2010} \frac{ka_k - 1}{k(k + 1)} = \sum_{k=n}^{2n+2010} \frac{ka_k - 1 - k + k}{k(k + 1)}$$

$$= \sum_{k=n}^{2n+2010} \left(\frac{a_k}{k + 1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k + 1}\right)$$

$$= \sum_{k=n}^{2n+2010} \frac{a_k}{k+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+2011}$$

$$\Leftrightarrow a_k < \sum_{k=n}^{2n+2010} \frac{a_k}{k+1} + \frac{1}{2n+2011}.$$ Vậy (1) đúng.

Ta chứng minh $b_n < 0$. Vì (a_n) bị chặn nên có số M thỏa mãn $b_n < M$.

Khi n > 100000, ta có

$$b_n < \sum_{k=n}^{2n+2010} \frac{b_k}{k+1} < M \sum_{k=n}^{2n+2010} \frac{1}{k+1} = M \sum_{k=n}^{\left[\frac{3n}{2}\right]} \frac{1}{k+1} + M \sum_{k=\left[\frac{3n}{2}\right]+1}^{2n+2010} \frac{1}{k+1}$$

$$< M.\frac{1}{2} + M.\frac{\frac{n}{2}+2010}{\frac{3n}{2}+1}$$

$$< M.\frac{1}{2} + M.\frac{\frac{100000}{2}+2010}{\frac{3.100000}{2}+1} < \frac{6}{7}M.$$

Khi thay M bởi $\frac{6}{7}M$ và lặp lại quá trình trên m lần, với mọi số $m \in \mathbb{N}$ ta được $b_n < \left(\frac{6}{7}\right)^m M$,

Suy ra $b_n \leq 0$ khi $n \geq 100000$ (2).

Thay (2) vào (1) ta được $b_n < 0$ khi $n \geq 100000$.

Ta chú ý trong (1) rằng, nếu với mọi $n \geq N+1$, $b_n < 0$ thì $b_N < 0$

(Vì $b_{N+1} < \sum_{k=N+1}^{2(N+1)+2010} \frac{b_k}{k+1} < \frac{b_{N+1}}{N+1} + \sum_{k=N+2}^{2(N+2)+2010} \frac{b_k}{k+1}$

$$\Rightarrow b_{N+1} - \frac{b_{N+1}}{N+1} < \sum_{k=N+2}^{2(N+2)+2010} \frac{b_k}{k+1} < 0$$

do $b_n < 0$, $\forall n \geq N+1$). Điều đó có nghĩa là $b_n < 0$, với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

Vậy $a_n < \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, ...$

Câu 6

Giả sử tồn tại hàm số $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện (*).

+ Với mọi $z > t > 2011$, thay $x = t - 2011$, $y = z - t + 2011$ vào (*) ta được

$f^2(t) \geq f(z)(f(t) + z - t)$ suy ra $\frac{f^2(t)}{f(t) + z - t} \geq f(z)$.

Do đó $f(t) - f(z) \ge f(t) - \frac{f^2(t)}{f(t) + z - t} = \frac{(z-t)f(t)}{f(t) + z - t} > 0$ (1).

Từ đó suy ra $f(t) > f(z)$ với mọi $z > t > 2011$, hay f là hàm giảm trên $(2011; +\infty)$.

+ Cố định x_0 thuộc $(2011; +\infty)$ và chọn $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho $nf(x_0 + 1) \ge 1$ tức là

$f(x_0 + 1) \ge \frac{1}{n}$

Với $k = 0; 1; ....; n-1$;

ta có $x_0 + 1 \ge x_0 + \frac{k}{n} \Rightarrow f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) \ge f(x_0 + 1) \ge \frac{1}{n}$.

Áp dụng (1), ta có

$$f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) - f\left(x_0 + \frac{k+1}{n}\right) \ge \frac{\frac{1}{n} f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right)}{f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}} = \frac{f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right)}{nf\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) + 1}.$$

Xét hàm số $\varphi(t) = \frac{t}{nt + 1}$, $t \in (0; +\infty)$

có $\varphi'(t) = \frac{1}{(nt+1)^2} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$ nên $\varphi(t)$ là hàm số tăng.

$$\text{Do đó } f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) - f\left(x_0 + \frac{k+1}{n}\right) \ge \frac{f\left(x_0 + \frac{k}{n}\right)}{nf\left(x_0 + \frac{k}{n}\right) + 1} \ge \frac{\frac{1}{n}}{n.\frac{1}{n} + 1} = \frac{1}{2n};$$

$k = 0, 1, ..., n - 1$ (2).

Cộng tất cả n bất đẳng thức của (2) vế theo vế ta được

$$f(x_0) - f(x_0 + 1) \ge \frac{1}{2} \text{ hay } f(x_0 + 1) \le f(x_0) - \frac{1}{2}.$$

+ Chọn $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $m \ge f(x_0)$ suy ra

$$f(x_0 + 2m) \le f(x_0 + 2m - 1) - \frac{1}{2} \le f(x_0 + 2m - 2) - 2.\frac{1}{2}$$

$$\le ... \le f(x_0) - 2m.\frac{1}{2} = f(x_0) - m \le 0$$

Điều này mâu thuẫn với $f(x) \in (0; +\infty), \forall x \in (0; +\infty)$.

Vậy không tồn tại hàm số f(x) thỏa mãn đề bài.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BẠC LIÊU
TRƯỜNG THPT BẠC LIÊU

Câu 1

Trước hết ta phải có $a > 0$.

Bất phương trình đã cho được viết lại $a\left(ax^2+3\right)^2+3 \ge x$

Đặt $f(x) = ax^2+3$, bất phương trình được viết lại: $f\left(f(x)\right) \ge x$

Do $x \le 0$ bất phương trình luôn đúng, nên ta chỉ xét $x > 0$.

Xét $x_0 > 0$ bất kì. Nếu $ax_0^2+3 \ge x_0$ thì $a\left(ax_0^2+3\right)^2+3 \ge ax_0^2+3 \ge x_0$.

Tương tự, nếu $ax_0^2+3 < x_0$ thì $a\left(ax_0^2+3\right)^2+3 < x_0$

Do đó: $f\left(f(x)\right) \ge x \quad \Leftrightarrow f(x) \ge x, \forall x > 0$

$$\Leftrightarrow ax^2+3 \ge x, \forall x > 0 \;\Leftrightarrow ax + \frac{3}{x} \ge 1, \forall x > 0 \; (*)$$

Ta có: $ax + \frac{3}{x} \ge 2\sqrt{3a}$, dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{\frac{3}{a}}$.

Do vậy $(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{3a} \ge 1 \;\Leftrightarrow a \ge \frac{1}{12}$.

Câu 2

$$\begin{cases} x - y + z = 2 & (1) \\ 2x^2 - xy + x - 2z = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (1), ta có $z = 2 + y - x$. Thế vào (2) ta được:

$$2x^2 - xy + x - 4 - 2y + 2x = 1$$

$$2x^2 + 3x - 5 = y(x+2)$$

Do $x = -2$ không thỏa mãn phương trình trên nên

$$y = \frac{2x^2+3x-5}{x+2} = 2x - 1 - \frac{3}{x+2}$$

y nguyên khi và chỉ khi $x + 2$ là ước của 3. Suy ra $x + 2 = \pm 1$; hoặc $x + 2 = \pm 3$.

Vậy $x \in \{-1; -3; 1; -5\}$

Từ đó, ta có các nghiệm nguyên của hệ phương trình là

$$(x; y; z) \in \{(-1; -6; -3), (-3; -4; 1), (1; 0; 1), (-5; -10; -3)\}.$$

Câu 3:

Giả sử $MN \cap C'D' = I'$, $AN \cap CD = I$.

Do $\quad II' = (AMN) \cap (CDC'D')$

$\quad AM = (AMN) \cap (ABB'A')$

Mà (CDD'C') // (ABB'A') nên II' // AM.

Theo định lí Talet ta có:

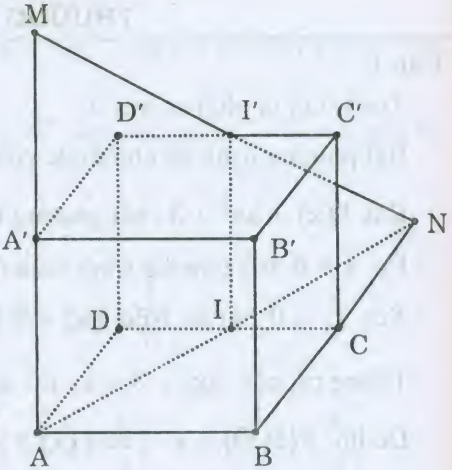
$$\frac{A'M}{AM}=\frac{MI}{MN}=\frac{AI}{AN}=\frac{BC}{BN}$$

$$\Rightarrow \frac{x-a}{x}=\frac{a}{y}\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow (x+y)^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2\ge 16$$

$$\Rightarrow (x+y)^2\ge 16a^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2\ge 8a^2$$



Dấu bằng xảy ra khi $x=y=2a$

Từ đó: $MN^2=x^2+y^2+a^2\ge 9a^2$

Do vậy giá trị nhỏ nhất của MN là 3a, xảy ra khi $x=y=2a$.

Câu 4

Đặt $t=x+y$

ta có $A=\frac{1}{4}\left[3(x+y)^2+(x-y)^2\right]-3(x+y)=\frac{3}{4}t^2-3t+\frac{1}{4}(2x-t)^2$,

với $0\le x\le 2, 1\le t\le 3$.

Đặt $f(t,x)=\frac{3}{4}t^2-3t+\frac{1}{4}(2x-t)^2$ với $0\le x\le 2,\ 1\le t\le 3$.

Ta có:

$$A=\frac{3}{4}t^2-3t+\frac{1}{4}(2x-t)^2\ge\frac{3}{4}t^2-3t=\frac{3}{4}(t-2)^2-3\ge -3.$$

Dấu bằng xảy khi $t=2$ và $x=y=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -3 đạt được khi $x=y=1$.

Để tìm giá trị lớn nhất của A, ta dựa vào nhận xét A lớn nhất khi x nhỏ nhất hoặc lớn nhất có thể, với mỗi t cố định ta có:

$$\max(0,t-2)\le x\le\min(2,t)$$

Do đó:

+ Với $t\le 2$ cố định thì $A_{\max}=\max(f(t,0),f(t,t))=t^2-3t$, như vậy, trong trường hợp này giá trị lớn nhất của A đạt được bằng -2 khi $t=1$ hoặc $t=2$.

+ Với $t\ge 2$ cố định thì $A_{\max}=\max(f(t,t-2),f(t,t))=t^2-5t+4$, như vậy trong trường hợp này giá trị lớn nhất của A đạt được bằng -2 khi $t=2$ hoặc $t=3$. Tóm lại, giá trị lớn nhất của A đạt được bằng -2 khi x là các đầu mút chẳng hạn $x=0$, $y=1$.

Câu 5

Xét hàm số $f_n(x)=x^n-\cos x$, $f_n(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta thấy $f'_n(x)=nx^{n-1}+\sin x\ge 0,\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, nên hàm số $f_n(x)$ đồng biến.

Mặt khác, $f_n(0)=-1<0$ và $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^n>0$.

Như vậy, với mỗi n, tồn tại duy nhất u_n sao cho $\cos u_n=u_n^n$.

Ta chứng minh $\{u_n\}$ là dãy tăng. Giả sử ngược lại tồn tại $u_n>u_{n+1}$.

Khi đó $\cos u_n<\cos u_{n+1}$ (do $u_n, u_{n+1}\in[0;1]$).

Hay $u_n^n<u_{n+1}^{n+1}\le u_{n+1}^n$ (do $u_{n+1}\in[0;1]$).

Do đó $u_n<u_{n+1}$ (mâu thuẫn).

Vậy $\{u_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên bởi 1 nên tồn tại $\lim u_n=L$.

Ta có $u_n=(\cos u_n)^{\frac{1}{n}}$

Cho $n\to+\infty$, ta được $L=\cos^0 L=1$. Vậy $\lim u_n=1$.

Câu 6

Cho $y=1$ và $y=-1$, ta thu được:

$$f\left(f(x)+1\right)=f^2(x)-f(1).f(x)+2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$f\left(f(x)+1\right)=f^2(x)-f(-1).f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Suy ra: $f(x).\left[f(1)-f(-1)\right]=2x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Nếu $f(1)=f(-1)$ thì thay lần lượt $x=1$ và $x=-1$ vào phương trình ban đầu, ta được:

$$f\left(f(-1)+y^2\right)=f^2(-1)-f(-1)f(y)-1-y,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

$$f\left(f(-1)+y^2\right)=f^2(1)-f(1)f(y)+1+y,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

$\Rightarrow y+1=0,\forall y\in\mathbb{R}$. (Vô lí)

Vậy suy ra: $f(x)=cx$, với $c=\dfrac{2}{f(1)-f(-1)}$.

Thay $x=y$ vào phương trình ban đầu ta được: $f\left(f(x)+x^2\right)=x^2+x$.

Từ đó, suy ra: $c=1$.

Khi đó, ta có: $f(x)=x$.

Thay vào phương trình ban đầu, ta được $x^2=y^2,\forall x,y\in\mathbb{R}$ (không thỏa mãn).

Vậy không có hàm thỏa mãn phương trình trên.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO CÀ MAU
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN NGỌC HIỂN

Câu 1

Hệ đã cho tương đương: $\begin{cases}\sqrt{2x^2y^2 - x^4y^4} = x^{2010} + y^2 - y^{2012}\\ \sqrt{1+(x+y)^2} \le -2x^{1005}y - y^{2012}\end{cases}$

Ta có: $0 \le \left(x^{1005} + y\right)^2 = x^{2010} + 2x^{1005}y + y^2$

$$= x^{2010} + y^2 - y^{2012} - \left[-2x^{1005}y - y^{2012}\right]$$

$$\Rightarrow 0 \le \left(x^{1005} + y\right)^2 \le x^{2010} + y^2 - y^{2012} - \sqrt{1+(x+y)^2}$$

$$\Rightarrow 0 \le \left(x^{1005} + y\right)^2 \le \underbrace{\sqrt{1-\left(1-x^2y^2\right)^2}}_{\le 1} - \underbrace{\sqrt{1+(x+y)^2}}_{\ge 1} \le 0$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}x^{1005} + y = 0\\ -\left(1-x^2y^2\right)^2 = (x+y)^2\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases}x^{1005} + y = 0\\ x^2y^2 = 1\\ x + y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x = 1\\ y = -1\end{cases}\\ \begin{cases}x = -1\\ y = 1\end{cases}\end{array}\right.$$

Thử lại, ta nhận cả hai nghiệm trên.

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm: (1; −1) và (−1; 1).

Câu 2

Từ (2) $\Rightarrow xy(x+y)$ không chia hết cho 7

Từ (3) $\Rightarrow (x+y)^7 - \left(x^7 + y^7\right)$ chia hết cho 7^5

hay $7xy(x+y)\left(x^2 + xy + y^2\right)^2$ chia hết cho 7^5

$\Rightarrow \left(x^2 + xy + y^2\right)^2$ chia hết cho 7^4

$\Rightarrow x^2 + xy + y^2$ chia hết cho 7^2

$\Rightarrow x^2 + xy + y^2 \ge 7^2 = 49$ (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 49 \Leftrightarrow x^2 + yx + \left(y^2 - 49\right) = 0$

$$\Delta = y^2 - 4\left(y^2 - 49\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 \le \frac{4.49}{3} \approx 65{,}3 < 66$$

Do $y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow y \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

Thử lại: $y = 1$ (loại)

$y = 2$ (loại)

$y = 3 \Rightarrow x = 5$ (nhận)

$y = 1$ (loại)

$y = 5 \Rightarrow x = 3$ (nhận)

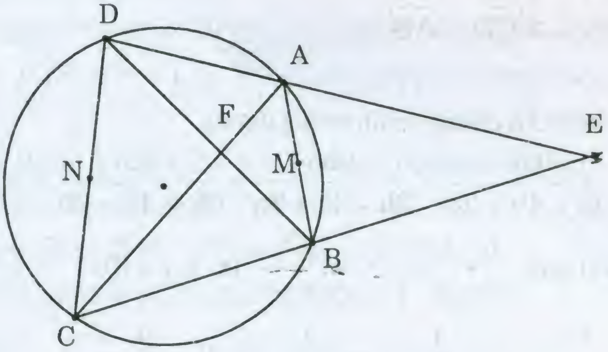
$y = 6$ (loại)

$y = 7$ (loại)

$y = 8$ (loại)

Vậy có hai nghiệm cần tìm là: (3; 5) và (5; 3).

Câu 3



Đặt

$\widehat{AEB} = \gamma$; $EC = c$; $ED = d$; $\vec{i} = \frac{1}{c}\overrightarrow{EC}$; $\vec{j} = \frac{1}{d}\overrightarrow{ED}$

Vì tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp nên

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE} = k.$$

Suy ra $\overrightarrow{EA} = kc\vec{j}$ và $\overrightarrow{EB} = kd\vec{i}$.

Vì $F \in AC; F \in BD$ nên tồn tại các số x, y thỏa mãn:

$$\overrightarrow{EF} = x.\overrightarrow{EA} + (1 - x).\overrightarrow{EC} = xkc\vec{j} + (1 - x)c\vec{i}$$

$$\overrightarrow{EF} = y.\overrightarrow{EB} + (1 - y).\overrightarrow{ED} = ykd\vec{i} + (1 - y)d\vec{j}$$

So sánh các hệ số của $\vec{i}$ và $\vec{j}$ từ các đẳng thức trên ta được:

$$xkc = (1 - y)d \text{ và } ykd = (1 - x)c$$

Từ đó suy ra $x = \frac{kd - c}{(k^2 - 1)c}$

Vậy $\overrightarrow{EF} = \frac{k}{k^2 - 1}((kd - c)\vec{j} + (kc - d)\vec{i})$, suy ra

$$EF^2 = \left(\frac{k}{k^2 - 1}\right)^2 \left[(kd - c)^2 + (kc - d)^2 + 2(kd - c)(kc - d).\cos\gamma\right]$$

Mặt khác, ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(d - kc)\vec{j} + (c - kd)\vec{i}\right]$$

Suy ra $MN^2 = \frac{1}{4}\left((d - kc)^2 + (c - kd)^2 + 2(d - kc)(c - kd).\cos\gamma\right)$

Như vậy, ta có $\dfrac{MN^2}{EF^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{k^2 - 1}{k}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(k - \dfrac{1}{k}\right)^2$

Suy ra $\dfrac{MN}{EF} = \dfrac{1}{2}\left|\dfrac{AB}{CD} - \dfrac{CD}{AB}\right|$.

Câu 4

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\frac{9ab}{3a + 4b + 2c} + \frac{9bc}{3b + 4c + 2a} + \frac{9ca}{3c + 4a + 2b} \le a + b + c.$$

Áp dụng kết quả: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \ge \dfrac{9}{x + y + z}$ $(x, y, z > 0)$

ta có: $\dfrac{1}{a + b + c} + \dfrac{1}{a + b + c} + \dfrac{1}{a + 2b} \ge \dfrac{9}{3a + 4b + 2c}$

$$\Rightarrow \frac{9ab}{3a + 4b + 2c} \le \frac{ab}{a + b + c} + \frac{ab}{a + b + c} + \frac{ab}{a + 2b}$$

Cộng vế theo vế bất đẳng thức trên và hai bất đẳng thức tương tự ta được:

$$\frac{9ab}{3a + 4b + 2c} + \frac{9bc}{3b + 4c + 2a} + \frac{9ca}{3c + 4a + 2b}$$
$$\le \frac{2(ab + bc + ca)}{a + b + c} + \frac{ab}{a + 2b} + \frac{bc}{b + 2c} + \frac{ca}{c + 2a}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{2(ab + bc + ca)}{a + b + c} + \frac{ab}{a + 2b} + \frac{bc}{b + 2c} + \frac{ca}{c + 2a} \le a + b + c$$

Thật vậy, ta có:

$$3(ab + bc + ca) \le (a + b + c)^2 \Rightarrow \frac{2(ab + bc + ca)}{a + b + c} \le \frac{2(a + b + c)}{3}$$

$$(a + 2b)(b + 2a) = (a + b + b)(b + a + a) \ge 9ab \Rightarrow \frac{ab}{a + 2b} \le \frac{b + 2a}{9}$$

Tương tự: $\dfrac{bc}{b + 2c} \le \dfrac{c + 2b}{9}; \dfrac{ca}{c + 2a} \le \dfrac{a + 2c}{9}$

Vậy: $$\frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c}+\frac{ab}{a+2b}+\frac{bc}{b+2c}+\frac{ca}{c+2a}$$
$$\le\frac{2(a+b+c)}{3}+\frac{(b+2a)+(c+2b)+(a+2c)}{9}=a+b+c$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu 5

1. Xét phương trình: $x^{2n+1} = x + 1$ (1)

Phương trình (1) viết lại như sau: $x\left(x^{2n} - 1\right) = 1$ (2)

Ta xét các trường hợp sau:

a) Nếu $x \le -1$ thì $x^{2n} \ge 1 \Rightarrow VT(2) \le 0$, vậy (2) không có nghiệm $x \le -1$.

b) Nếu $0 < x < 1$ thì $x^{2n} < 1 \Rightarrow VT(2) < 0$, vậy (2) cũng không có nghiệm $0 < x < 1$.

c) Nếu $-1 < x \le 0$, thì $x^{2n+1} \le 0 \le x + 1$, vậy (2) không có nghiệm $-1 < x \le 0$.

d) Nếu $x \ge 1$. Xét hàm số sau: $f(x) = x^{2n+1} - x - 1$

Ta có: $f'(x) = (2n+1)x^{2n} - 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \ge 1$

Mặt khác $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[1;+\infty)$ và $f(1) = -1 < 0$

$$f(2) = 2^{2n+1} - 3 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm $u_n > 1$.

2. Xét dãy $\{u_n\}$, với u_n được xác định ở phần 1.

Ta có $u_n^{2n+1} = u_n + 1$, vì thế $u_n = \sqrt[2n+1]{u_n + 1}$

Từ (3) và theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$u_n = \sqrt[2n+1]{u_n+1} < \frac{(u_n+1)+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{2n}}{2n+1}$$

hay $$u_n < \frac{u_n+(2n+1)}{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow (2n+1)u_n < u_n + 2n + 1 \Leftrightarrow u_n < \frac{2n+1}{2n}$$

Kết hợp với $u_n > 1$, với mọi $n = 1, 2, \ldots$ ta có bất đẳng thức kép sau:

$$1 < u_n < \frac{2n+1}{2n} \qquad (4)$$

Do $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{2n} = 1$ nên theo "nguyên lý kẹp" suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Câu 6

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).g(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}\ (*)$$

Theo giả thiết, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x_0) \neq 0$.

Với mỗi số thực y, ta định nghĩa dãy (x_k) $(k = 0, 1, 2, ...)$ như sau:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + y & \text{khi } |f(x_k + y)| \geq |f(x_k - y)| \\ x_k - y & \text{khi } |f(x_k + y)| < |f(x_k - y)| \end{cases}$$

Khi đó kết hợp với (*), ta có: $|f(x_{k+1})| \geq |g(y)|.|f(x_k)|$.

Quy nạp theo k, ta được: $|f(x_k)| \geq |g(y)|^k.|f(x_0)|$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

Vì $|f(x_k)| \leq 1, \forall k \in \mathbb{N}^*$ nên $|g(y)| \leq 1$. Bài toán được chứng minh.

ĐẠI HỌC AN GIANG
TRƯỜNG PHỔ THÔNG THỰC HÀNH SƯ PHẠM

Câu 1

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_1) = x_2 \\ f(x_2) = x_3 \\ f(x_3) = x_4 \\ f(x_4) = x_1 \end{cases} \text{ với } f(t) = t^2 + t - 1, t \in \mathbb{R}$$

Rõ ràng, f tăng trên $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, giảm trên $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$

và $f(t) \geq f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}, \forall t \in R$ nên $x_i \geq -\frac{5}{4}, \forall x_i = \overline{1,4}$

✍ *Trường hợp:* $x_1 \geq -\frac{1}{2}$ thì từ (4) $\Rightarrow f(x_4) \geq -\frac{1}{2}$

Hơn nữa: $f\left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{25}{10} - \frac{5}{4} - 1 = -\frac{11}{6} < -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{5}{4}\right) < f(4) \text{ mà } x_4 \geq -\frac{5}{4} \Rightarrow x_4 > -\frac{1}{2}$$

Lập luận tương tự ta cũng có: $x_2, x_3 > -\frac{1}{2}$

Nếu $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$$\Rightarrow x_2 \leq x_3 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_3)$$
$$\Rightarrow x_3 \leq x_4 \Rightarrow f(x_3) \leq f(x_4)$$
$$\Rightarrow x_4 \leq x_1 \Rightarrow x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$$

✍ *Trường hợp:* $x_1 < -\frac{1}{2}$

Nếu có $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ để $x_k \geq -\frac{1}{2}$ thì theo trên:

$x_i \geq -\frac{1}{2}, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$\Rightarrow x_1 \geq -\frac{1}{2}$ (mâu thuẫn). Vậy $x_i < -\frac{1}{2}, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$

Nếu $x_1 \leq x_3$ thì $f(x_1) \geq f(x_3)$

$\Rightarrow x_2 \geq x_4 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_4) \Rightarrow x_3 \leq x_1 \Rightarrow x_1 = x_3$

Lập luận tương tự, ta được $x_2 = x_4$

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \\ f(x_1) = x_2 \\ f(x_2) = x_1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + f(x_1) = x_2 + f(x_2)$

$\Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - 1 = x_2^2 + 2x_2 - 1$

$\Leftrightarrow (x_1 + 1)^2 = (x_2 + 1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_2 = -x_1 - 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \pm 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \pm 1$

Vậy, hệ (*) có nghiệm là $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \pm 1$

Câu 2

(1) $\Leftrightarrow 1979(19y^2 + 79x^2) = zx^2y^2$ (2)

$\Rightarrow zx^2y^2 \,\vdots\, 1979$

Vì số 1979 là một số nguyên tố, nên xảy ra các trường hợp sau đây:

1. $z \,\vdots\, 1979 \Rightarrow z = 1979z_1$ (*)

Thay (*) vào (2) ta được $19y^2 + 79x^2 = z_1x^2y^2 \Rightarrow 19y^2 \,\vdots\, x^2$ và $79x^2 \,\vdots\, y^2$

Vì 19 và 79 là số nguyên tố $\Rightarrow x^2 \,\vdots\, y^2$ và $y^2 \,\vdots\, x^2 \Rightarrow x = y(**)$

Thay (**) vào (2) ta được

$98x^2 = z_1x^4$ hay $98 = z_1x^2$

Vì $98 = 2.7^2 = 98.1^2$, có thể xảy ra

$x = 7, z_1 = 2$ suy ra $z = 2.1979, x = y = 7$

hoặc $x = 1, z_1 = 98$ suy ra $z = 98.1979, y = x = 1$.

2. $x \,\vdots\, 1979 \Rightarrow x = 1979x_1$, thay vào (2) ta được $y \,\vdots\, 1979$ hay $y = 1979y_1$, lại thay vào (2) và chia hai vế cho $1979^3x_1^2y_1^2$

ta được $\frac{19}{x_1^2} + \frac{79}{y_1^2} = z.1979$

Ta biết $x_1 \geq 1,\ y_1 \geq 1$

và $z \geq 1 \Rightarrow \frac{19}{x_1^2} + \frac{79}{y_1^2} \leq 19 + 79 = 98 < 1979 \leq 1979z$

Điều này vô lí với kết quả nhận được ở trên.

Vậy nếu $x \vdots 1979$ thì (2) không xảy ra

3. $y \vdots 1979$ tương tự như trường hợp (2).

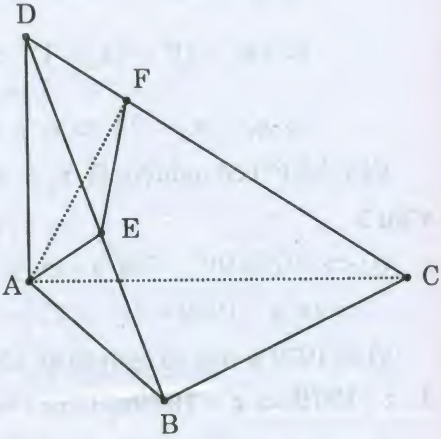
Kết luận: $x = y = 7$; $z = 2.1979$ hoặc $x = y = 1$; $z = 98.1979$ là nghiệm của phương trình.

Câu 3

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên DB và DC.

Khi đó:

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp DA\ (DA \perp (ABC)) \\ AB, DA \subset (DAB) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (DAB)$$



Mà $AE \subset (DAB)$ suy ra $BC \perp AE$

Mặt khác $AE \perp DB$

Suy ra $AE \perp (BDC)$, suy ra $AE \perp (DBC)$ suy ra $AE \perp EF$ (hay tam giác AEF vuông tại E).

Ngoài ra $AE \perp DC$ ($AE \perp (DBC)$), $DC \perp AF$ suy ra $DC \perp EF$.

Do đó góc giữa (DAC) và (DBC) là góc AFE, $\widehat{AFE} = \beta$.

Đặt $DA = AB = x$.

Trong tam giác vuông cân DAB: $AE = \frac{1}{2}DB = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác ABC vuông tại B: $AC = \frac{AB}{\cos\alpha} = \frac{x}{\cos\alpha}$

Trong tam giác vuông DAC:

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{\cos^2\alpha}{x^2} = \frac{1+\cos^2\alpha}{x^2}$$

Hay $AF = \frac{x}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$

Trong tam giác ADF: $DF = \sqrt{AD^2 - AF^2} = \frac{x\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$

$$\Delta DFE \backsim \Delta DBC \Rightarrow \frac{DF}{FE} = \frac{DB}{BC} \Rightarrow EF = \frac{BC.DF}{BD} = \frac{(x\tan\alpha).x\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}.\sqrt{2}x}$$

$$\tan\beta = \frac{AE}{EF} = \frac{x\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}x.\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{x^2.\tan\alpha.\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha.\tan\beta = \frac{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}\text{ (đpcm)}$$

Câu 4

a) $\forall x > 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} < 1 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} < x \Rightarrow f(x) < x \qquad (1)$

Mặt khác xét $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \left(1 - \frac{x}{2}\right)$ với $x > 0$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2}}\right] > 0,\ \forall x > 0$$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty) \Rightarrow g(x) > g(0),\ \forall x > 0$

Hay $\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \left(1 - \frac{x}{2}\right) > 0, \forall x > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} > 1 - \frac{x}{2}, \forall x > 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} > x - \frac{x^2}{2}, \forall x > 0$

$\Rightarrow f(x) > x - \frac{x^2}{2}, \forall x > 0 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $x - \frac{x^2}{2} < f(x) < x,\ \forall x > 0$ (đpcm)

b) Đặt $S_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + ... + f\left(\frac{n}{n^2}\right)$

Từ câu a ta có $x - \frac{x^2}{2} < f(x) < x,\ \forall x > 0$

$\Rightarrow \frac{i}{n^2} - \frac{i^2}{2n^4} < f\left(\frac{i}{n^2}\right) < \frac{i}{n^2}\ (i = \overline{1,n})$

$\Rightarrow \frac{1+2+...+n}{n^2} - \frac{1^2+2^2+...+n^2}{2n^4} < S_n < \frac{n(n+1)}{2n^2}$

$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6.2.n^4} < S_n < \frac{n(n+1)}{2n^2}$

$\Rightarrow \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12.n^3} < S_n < \frac{n+1}{2n}$

Vì $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12.n^3}\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$.

Câu 5

Ta có $u_{k+1} - u_k = \frac{u_k^2}{2011} \Rightarrow \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k} = \frac{u_k}{2011} \Rightarrow \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k.u_{k+1}} = \frac{u_k}{2011.u_{k+1}}$

$$\Rightarrow \frac{u_k}{u_{k+1}} = 2011.\left[\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}\right]$$

Vậy $S_n = 2011.\left[\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - ... + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right] = 2011\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}}\right)$

Ta có $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2011} \geq u_n$ nên dãy $\{u_n\}$ tăng.

Giả sử $\{u_n\}$ bị chặn trên, suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim u_n = a$ ($a > 1$).

Do đó: từ $u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{2011}$ suy ra $\lim u_n = \lim\left(u_n + \frac{u_n^2}{2011}\right)$

$$\Rightarrow a = a + \frac{a^2}{2011} \Rightarrow a = 0 \text{ (vô lí)}$$

Vậy $\{u_n\}$ tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{u_{n+1}} = 0$$

Do đó $\lim S_n = 2011$.

Câu 6

Thay $x = -\frac{1}{4}y$ vào (1), ta được $f\left(\frac{1}{4}f(y) - \frac{1}{2}y\right) = 1$ (2)

Thay $x = y = 0$ vào (1), ta được $f\left(\frac{1}{4}f(0)\right) = 1$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $f\left(\frac{1}{4}f(y) - \frac{1}{2}y\right) = f\left(\frac{1}{4}f(0)\right)$

Do f đồng biến nên $\frac{1}{4}f(y) - \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}f(0) \Rightarrow f(y) = 2y + f(0), \forall y \in \mathbb{R}$

Thay $y = 0, x = -\frac{f(0)}{8}$ vào (1) $\Rightarrow f(0) = \frac{2}{3}$

Vậy $f(y) = 2y + \frac{2}{3}$. Thử lại thấy $f(y)$ thoả mãn đề.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO CẦN THƠ
TRƯỜNG THPT VIỆT MỸ

Câu 1

Phương trình đã cho tương đương với

$$(3x+2)^3 + 3x + 2 = \left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^3 + \sqrt{x^2+x+1}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ tăng trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình đã cho được viết dạng $f(3x+2) = f\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)$

Suy ra $3x + 2 = \sqrt{x^2+x+1}$

Giải phương trình này ta được nghiệm $x = -\frac{3}{8}$

Câu 2

Điều kiện $x \neq 1$

Trước hết ta chứng minh khẳng định sau:

"Gọi p là một ước nguyên tố của $\frac{x^7-1}{x-1} = x^6 + x^5 + \ldots + x + 1$

thì $p \equiv 0 \pmod 7$ hay $p \equiv 1 \pmod 7$"

Thật vậy,

Nếu $p \mid x-1$ thì $x \equiv 1 \pmod p \Rightarrow \frac{x^7-1}{x-1} = x^6 + x^5 + \ldots + x + 1 \equiv 7 \pmod p$

Ta có $p \left| \frac{x^7-1}{x-1} \right.$ nên suy ra $p \mid 7 \Rightarrow p = 7$.

Vậy $p \equiv 0 \pmod 7$

Nếu $(p, x-1) = 1$ thì vì $p \left| \frac{x^7-1}{x-1} \right.$ nên $p \mid (x-1)(x^6 + x^5 + \ldots + x + 1)$

Hay $x^7 \equiv 1 \pmod p$

Từ $p \mid x^7 - 1$ ta có $(x, p) = 1$

Vậy $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

Nếu $(p-1, 7) = 1$ thì có m, n nguyên sao cho $m(p-1) + n.7 = 1$

Từ đó $x = x^{m(p-1)+n.7} = \left(x^{p-1}\right)^m.\left(x^7\right)^n \equiv 1 \pmod p$

Suy ra $x - 1$ chia hết cho p. Vô lí

Vậy $p - 1 \vdots 7$ hay $p \equiv 1 \pmod 7$.

Từ đó ta suy ra mọi ước dương d của $\frac{x^7-1}{x-1}$ thỏa $d \equiv 0 \pmod 7$ hay $d \equiv 1 \pmod 7$.

Bây giờ ta giả sử $(x; y)$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Ta có $y - 1$ và $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$ chia hết $\frac{x^7-1}{x-1}$

Suy ra $y \equiv 1 \pmod 7$ hay $y \equiv 2 \pmod 7$ và $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$ đồng dư 0 (mod7) hay 1 (mod7).

Tuy nhiên $y \equiv 1 \pmod 7$ dẫn đến $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 \equiv 5 \pmod 7$.

$y \equiv 2 \pmod 7$ dẫn đến $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 \equiv 3 \pmod 7$.

Điều này không thể xảy ra. Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 3

Áp dụng tỉ số thể tích ta có $\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} + \frac{PD'}{DD'} = 1$

Đặt $a = \frac{PA}{PA'}, b = \frac{PB}{PB'}, c = \frac{PC}{PC'}, d = \frac{PD}{PD'}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{d+1} = 1 \ (1)$$

Nếu $a > 3, b > 3, c > 3, d > 3$ suy ra VT(1) < 1. Vô lý

Nếu $a < 3, b < 3, c < 3, d < 3$ suy ra VT(1) > 1. Vô lý

Vậy trong a, b, c, d tồn tại ít nhất một đại lượng không lớn hơn 3 và và ít nhất một đại lượng không bé hơn 3.

Câu 4

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua G.

Ta có $\Delta A_1B_1C_1$ đồng dạng $\Delta BA'G$, suy ra tỉ số đồng dạng là

$$\frac{B_1C_1}{A'G} = \frac{B_1C_1}{AG} = \cot\widehat{AC_1G} + \cot\widehat{AB_1G}$$

Mà $\cot\widehat{AC_1G} = \cot\widehat{ABG}$

$$= \frac{AB^2 + BG^2 - GA^2}{4S_{ABG}}$$

$$= \frac{3(AB^2 + BG^2 - GA^2)}{4S_{ABC}}$$

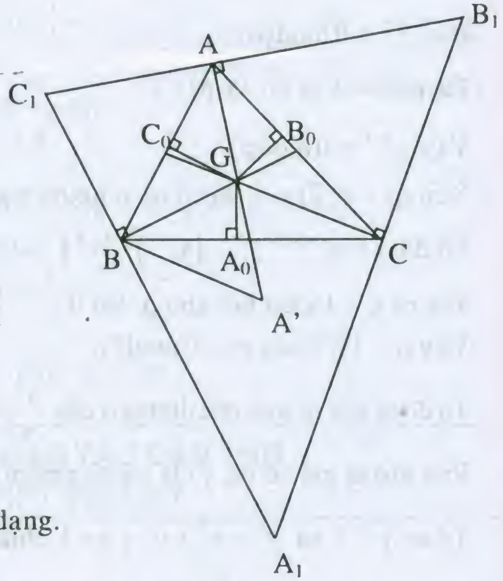
Tương tự

$$\cot\widehat{AB_1G} = \frac{3(AC^2 + CG^2 - GA^2)}{4S_{ABC}}$$

Suy ra

$$\cot\widehat{AC_1G} + \cot\widehat{AB_1G}$$

$$= \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{2S_{ABC}}$$ là tỉ số đồng dạng.



Mà $S_{A'BG} = \frac{S_{ABC}}{3}$, ta được $\frac{3S_1}{S_{ABC}} = \left(\frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{2S_{ABC}}\right)^2$

Ta có: $BC^2 + CA^2 + AB^2 = 9(R^2 - OG^2)$ (R là bán kính đường tròn (O))

Suy ra $S_{ABC}.S_1 = \dfrac{\left(BC^2 + CA^2 + AB^2\right)^2}{12}$

$$= \frac{81(R^2 - OG^2)^2}{12} = \frac{27}{4}(R^2 - OG^2)^2 \qquad (1)$$

Mặt khác, theo định lí Euler cho tam giác Pedal $A_0B_0C_0$,

ta có $\dfrac{S_{A_0B_0C_0}}{S_{ABC}} = \left|\dfrac{R^2 - OG^2}{4R^2}\right|$

Do điểm G luôn nằm trong tam giác ABC nên $R \geq OG$

$$\Rightarrow \frac{S_{A_0B_0C_0}}{S_{ABC}} = \frac{R^2 - OG^2}{4R^2} \qquad (2)$$

Từ (1), (2) ta có $S_0S_1 = \dfrac{27}{4}(R^2 - OG^2)^2\,\dfrac{R^2 - OG^2}{4R^2} = \dfrac{27(R^2 - OG^2)^3}{16R^2}$ (3)

Ta có $S_1.S_0 = \dfrac{27(R^2 - OG^2)^3}{16R^2} \leq \dfrac{27R^4}{16} = \dfrac{27}{16}$ $(R = 1)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $O \equiv G$, hay ΔABC đều. (4)

Trong mọi tam giác ta luôn có $9OG^2 = R^2\left(1 - 8\cos A.\cos B.\cos C\right)$

Vì tam giác ABC không tù nên $8\cos A.\cos B.\cos C \geq 0 \Rightarrow OG^2 \leq \dfrac{R^2}{9}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông (5)

Từ (3), (5) $\Rightarrow S_1S_0 \geq \dfrac{27\left(R^2 - \dfrac{R^2}{9}\right)^3}{16R^2} = \dfrac{32}{27}$ (do R = 1). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC vuông. (6)

Từ (4), (6) ta có điều phải chứng minh.

Câu 5

Ta có $a_{n+1} = a_n(2 - a.a_n) \Leftrightarrow aa_{n+1} = aa_n(2 - a.a_n)$

Xét dãy $\left(b_n\right)$ với $\begin{cases} b_1 = aa_1 = aa_0 \\ b_n = aa_n \quad \text{với } n = 1, 2, 3... \end{cases}$

Ta có $b_{n+1} = b_n(2 - b_n) = -b_n^2 + 2b_n = -(b_n - 1)^2 + 1$

Suy ra $b_{n+1} - 1 = -(b_n - 1)^2 = -(-(b_{n-1} - 1)^2)^2$

$$= -(b_{n-1} - 1)^{2^2} = ... = -(b_1 - 1)^{2^n} = -(aa_0 - 1)^{2^n}$$

Ta có $0 < aa_0 < 2 \Rightarrow -1 < aa_0 - 1 < 1 \Rightarrow |aa_0 - 1| < 1$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty}(aa_0 - 1)^{2^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = 1$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{a}$

Câu 6

Giả sử có $y_1, y_2 \in [1;+\infty) : f(y_1) = f(y_2)$

$$\Rightarrow xf(y_1) = xf(y_2)\ \ \forall x \in [1;+\infty)$$

$$\Rightarrow f(xf(y_1)) = f(xf(y_2)) \Rightarrow y_1f(x) = y_2f(x) \Rightarrow y_1 = y_2$$

Vậy f đơn ánh

Từ điều kiện bài toán cho x = y = 1, ta được $f(f(1)) = f(1) \Rightarrow f(1) = 1$

Cũng từ điều kiện bài toán cho x = 1 được $f(f(y)) = y$ với $\forall y \in [1;+\infty)$

Hay $f(f(x)) = x$ với $\forall x \in [1;+\infty)$

Từ điều kiện bài toán, thay y bởi f(y) ta được

$$f(xf(f(y))) = f(y)f(x) \text{ với } \forall x,y \in [1;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow f(xy) = f(y)f(x) \text{ với } \forall x,y \in [1;+\infty)$$

Mặt khác f tăng trên $[1;+\infty)$, thật vậy với $\forall x,y \in [1;+\infty)$ và $x > y$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} > 1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) > 1 \Rightarrow f(x) = f(\frac{x}{y}.y) = f(\frac{x}{y})f(y) > f(y)$$

Cuối cùng chứng minh $f(x) = x$ với $\forall x \in [1;+\infty)$

Nếu $f(x) > x$ thì $f(f(x)) > f(x) \Rightarrow x > f(x)$. Vô lí

Nếu $f(x) < x$ thì $f(f(x)) < f(x) \Rightarrow x < f(x)$. Vô lí

Thử lại $f(x) = x$ với $\forall x \in [1;+\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

NĂM 2012

TRƯỜNG THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU - AN GIANG

Câu 1

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(3x+y)(x+3y)\sqrt{xy}=14\\(x+y)\left(x^2+14xy+y^2\right)=36\end{cases}$

Câu 2

Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n=\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\left(\dfrac{2^1}{1}+\dfrac{2^2}{2}+\cdots+\dfrac{2^n}{n}\right), n=1,2,3,...$

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3

Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=a, AD=1$, $\widehat{BAD}=\alpha$, tam giác ABD có tất cả các góc đều nhọn. Hãy chứng minh rằng các hình tròn bán kính bằng 1 có tâm lần lượt là A,B,C,D sẽ phủ kín hình bình hành này nếu :

$\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha\geq a$.

Câu 4

Tìm hàm số $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ thỏa mãn: $\forall x\in\mathbb{Q}^+$

$$\begin{cases}f(x+1)=f(x)+1\\f\left(x^2\right)=\left[f(x)-1\right]^2+1\end{cases}$$

Câu 5

Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $2^y=x^3+x^2+x+1$.

Câu 6

Xét bảng ô vuông 4×4. Người ta điền vào mỗi ô của bảng một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột đều bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách ?

TRƯỜNG THPT NGUYỄN DU – ĐĂKLĂK

Câu 1

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}5^{\ln x}=7^{\ln y}\\(7x)^{\ln 7}=(5y)^{\ln 5}\end{cases}$

Câu 2

Cho 2 dãy (u_n), (v_n) thoả mãn: $\begin{cases} u_1 = 2011; v_1 = 2012 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_n v_n}{v_n^2+1} + v_n \sin u_n\right) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{u_n v_n}{u_n^2+1} + u_n \cos v_n\right) \end{cases}$

Chứng minh rằng các dãy (u_n), (v_n) có giới hạn hữu hạn.

Câu 3

Cho 2 đa giác đều n cạnh nội tiếp và ngoại tiếp cùng một đường tròn. Chứng minh rằng tổng chu vi 2 đa giác đó luôn lớn hơn 2 lần chu vi đường tròn đó.

Câu 4

Tìm tất cả các hàm f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn:

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) + x + 4y + 7z \geq 3f(x+2y+3z); \forall x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Câu 5

Tìm các số nguyên dương a, b, c và số nguyên tố p thoả mãn:

$$(2a+3b)(3a+2b) = p^c.$$

Câu 6

Có bao nhiêu song ánh f: $\{1;2;3;...;10\} \longrightarrow \{1;2;3;...;10\}$ thoả mãn:

$$|f(x) - x| \leq 1; \forall x \in \{1;2;3;...;10\}.$$

TRƯỜNG THPT CHUYÊN-HUỲNH MẪN ĐẠT - KIÊN GIANG

Câu 1

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + xy - 1 = 0 (1) \\ \dfrac{x^2}{2(1-x)^4} - \dfrac{xy}{6(1-x)^2} = \dfrac{1}{9} (2) \end{cases}$

Câu 2

Cho a là số tự nhiên không nhỏ hơn 3.

Xét dãy số: $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n - \left[\dfrac{u_n}{2}\right] + 1 \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$.

(Với $\left[\dfrac{U_n}{2}\right]$ là phần nguyên của $\dfrac{U_n}{2}$

Tìm $\lim u_n$.

Câu 3

Trong tất cả các tam giác có cùng đáy và cùng góc ở đỉnh. Tìm tam giác có chu vi lớn nhất.

Câu 4

Cho $k>1$. Hãy tìm tất cả các hàm tăng thực sự $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(xf\left(y\right)\right)=yf\left(kx\right)\forall x,y\in\mathbb{R}\ (*)$$

Câu 5

Tìm số nguyên dương b thỏa mãn:

i) $b\in[4^{2012};30^{2012}]$

ii) $b\equiv 1(\bmod 31)$

iii) Với mỗi số nguyên dương k, tồn tại a_k thỏa mãn $a_k^{2012}-b$ chia hết cho k.

Câu 6

Xác định số các hoán vị $(a_1, a_2, \ldots, a_{2012})$ của tập $\{1; 2; 3; \ldots;2012\}$ thỏa mãn tính chất: $2(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$ chia hết cho k, với mọi $k = 1, 2, \ldots, 2012$.

TRƯỜNG THPT KON TUM

Câu 1

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+y+1+x\sqrt{x^2+2}+\left(y+1\right)\sqrt{y^2+2y+3}=0 \\ 30^{x-y}+4^{x-y+1}=41\left(x-y\right)+5 \end{cases}$

Câu 2

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $u_1=\dfrac{1}{2}, u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2+\sqrt{2u_n^2+3}}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$.

Tìm $\lim u_n$.

Câu 3

Chứng minh rằng nếu một tứ giác có ba cạnh không lớn hơn 1, thì diện tích của nó không lớn hơn $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 4

Tìm tất cả các đa thức hệ số thực P(x) thỏa mãn điều kiện sau:

$$P\left(P\left(x\right)+y^2\right)=P^2\left(x\right)-P\left(x\right)P\left(y\right)+xy+x$$

Câu 5

Giải phương trình sau trên tập số nguyên: $x_1^4+x_2^4+x_3^4+\ldots+x_{11}^4=2012$.

Câu 6

Cho tập hợp M gồm 2005 số dương: $a_1,a_2,\ldots,a_{2005}$. Xét tất cả các tập hợp con T_i khác rỗng của M, gọi s_i là tổng các số thuộc một tập hợp con T_i nói trên.

Chứng minh rằng có thể chia tập hợp tất cả các số s_i được thành lập như vậy thành 2005 tập hợp con khác rỗng không giao nhau sao cho tỉ số của hai số bất kì thuộc cùng một tập hợp con vừa được phân chia không vượt quá 2.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH - ĐỒNG NAI

Câu 1

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{xy - x^2y^2} \\ 4xy^3 + y^3 + \dfrac{1}{2} = 2x^2 + \sqrt{1 + (2x-y)^2} \end{cases} \quad (1)$$

Câu 2

Cho dãy số (u_n) xác định như sau $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = -1 \\ u_n = -u_{n-1} - 2u_{n-2}, n = 3, 4, ... \end{cases}$

Chứng minh rằng $A = 2^{2012} - 7u_{2010}^2$ là số chính phương

Câu 3

Cho tam giác ABC, trên các phần kéo dài AB, CB về phía B lấy M, N sao cho AM = CN = p (p nửa chu vi tam giác ABC). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đường kính BK.

Chứng minh: $KI \perp MN$.

Câu 4

Tìm tất cả các hàm số *f*: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa :

$\forall\, m; n \in \mathbb{N}$ *ta có:* $f[f(m) + f(n)] = m + n$.

Câu 5

Tìm tất cả bộ ba số nguyên dương (x, y, z) sao cho tổng :

$\sqrt{\dfrac{2012}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{2012}{y+z}} + \sqrt{\dfrac{2012}{z+x}}$ là một số nguyên dương chẵn.

Câu 6

Cho A là tập hợp gồm 200 số nguyên dương phân biệt và bất kì 3 số nguyên dương phân biệt của A là độ dài 3 cạnh của một tam giác không tù . Trong trường hợp này , ta gọi là một tam giác xác định bởi tập A và kí hiệu S(A) là tổng chu vi của tất cả các tam giác khác nhau xác định bởi tập hợp A. Tìm min (S(A)). (Hai tam giác bằng nhau được xem là như nhau).

TRƯỜNG THPT PLEIKU – GIALAI

Câu 1

Giải phương trình : $\sin^{2010} x + \cos^{2010} x = 1$ (1)

Câu 2

Cho n là số nguyên dương chẵn.

Chứng minh rằng: $2^n C_n^0 + 2^{n-2} C_n^2 + 2^{n-4} C_n^4 + ... + 2^2 C_n^{n-2} + C_n^n = \dfrac{3^n + 1}{2}$.

Câu 3

Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn, Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Một đường thẳng d thay đổi, luôn đi qua I, cắt hai cạnh AB và AC lần lượt tại M và N.

Chứng minh rằng tổng $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN}$ có giá trị không đổi.

Câu 4

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $a + b + c \geq 3abc$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3abc$.

Câu 5

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn $x_1 = 4$; $x_{n+1} = x_n^2 - 2$; $\forall n \geq 1$.

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_1 x_2 ... x_n}$.

Câu 6

Tìm tất cả các hàm f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG – BÌNH PHƯỚC

Câu 1

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 = -3 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} + 6y = 24 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Câu 2

Cho dãy số $\{u_n\}; n = 0; 1; 2;...$

Xác định như sau: $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n + \cos u_n \text{ với } n = 0; 1; 2; ... \end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Câu 3

Cho đường tròn (C) có tâm I bán kính R và điểm O cố định sao cho OI=2R. Gọi (C_1), (C_2) là hai đường tròn thay đổi qua O, tiếp xúc với (C) cà trực giao với nhau. M là giao điểm thứ hai của (C_1), (C_2). Tìm tập hợp điểm M.

Câu 4

Tìm tất cả các hàm số liên tục f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$f(1) = -1$ và $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$, với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Câu 5

Cho *n, d* là các số nguyên dương sao cho d chia hết $2n^2$.

Chứng minh rằng $n^2 + d$ không thể là số chính phương.

Câu 6

Có bao nhiêu số tự nhiên có 10 chữ số khác nhau đôi một, trong đó các chữ số 1, 2 , 3, 4, 5 được xếp theo thứ tự tăng dần từ trái sang phải nhưng các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 thì không được xếp như vậy.

TRƯỜNG PHỔ THÔNG THỰC HÀNH SƯ PHẠM AN GIANG

Câu 1

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(y+x)^2 = (5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$$

Câu 2

Cho a là số thực dương, xét dãy số (x_n):
$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} \geq n + 2.x_n - \sum_{k=1}^{n-1} k.x_k \end{cases} \quad \forall n \geq 1$$
. Tìm $\lim x_n$

Câu 3

Cho ba đường tròn O, O_1, O_2 bán kính r, r_1, R tiếp xúc ngoài từng đôi một. Tìm độ dài của dây AB mà tiếp tuyến chung của hai đường tròn O, O_1 tại tiếp điểm cắt đường tròn O_2.

Câu 4

Cho hàm số f(x): $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x).f(y) = f(x.y) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad , \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$
. Tính f(2012)

Câu 5

Chứng minh rằng có vô hạn các số có dạng $a_n = 2^n - 3$ $(n \geq 2)$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

Câu 6

Chứng minh rằng trong mọi khối đa diện lồi tồn tại ít nhất hai mặt có cùng số cạnh.

ĐÁP ÁN

TRƯỜNG THPT CHUYÊN THOẠI NGỌC HẦU - AN GIANG

Câu 1

Hệ phương trình $\begin{cases}(3x+y)(x+3y)\sqrt{xy}=14 & (1)\\(x+y)(x^2+14xy+y^2)=36 & (2)\end{cases}$

Đặt $\sqrt{x}=u\geq 0;\sqrt{y}=v\geq 0$, ta được

$$(1),(2)\Leftrightarrow\begin{cases}uv(3u^4+10u^2v^2+3v^4)=14\\u^6+15u^4v^2+15u^2v^4+v^6=36\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3u^5v+10u^3v^3+3uv^5=14\\u^6+15u^4v^2+15u^2v^4+v^6=36\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}36+2.14=u^6+6u^5v+15u^4v^2+20u^3v^3+15u^2v^4+6uv^5+v^6\\36-2.14=u^6-6u^5v+15u^4v^2-20u^3v^3+15u^2v^4-6uv^5+v^6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(u+v)^6=64=2^6\\(u-v)^6=8=\left(\sqrt{2}\right)^6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=2\\u-v=\sqrt{2}\end{cases}\vee\begin{cases}u+v=2\\u-v=-\sqrt{2}\end{cases}\text{ (vì } u,v\geq 0)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\v=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\vee\begin{cases}u=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\v=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

Vậy hệ có các nghiệm : $\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2};\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$ và $\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2};\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$

Câu 2

Rõ ràng: $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$

Ta có:

$$u_{n+1}=\frac{n+2}{2^{n+2}}\left(\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\cdots+\frac{2^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}(u_n+1)\ (*)$$

nên $u_{n+2}-u_{n+1}=\dfrac{(n+2)^2(u_{n+1}-u_n)-(u_n+1)}{2(n+1)(n+2)},n=1,2,3,\ldots$

Vì $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên nếu $u_{n+1} - u_n \le 0$ thì $u_{n+2} - u_{n+1} \le 0$.

Nhưng $u_3 = \frac{5}{3}$ và $u_4 = \frac{5}{3}$, nghĩa là $u_4 - u_3 = 0$.

Do đó: $u_5 - u_4 \le 0, u_6 - u_5 \le 0, ..., u_{n+1} - u_n \le 0$

Chứng tỏ, dãy (u_n) là dãy số giảm với mọi $n \ge 3$.

Mà nó bị chặn dưới bởi 0. Do đó, dãy (u_n) hội tụ.

Đặt $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.

Từ hệ thức (*), chuyển qua giới hạn ta được: $a = \frac{1}{2}(a+1) \Leftrightarrow a = 1$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Câu 3

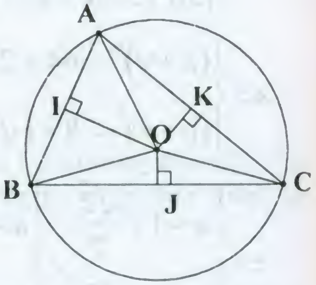
Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: Gọi O là tâm và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó, các hình tròn tâm A, B, C với bán kính x sẽ phủ kín ΔABC nếu và chỉ nếu $x \ge R$.

Chứng minh bổ đề:

1/ *Điều kiện cần:* Các hình tròn tâm A, B, C bán kính x phủ $\Delta ABC \Rightarrow$ các hình tròn này phải phủ $O \Rightarrow x \ge R$.

2/ *Điều kiện đủ:* Đảo lại, giả sử $x \ge R$ với (O, R) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta xét các vòng tròn tâm A, B, C có bán kính bằng R. Khi đó, gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu của O xuống AB, BC, CA thì hình tròn tâm A bán kính R sẽ phủ tứ giác $OIAK$. Tương tự hình tròn tâm B, C bán kính R lần lượt phủ kín tứ giác $OIBJ, OJCK$. Do đó các hình tròn tâm A, B, C bán kính R phủ kín ΔABC.



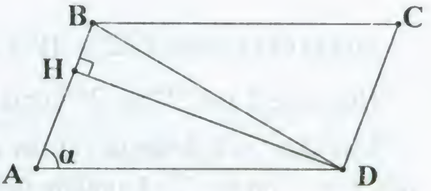
Theo giả thiết ta có $x \ge R$ nên hiển nhiên các hình tròn tâm A, B, C bán kính x phủ kín ΔABC. Điều kiện đủ được chứng minh.

Chứng minh bài toán:

Các hình tròn tâm A, C, B, D bán kính bằng 1 phủ kín hình bình hành $ABCD \Leftrightarrow$ 3 hình tròn tâm A, B, D bán kính bằng 1 phủ kín tam giác ΔABD.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABD; áp dụng bổ đề trên ta có điều kiện cần và đủ để 3 hình tròn đơn vị tâm A, B, D phủ kín ΔABD là $R \le 1$.

Ta có: $BD = 2R\sin\alpha$



và $BD^2 = a^2 + 1 - 2a\cos\alpha$

Nên $4R^2\sin^2\alpha = a^2 + 1 - 2a\cos\alpha$

Do đó:

$4\sin^2\alpha \ge a^2 + 1 - 2a\cos\alpha$ (vì $1 \ge R$)

$\Leftrightarrow 3\sin^2\alpha \ge a^2 + 1 - 2a\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1$

$\Leftrightarrow 3\sin^2\alpha \ge a^2 - 2a\cos\alpha + \cos^2\alpha \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin\alpha \ge |a - \cos\alpha|$

(do ΔABD nhọn nên có $AB > AH = \cos\alpha \Leftrightarrow a > \cos\alpha$)

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin\alpha \ge a - \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha \ge a$$

Câu 4

Vì $f(x+1) = f(x) + 1 \quad \forall x \in \mathbb{Q}^+$ (giả thiết)

nên $f(x+n) = f(x) + n \quad \forall x \in \mathbb{Q}^+, \forall n \in \mathbb{N}^+$ (1)

(Chứng minh dễ dàng bằng phương pháp quy nạp)

$\forall x \in \mathbb{Q}^+$ đặt $x = \dfrac{p}{q}; p, q \in \mathbb{N}^+$, ta có:

$$f[(\frac{p}{q} + q)^2] = [f(\frac{p}{q} + q) - 1]^2 + 1 \text{ (giả thiết)}$$

$$\Leftrightarrow f(\frac{p^2}{q^2} + 2p + q^2) = [f(\frac{p}{q}) + q - 1]^2 + 1 \qquad (do\ (1))$$

$$\Leftrightarrow f[(\frac{p}{q})^2] + 2p + q^2 = f^2(\frac{p}{q}) + 2(q-1)f(\frac{p}{q}) + (q-1)^2 + 1\ (do\ (1))$$

$$\Leftrightarrow [f(\frac{p}{q}) - 1]^2 + 1 + 2p + q^2 = f^2(\frac{p}{q}) + 2qf(\frac{p}{q}) - 2f(\frac{p}{q}) + q^2 - 2q + 2\ (do\ gt)$$

$$\Leftrightarrow f^2(\frac{p}{q}) - 2f(\frac{p}{q}) + 2 + 2p + q^2 = f^2(\frac{p}{q}) + 2qf(\frac{p}{q}) - 2f(\frac{p}{q}) + q^2 - 2q + 2$$

$$\Leftrightarrow 2qf(\frac{p}{q}) = 2p + 2q \Leftrightarrow f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q} + 1$$

Vậy $f(x) = x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{Q}^+$

Thử lại ta có $f(x) = x + 1 \ \forall x \in \mathbb{Q}^+$ là hàm số cần tìm.

Câu 5

Ta có $2^y = x^3 + x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 2^y = (x^2+1)(x+1)$

Suy ra $(x^2+1), (x+1)$ là các ước tự nhiên của 2^y.

Do đó ta có $\begin{cases} x + 1 = 2^m & (1) \\ x^2 + 1 = 2^n & (2) \\ m + n = y \end{cases} \qquad (m, n \in \mathbb{N})$

Từ (1) và (2) suy ra $(2^m-1)^2+1=2^n \Leftrightarrow 2^{2m}-2.2^m+2=2^n$ (3)

Nếu $m \geq 2$ thì 2^{2m} và 2^{m+1} chia hết cho 4 nên theo (3) thì 2^n chia cho 4 dư 2.

Mặt khác $m \geq 2$ nên từ (1) suy ra $x \geq 3$, từ (2) suy ra $2^n = x^2+1 \geq 3^2+1=10$ nên $n \geq 4$, do đó $2^n \,\vdots\, 4$ (không thỏa mãn).

Nếu $m=1$ thì từ (1) suy ra $x=1$. Khi đó ta được $2^y=4$ nên $y=2$.

Nếu $m=0$ thì từ (1) suy ra $x=0$, suy ra $y=0$.

Vậy nghiệm ($x;y$) tự nhiên của phương trình đã cho là (1;2), (0;0).

Câu 6

Nếu 3 hàng đầu tiên đã được điền số sao cho tổng các số trong mỗi hàng bằng 0 và trong mỗi cột có không quá hai số bằng nhau thì ta có duy nhất một cách điền số vào hàng thứ tư. Do đó ta chỉ tìm số cách điền số ba hàng đầu tiên.

Ở hàng thứ nhất và hàng thứ hai, mỗi hàng có $C_4^2=6$ cách điền số mà tổng các số bằng 0. Trong 6 cách điền số ở hàng thứ hai ta chia thành 3 trường hợp:

Trường hợp 1: Cách điền số ở hàng thứ hai trùng với cách điền số ở hàng thứ nhất 0 vị trí: có 1 cách. Khi đó, có 6 cách điền dòng thứ ba.

Trường hợp 2: Cách điền số ở hàng thứ hai trùng với cách điền số ở hàng thứ nhất 4 vị trí: có 1 cách. Khi đó, có 1 cách điền dòng thứ ba.

Trường hợp 3: Cách điền số ở hàng thứ hai trùng với cách điền số ở hàng thứ nhất 2 vị trí: có 4 cách. Khi đó, mỗi cách điền dòng thứ hai, có 2 cách điền dòng thứ ba.

Vậy số cách điền số thỏa mãn yêu cầu bài toán là: 6.1.6 + 6.1.1 + 6.4.2 = 90 cách.

TRƯỜNG THPT NGUYỄN DU – ĐĂKLĂK

Câu 1

Điều kiện x > 0; y > 0.

$$\begin{cases} 5^{\ln x} = 7^{\ln y} \\ (7x)^{\ln 7} = (5y)^{\ln 5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(5^{\ln x}\right) = \ln\left(7^{\ln y}\right) \\ \ln(7x)^{\ln 7} = \ln(5y)^{\ln 5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln 5.\ln x = \ln 7.\ln y \\ (\ln 7 + \ln x).\ln 7 = (\ln 5 + \ln y).\ln 5 \end{cases}$$

Đặt $u=\ln x;\ v=\ln y$, có: $\begin{cases} \ln 5.u - \ln 7.v = 0 \\ \ln 7.u - \ln 5.v = \ln^2 5 - \ln^2 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\ln 7 \\ v = -\ln 5 \end{cases}$

Thay vào, ta được: $\begin{cases} \ln x = -\ln 7 \\ \ln y = -\ln 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{7} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases}$.

Câu 2

Ta có:

$$u_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n v_n}{v_n^2+1} + v_n \sin u_n\right)^2 \le \frac{1}{4}\left(u_n^2+v_n^2\right)\left(\frac{v_n^2}{\left(v_n^2+1\right)^2} + \sin^2 u_n\right) \le \frac{5}{16}\left(u_n^2+v_n^2\right)$$

$$v_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n v_n}{u_n^2+1} + u_n \cos v_n\right)^2 \le \frac{1}{4}\left(v_n^2+u_n^2\right)\left(\frac{u_n^2}{\left(u_n^2+1\right)^2} + \cos^2 v_n\right) \le \frac{5}{16}\left(u_n^2+v_n^2\right)$$

$$\Rightarrow u_{n+1}^2 + v_{n+1}^2 \le \frac{10}{16}\left(u_n^2+v_n^2\right)$$

Do đó dãy $\left(u_n^2+v_n^2\right)$ có giới hạn bằng 0.

Do đó các dãy (u_n), (v_n) có giới hạn bằng 0.

Câu 3

Gọi bán kính đường tròn đó là R. a_n, b_n là cạnh 2 đa giác đều đó. P_1, P_2, P_3 là chu vi của hai đa giác đều đó và đường tròn.

Ta có: $a_n = 2R\sin\frac{\pi}{n}$; $b_n = 2R\tan\frac{\pi}{n}$.

$$P_1 + P_2 = 2.n.R.\left(\sin\frac{\pi}{n} + \tan\frac{\pi}{n}\right);\ P_3 = 2\pi R.$$

Vì $n > 2 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2n} < \frac{\pi}{4}$ nên

$$\sin\frac{\pi}{n} + \tan\frac{\pi}{n} = \frac{4\tan\frac{\pi}{2n}}{1-\tan^4\frac{\pi}{2n}} > 4\tan\frac{\pi}{2n} > 4.\frac{\pi}{2n} = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow P_1 + P_2 > 2P_3.$$

Câu 4

Đặt $g(x) = f(x) - x$. Ta có:

$$g(x+y) + g(y+z) + g(z+x) \ge 3g(x+2y+3z); \forall x,y,z \in \mathbb{R}$$

Chọn $x = y = \frac{a}{2}; z = -\frac{a}{2}$ có: $g(a) \ge g(0); \forall a \in \mathbb{R}$.

Do đó: $g(0) = \min g(x)$. (1)

Chọn $x = -y; z = 0$ có: $g(x) + g(-x) + g(0) \ge 3g(-x); \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow g(x) + g(0) \ge 2g(-x); \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow g(x) \ge g(-x); \forall x \in R \Rightarrow g(x) = g(-x); \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ (2) $\Rightarrow g(0) \geq g(-x); \forall x \in \mathbb{R}$

Từ (1) $\Rightarrow g(0) = g(-x); \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $g(x) = g(0) = C; \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó: $f(x) = x + C; \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 5

Giả sử có bộ 4 số (a, b, c, p) thoả mãn đề ra, ta có:

$$(2a+3b)(3a+2b) = p^c \Rightarrow \begin{cases} 2a+3b = p^m \\ 3a+2b = p^n \end{cases}. (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3p^n - 2p^m}{5} \\ b = \dfrac{3p^m - 2p^n}{5} \end{cases} (2)$$

Nếu p khác 5 thì từ (1) $\Rightarrow$ m, n ≥ 1 và m khác n (vì p không chia hết cho 5) $\Rightarrow c > 2$ và từ (2) $\Rightarrow$ a, b chia hết cho p.

Do đó bộ bốn số ($\frac{a}{p}, \frac{b}{p}, c-2, p$) cũng thoả mãn đề ra. Vậy có vô số bộ (a, b, c, p) thoả mãn đề ra với giá trị a, b nguyên dương giảm dần (vô lí). Vậy p = 5.

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} a = 3.5^{n-1} - 2.5^{m-1} \\ b = 3.5^{m-1} - 2.5^{n-1} \end{cases}$$

Nếu m > n thì a < 0 vô lí, nếu m < n thì b < 0 vô lí. Vậy m = n = k + 1.

Do đó tất cả các bộ 4 số (a, b, c, p) tìm được là (5^k, 5^k, 2k+2, 5) với k là số tự nhiên bất kì.

Câu 6

Gọi S_n là số song ánh f: $\{1;2;3;...;n\} \longrightarrow \{1;2;3;...;n\}$ thoả mãn:

$$|f(x) - x| \leq 1; \forall x \in \{1;2;3;...;n\}.$$

Ta có: $S_1 = 1; S_2 = 2$.

Với n > 2 ta có: nếu f(n) = n thì số song ánh như vậy là S_{n-1}.

nếu f(n) = n – 1 thì f(n – 1) = n do đó số song ánh như vậy là S_{n-2}.

Do đó $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$ với n > 2.

Từ đó tính được đáp số bài toán là $S_{10} = 89$.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN HUỲNH MẪN ĐẠT - KIÊN GIANG

Câu 1

Xét phương trình : $2t^2 + y.t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = x$ là 1 nghiệm

Phương trình thứ (2) $\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{-3x}{2(1-x)^2}\right)^2 + y\left(\dfrac{-3x}{2(1-x)^2}\right) - 1 = 0$

$\Rightarrow t_2 = -\dfrac{3x}{2(1-x)^2}$ là nghiệm thứ 2

Áp dụng định lí Vi ét : $t_1.t_2 = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x.(-\dfrac{3x}{2(1-x)^2}) = -\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Từ (1) ta thấy $x \neq 0 \Rightarrow y = \dfrac{1-2x^2}{x}$

Với $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_1 = \left[1 - 2\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2\left(-\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}\right) = 2$

Với : $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_2 = \left[1 - 2\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]^2\left(\dfrac{2}{-1+\sqrt{3}}\right) = 2$

Vậy hệ có 2 nghiệm : $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}; 2\right)$ và $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}; 2\right)$

Câu 2

TH 1: a=3. Ta có $u_n = 3\ \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim u_n = 3$.

TH 2: $a \geq 4$.

Nếu $u_n \geq 4$

Ta có: $u_n = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{u_n}{2} \geq \dfrac{u_n}{2} + 2 \geq \left[\dfrac{u_n}{2}\right] + 2 \Rightarrow u_{n+1} = u_n - \left[\dfrac{u_n}{2}\right] + 1 \geq 3$.

Và $\dfrac{u_n}{2} \geq 2 \Rightarrow \left[\dfrac{u_n}{2}\right] \geq 2 > 1 \Rightarrow u_{n+1} = u_n - \left[\dfrac{u_n}{2}\right] + 1 < u_n$

Vậy nếu $u_n \geq 4$ thì $u_n > u_{n+1} \geq 3$. Mặt khác $u_n \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

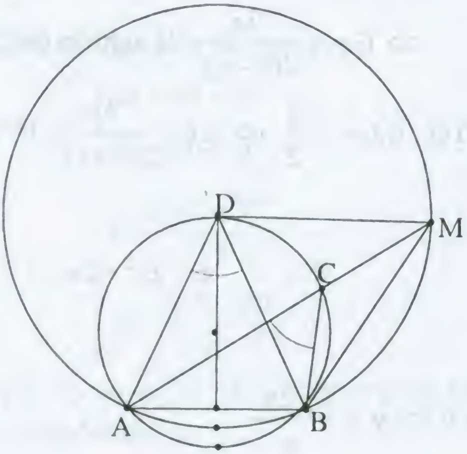
Giả sử $u_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_1 > u_2 > ... > u_n > ... \geq 3$

và $u_n \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ điều này vô lí vì các giá trị của u_n là hữu hạn.

Vậy tồn tại $u_k = 3$ với $k \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó $u_n = 3, \ \forall n \geq k$. Suy ra $\lim u_n = 3$

Câu 3



Dựng cung chứa góc φ căng dây AB. Xét hai tam giác nội tiếp cung chứa góc đó là tam giác cân ADB và tam giác thường ACB ta có $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \varphi$

Dựng đường tròn tâm D bán kính DA . Gọi M là giao của AC với (D)

Ta có: AD + DB = AD + DM >AM = AC + CM (1)

Ta có : $\widehat{AMB} + \widehat{MBC} = \widehat{ACB}$ (2)

Mà $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\widehat{ADB} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{MBC} = \dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$

⇒ Tam giác MBC là tam giác câm tại C ⇒ CM = CB

Thế vào (1) ta có: AD + DB > AC + CB ⇒ Chu vi tam giác ABD lớn hơn chu vi tam giác ABC.

Vậy trong tất cả các tam giác có cùng đáy và cùng góc ở đỉnh bằng φ tam giác cân có chu vi lớn nhất.

Câu 4

Giả sử f là hàm số thỏa điều kiện bài toán

Thay x = y = 1 vào (*) nên có $f\left(f\left(1\right)\right) = f\left(k\right)$.

Vì f tăng thực sự nên f(1)=k và $f(k) > f(1) = k > 0$

Thay x=1 vào (*) ta được:

$$f\left(f\left(y\right)\right)=yf\left(k\right)\forall y\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f\left(f\left(f\left(y\right)\right)\right)=f\left(yf\left(k\right)\right)\forall y$$

$$\Rightarrow f\left(y\right).f(k)=kf\left(ky\right)\forall y\Rightarrow f\left(x\right).f(k)=kf\left(kx\right)\forall x$$

Ta chứng minh chỉ có duy nhất hàm số f(x) = kx $\forall x$ thỏa điều kiện bài toán

Thật vậy f(x) = kx là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán

Giả sử tồn tại f(x) thỏa điều kiện bài toán và f(x) ≠ kx,

Suy ra $\exists x_0\in\mathbb{R}:f\left(x_0\right)\neq kx_0$ hay $\exists x_0\in\mathbb{R}:\left[\begin{array}{l}f\left(x_0\right)>kx_0\\ f\left(x_0\right)<kx_0\end{array}\right.$

Nếu $f\left(x_0\right)>kx_0$, vì f tăng thực sự nên $f\left(f\left(x_0\right)\right)>f\left(kx_0\right)$.

Khi đó suy ra $x_0.f(k)>f(kx_0)$

$\Rightarrow kx_0.f(k)>kf(kx_0)=f(x_0).f(k)\Rightarrow kx_0>f(x_0)$, mâu thuẫn

Nếu $f\left(x_0\right)<kx_0$, vì f tăng thực sự nên $f\left(f\left(x_0\right)\right)<f\left(kx_0\right)$.

Khi đó suy ra $x_0.f(k)<f(kx_0)$

$\Rightarrow kx_0.f(k)<kf(kx_0)=f(x_0).f(k)\Rightarrow kx_0<f(x_0)$, cũng vô lí

Vậy chỉ có duy nhất hàm số f(x) = kx thỏa điều kiện bài toán.

Câu 5

Trước hết ta chứng minh điều kiện iii) tương đương với b = A^n (A là số nguyên dương)

Giả sử $b=p_1^{\alpha_1}...p_m^{\alpha_m}$ (p_i là các số nguyên tố khác nhau ; $\alpha_i>0$)

Áp dụng điều kiện ii) cho k = b^2 ta được : $a_k^{2012}\equiv b\pmod{b^2}$

Suy ra : $a_k^{2012}\equiv b\equiv 0(\mathrm{mod}\,p_i^{\alpha_i})$

và $a_k^{2012}\equiv b\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,p_i^{\alpha_i+1})$ (do $2\alpha_i\geq\alpha_i+1$) (với mọi i)

Từ điều này suy ra lũy thừa lớn nhất của p_i là ước của a_k^{2012} là $p_i^{\alpha_i}$.

Suy ra $2012|\alpha_i$ với mọi i

Vậy b = A^{2012} với $A=p_1^{\frac{\alpha_1}{2012}}...p_m^{\frac{\alpha_m}{2012}}$.

Ngược lại với b = A^{2012}.

Với mỗi số nguyên dương k, xét $a_k=A+k$, khi đó

$$a_k^{2012}-b\equiv a_k^{2012}-A^{2012}\equiv(a_k-A)M\equiv kM\equiv 0(\mathrm{mod}\,k)$$

Từ điều kiện i) suy ra $A\in\{4;5;...;30\}$

Ta có $A^{2012} \equiv \left(A^{30}\right)^{67}.A^2 \equiv A^2 \pmod{31}$.

Vậy $b \equiv 1 \pmod{31} \Leftrightarrow A^2 \equiv 1 \pmod{31} \Leftrightarrow 31 \mid (A-1)(A+1) \Leftrightarrow A = 30$

Vậy $b = 30^{2012}$.

Câu 6

Đặt S_n tập các hoán vị $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ của tập $\{1; 2; 3; \ldots; n\}$ thỏa mãn tính chất: $2(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$ chia hết cho k, với mọi $k = 1, 2, \ldots, n$ (*)

Ta có $|S_1| = 1$, $|S_2| = 2$, $|S_3| = 6$. Ta chứng minh $|S_n| = 2|S_{n-1}|$ với mọi $n \geq 4$

Trước hết ta chứng minh rằng, mỗi hoán vị thỏa (*), phải có $a_n = 1$ hoặc $a_n = n$. Thật vậy:

Với mỗi hoán vị $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ thỏa mãn (*), ta có:

$$2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - 2a_n = 2(1 + 2 + \ldots + n) - 2a_n$$
$$= n(n+1) - 2a_n = (n+2)(n-1) + (2 - 2a_n)$$

mà $2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$ chia hết cho $(n-1)$ nên $(2a_n - 2)$ chia hết cho $n - 1$.

Suy ra $a_n = 1$ hoặc $a_n = n$ hoặc $a_n = \dfrac{n+1}{2}$ (nếu n là số lẻ).

Nếu $a_n = \dfrac{n+1}{2}$ (n là số lẻ), ta có:

$$2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}) = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - 2a_{n-1} - 2a_n$$
$$= 2(1 + 2 + \ldots + n) - 2a_{n-1} - (n+1) = (n-2)(n+2) + (3 - 2a_{n-1})$$

mà $2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2})$ chia hết cho $(n-2)$ nên $2a_{n-1} - 3$ chia hết cho $n - 2$

Do $2a_{n-1} - 3 \leq 2n - 3 < 3n - 6$ khi $n > 3$ nên $2a_{n-1} - 3 = n - 2$

hoặc $2a_{n-1} - 3 = 2n - 4$ (vô lí vì $2a_{n-1} - 3$ là số lẻ)

Suy ra $a_{n-1} = \dfrac{n+1}{2} = a_n$ (mâu thuẫn)

Đặt $S_{n1} = \left\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \middle| (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S_n, a_n = n\right\}$;

$S_{n2} = \left\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \middle| (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S_n, a_n = 1\right\}$

Nếu $a_n = n$ thì $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ cũng là một hoán vị của $\{1; 2; \ldots; n-1\}$ thỏa mãn tính chất (*)

Suy ra ánh xạ f sau đây là song ánh:

$$f : S_{n1} \to S_{n-1}$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, n) \mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$$

Nếu $a_n = 1$, xét $(a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_{n-1} - 1)$ là một hoán vị của $\{1; 2; \ldots; n-1\}$.

Ta có $2((a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \ldots + (a_k - 1)) = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) - 2k$ chia hết cho k khi và chỉ khi $2(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$ chia hết cho k.

Suy ra ánh xạ sau đây là một song ánh

$$g : S_{n2} \to S_{n-1}$$

$$(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, 1) \mapsto (b_1, b_2, ..., b_{n-1}) = (a_1 - 1, a_2 - 1, ..., a_{n-1} - 1)$$

Vậy $|S_n| = |S_{n1}| + |S_{n2}| = 2|S_{n-1}|$. Suy ra: $S_{2012} = 3.2^{2010}$.

TRƯỜNG THPT KON TUM

Câu 1

Kí hiệu: $\begin{cases} x + y + 1 + x\sqrt{x^2 + 2} + (y+1)\sqrt{y^2 + 2y + 3} = 0 & (1) \\ 30^{x-y} + 4^{x-y+1} = 41(x-y) + 5 & (2) \end{cases}$

Đặt $a = x - y$ phương trình (2) trở thành $30^a + 4^{a+1} - 41a - 5 = 0$

Xét $f(a) = 30^a + 4^{a+1} - 41a - 5$ trên $\mathbb{R}$ có

$$f'(a) = 30^a \ln 30 + 4^{a+1} \ln 4 - 41$$

$$f''(a) = 30^a \ln^2 30 + 4^{a+1} \ln^2 4 > 0 \forall a$$

Suy ra $f'(a)$ là hàm đồng biến, vậy $f'(a)$ có không quá một nghiệm.

Khi đó $f(a)$ có không quá một cực trị hay $f(a)$ có không quá hai nghiệm (3)

Mà $f(0) = f(1) = 0$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra phương trình (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - y = 1 \end{array}\right.$

*Với $x - y = 1 \Leftrightarrow y + 1 = x$ (1) $\Leftrightarrow 2x\left(1 + \sqrt{x^2 + 2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Suy ra (x; y) = (0; –1) là nghiệm hệ đã cho

*Với $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$

$$(1) \Leftrightarrow x\left(1 + \sqrt{x^2 + 2}\right) + (y+1)\left(1 + \sqrt{(y+1)^2 + 2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(1 + \sqrt{x^2 + 2}\right) + (x+1)\left(1 + \sqrt{(x+1)^2 + 2}\right) = 0$$

Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x^2 + 2}, \ u > 0 \\ v = \sqrt{x^2 + 2x + 3}, v > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = x^2 + 2 \\ v^2 = x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2 - u^2 = 2x + 1 \\ x^2 = \dfrac{v^2 - u^2 - 1}{2} \end{cases}$

PT (1) trở thành $(v - u)\left[(v + u)\left(1 + \dfrac{v + u}{2}\right) + \dfrac{1}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow v - u = 0$

Vì u > 0, v > 0

Khi đó ta có: $\text{PT}(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+3} = \sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Suy ra nghiệm hệ $(x;y) = \left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

Lưu ý: Trường hợp (2) học sinh có thể sử dụng phương pháp đánh giá.

Câu 2

Ta có $u_1 = 3; u_2 = \dfrac{3}{2+\sqrt{21}}$. Theo quy nạp $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và (u_n) tăng.

Biến đổi về $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{2}{u_n} + \sqrt{2+\dfrac{3}{u_n^2}}$.

Đặt $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ với $v_1 = \dfrac{1}{3}$, $v_2 = \dfrac{2+\sqrt{21}}{3}$.

Ta được $v_{n+1} = 2v_n + \sqrt{2+3v_n^2} \Rightarrow v_{n+1}^2 - 4v_nv_{n+1} + v_n^2 = 2$ (*)

Từ đó suy ra

$$v_{n+2}^2 - 4v_{n+1}v_{n+2} + v_{n+1}^2 = 2 \qquad (**).$$

Trừ (**) cho (*), vế theo vế : $(v_{n+2} - v_n)(v_{n+2} - 4v_{n+1} + v_n) = 0$

hay $v_{n+2} - 4v_{n+1} + v_n = 0$ (vì (u_n) tăng).

Phương trình đặc trưng $x^2 - 4x + 1 = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = 2-\sqrt{3}$; $x_2 = 2+\sqrt{3}$.

Số hạng tổng quát có dạng $v_n = A.x_1^n + B.x_2^n$.

Ta lại có $\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{3} \\ v_2 = \dfrac{2+\sqrt{21}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{\sqrt{7}-1}{6(\sqrt{3}-2)} \\ B = \dfrac{\sqrt{7}+1}{6(\sqrt{3}+2)} \end{cases}$.

Suy ra $v_n = \dfrac{\sqrt{7}-1}{6(\sqrt{3}-2)}.(2-\sqrt{3})^n + \dfrac{\sqrt{7}+1}{6(\sqrt{3}+2)}.(2+\sqrt{3})^n$

hay $u_n = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{7}-1}{6(\sqrt{3}-2)}.(2-\sqrt{3})^n + \dfrac{\sqrt{7}+1}{6(\sqrt{3}+2)}.(2+\sqrt{3})^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

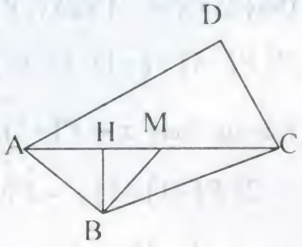
Vì $\lim(2-\sqrt{3})^n = 0$ và $\lim(2+\sqrt{3})^n = +\infty$ nên $\lim u_n = 0$.

Câu 3

Giả sử AD là cạnh duy nhất của tứ giác lớn hơn 1.

Đặt AC = a, và gọi M là trung điểm của cạnh AC.

Theo hệ thức lượng trong ΔABC, ta có $BA^2 + BC^2 = 2BM^2 + \frac{a^2}{2} \leq 2$



$\Leftrightarrow BM^2 \leq \frac{4-a^2}{4}$ (1)

$\Leftrightarrow S_{ABC} = \frac{a}{2}.BH$.

Từ (1) suy ra BH ≤ BM ≤ $\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$

Vậy $S_{ABC} \leq \frac{a}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2} = \frac{a}{4}.\sqrt{4-a^2}$ (2)

Ta có $S_{ACD} = \frac{1}{2}.AC.CD.\sin\widehat{ACD} \leq \frac{1}{2}AC.CD \leq \frac{a}{2}$

$\Rightarrow S_{ABCD} \leq \frac{a}{2} + \frac{a}{4}\sqrt{4-a^2}$ (3)

Ta có $\frac{a}{2} + \frac{a}{4}\sqrt{4-a^2} = \frac{2a + a\sqrt{4-a^2}}{4} = \frac{a}{4}\left(1+1+\sqrt{4-a^2}\right)$ (4)

Theo BĐT Bunhiacopski, ta có

$$\left(1+1+\sqrt{4-a^2}\right)^2 \leq 3\left(1+1+4-a^2\right) \Leftrightarrow 2+\sqrt{4-a^2} \leq \sqrt{3}.\sqrt{6-a^2}$$

Từ (3) và (5) suy ra $S_{ABCD} \leq \frac{\sqrt{3}}{4}a\sqrt{6-a^2}$

Theo BĐT Cô si thì $a\sqrt{6-a^2} \leq \frac{a^2+(6-a^2)}{2} = 3$

Thay (7) vào (3) ta có $S_{ABCD} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (8) (đpcm)

Dấu đẳng thức trong (8) xảy ra khi và chỉ khi dấu trong (1) xảy ra, H ≡ M, $\sin\widehat{ACD} = 1$, CD = 1, có dấu bằng trong (5), có dấu bằng trong (7).

Dấu đẳng thức (1) $\Leftrightarrow BA = BC = 1$; $\sin\widehat{ACD} = 1 \Leftrightarrow AC \perp CD$

Dấu đẳng thức (5), (6) xảy ra $\Leftrightarrow a = \sqrt{3}$

Tóm lại dấu đẳng thức trong (8) xảy ra

$\Leftrightarrow AD = 2, AB = BC = CD = 1, \widehat{ACD} = 90^o$.

Câu 4

Từ (1) thay y bởi $-y$ ta được

$$P\left(P(x)+(-y)^2\right)=P^2(x)-P(x)P(-y)+x(-y)+x \quad \forall x,y\in\mathbb{R} \quad (2)$$

Kết hợp (1) với (2), suy ra $2xy=P(x)\big(P(y)-P(-y)\big),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ (3)

Thay x = y = – 1 vào (1), ta thu được

$$P\left(P(-1)+(-1)^2\right)=P^2(-1)-P(-1)P(-1)+1-1=0 \quad (4)$$

Tiếp tục thay $x=P(-1)+1$ vào (3), ta nhận được

$$2\big(P(-1)+1\big)y=P\big(P(-1)+1\big)\big(P(y)-P(-y)\big)=0\ \ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Suy ra $P(-1)=-1$.

Tiếp tục thay $x = -1$, $y = 0$ vào (1), ta nhận được $P(0)=P(-1)=-1$ (5)

Tiếp theo, thay $x = 0$, $y = -1$ vào (1), ta nhận được $P(0) = 1 + P(-1) = 0$ (6)

Ta thấy (5) và (6) mâu thuẫn với nhau, suy ra không tồn tại hàm số thõa mãn (1).

Câu 5

Nếu x = 2k thì $x^4 = 16k^4 \vdots 16$

Nếu x = 2k + 1 thì $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

Vì (x – 1), (x + 1) là 2 số chẵn liên tiếp nên tích của chúng chia hết cho 8.

$(x^2+1)=(2k+1)^2+1=4k^2+4k+2=2(2k^2+2k+1) \vdots 2$. Suy ra $(x^4-1) \vdots 16$

Như vậy khi chia $x_1^4+x_2^4+x_3^4+...+x_{11}^4$ cho 16 có số dư bằng số các số lẻ trong $x_1^4;x_2^4;x_3^4;...;x_{11}^4$, tức là không vượt quá 11.

Mà 2012 = 16. 125 + 12 ≡ 12 (mod 16)

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Câu 6

Đặt $n=2005$. Kí hiệu các phần tử của M là $a_1\le a_2\le...\le a_n$.

Đặt $S_m=a_1+a_2+...+a_m$, $S_0=0$ $\big(0\le m\le n\big)$. Gọi $P=\left\{s_i, T_i\subseteq M\right\}$.

Kí hiệu $P_m=\left\{s\in P \mid S_{m-1}<s\le S_m\right\}$ với $m=1,2,...,n$.

Ta chứng minh rằng cách chia P thành các tập P_m như trên thỏa mãn điều kiện bài toán.

Muốn vậy ta chỉ cần chứng minh nếu $b\in P_m$ thì $2b>S_m$.

Thật vậy, do $b>S_{m-1}=a_1+a_2+...+a_{m-1}$ và $b=\sum_{k=1}^{h}a_{i_k}$

nên tồn tại i_k $(k = 1,...,h)$ mà $i_k \geq m$.

Vậy $b \geq a_{i_k} \geq a_m = S_m - S_{m-1} > S_m - b \Rightarrow 2b > S_m$.

Bài toán được chứng minh.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LƯƠNG THẾ VINH - ĐỒNG NAI

Câu 1

Từ điều kiện $xy - x^2y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq xy \leq 1$.

Ta có $\sqrt{xy - x^2y^2} = \sqrt{xy.(1-xy)} \leq \dfrac{xy + (1-xy)}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ, suy ra $y^6 + y^3 + 2x^2 \leq \dfrac{1}{2}$. (1)

Mặt khác, $\sqrt{1 + (2x-y)^2} \geq 1$, nên từ phương trình thứ hai của hệ, ta suy ra:

$$4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} \geq 2x^2 + 1$$

Hay $2x^2 - 4xy^3 - y^3 \leq -\dfrac{1}{2}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $y^6 - 4xy^3 + 4x^2 \leq 0 \Leftrightarrow (y^3 - 2x)^2 \leq 0 \Leftrightarrow y^3 = 2x$.

Thay vào (1) và (2), ta được $6x^2 + 2x \leq \dfrac{1}{2}$ và $-6x^2 - 2x \leq -\dfrac{1}{2}$.

Từ đó, $6x^2 + 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1}{2} \\ x = \dfrac{1}{6}. \end{array}\right.$

Vì $y^3 = 2x$, nên ta có $y = -1, y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Thử lại, hệ phương trình có nghiệm duy nhất (–1/2; –1).

Câu 2

Đặt $v_n = 2^{n+1} - 7u_{n-1}$ thì $A = v_{2011} = 2^{2012} - 7u_{2010}^2$

Ta sẽ chứng minh rằng $v_n = (2u_n + u_{n-1})^2$ với mọi $n = 2,3,...$ (1)

Ta sẽ chứng minh (1) bằng quy nạp như sau:

Khi n = 2, theo cách xác định dãy thì $v_2 = 2^3 - 7u_1^2 = 8 - 7 = 1$

Mặt khác $(2u_2+u_1)^2=(-2+1)^2=1$.

Do đó $v_2=(2u_2+u_1)^2$ hay (1) đúng khi n = 2

Giả sử (1) đúng khi n = k ($k\geq 2$) tức là $v_k=\left(2u_k+u_{k-1}\right)^2$.

Ta cần chứng minh (1) đúng khi n = k +1 , nghĩa là cần chứng minh

$$v_{k+1}=\left(2u_{k+1}+u_k\right)^2$$

Thật vậy theo cách xác định dãy thì $v_{k+1}=2^{k+2}-7u_k^2$

Từ công thức xác định dãy (u_n) thì

$$\left(2u_{k+1}+u_k\right)^2=\left[2(-u_k-2u_{k-1})+u_k\right]^2=\left(-u_k-4u_{k-1}\right)^2=u_k^2+8u_ku_{k-1}+16u_{k-1}^2$$

$$=2\left(4u_k^2+4u_ku_{k-1}+u_{k-1}^2\right)+14u_{k-1}^2-7u_k^2=2\left(2u_k+u_{k-1}\right)^2+14u_{k-1}^2-7u_k^2$$

$$=2v_k+14u_{k-1}^2-7u_k^2=2\left(2^{k+1}-7u_{k-1}^2\right)+14u_{k-1}^2-7u_k^2=2^{k+2}-7u_k^2=v_{k+1}$$

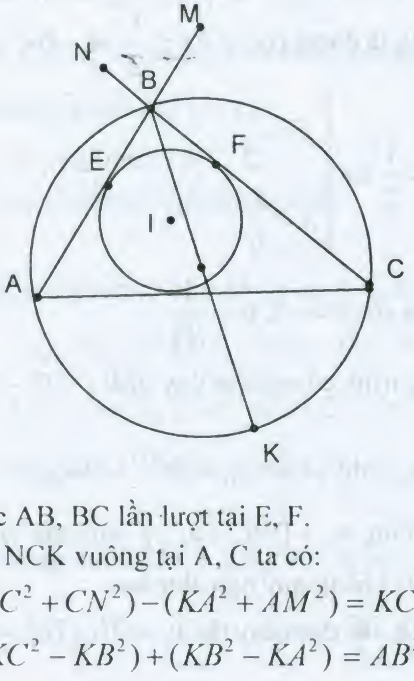
Vậy $v_{k+1}=2^{k+2}-7u_k^2$ nghĩa là (1) đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp thì (1) đúng với mọi n = 2, 3,...

Từ (1) suy ra mọi số hạng của dãy (v_n) đều là số chính phương.

Nói riêng $A=v_{2011}=2^{2012}-7u_{2010}^2$ là số chính phương.

Câu 3



Đường tròn (I) tiếp xúc AB, BC lần lượt tại E, F.

Các tam giác MAK và NCK vuông tại A, C ta có:

$$KN^2-KM^2=(KC^2+CN^2)-(KA^2+AM^2)=KC^2-KA^2$$

$$=(KC^2-KB^2)+(KB^2-KA^2)=AB^2-BC^2 \qquad (1)$$

Mặt khác các tam giác IEM và IFN vuông tại E, F ta có:

$$IN^2 - IM^2 = (IF^2 + FN^2) - (IE^2 + EM^2) = FN^2 - EM^2$$
$$= (CN - CF)^2 - (BM - BE)^2 \qquad (2)$$

Mà $CN - CF = p - \dfrac{AC + BC - AB}{2} = AB$,

$$BM - BE = p - \frac{AC + AB - BC}{2} = BC \qquad (3)$$

Từ (1)(2)(3) ta có

$$KN^2 - KM^2 = AB^2 - BC^2 = IN^2 - IM^2.$$

Suy ra $KI \perp MN$

Câu 4

1. Ta cm: f là 1 đơn ánh.

Thật vậy:

$\forall m_1; m_2 \in \mathbb{N}$ mà $f(m_1) = f(m_2)$ thì $f(m_1) + f(t) = f(m_2) + f(t)$ với $t \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f[f(m_1) + f(t)] = f[f(m_2) + f(t)]$

Từ gt cho: $m_1 + t = m_2 + t$ nên $m_1 = m_2$ do đó: f là 1 đơn ánh

2/ $\forall m; n; t; k \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $m + n = t + k$ thì $f[f(m) + f(n)] = f[f(t) + f(k)]$

$\Rightarrow f(m) + f(n) = f(t) + f(k)$ (vì f đơn ánh)

Mọi $m; n \in \mathbb{N}$ thì $(m + n - 1) + 1 = m + n$

nên do trên $f(m + n - 1) + f(1) = f(m) + f(n)$

Chọn m = 2 thì $f(n + 1) = f(n) + [f(2) - f(1)]$; mọi $n \in \mathbb{N}$ (2)

Đặt $f(1) = u$; $f(2) - f(1) = v$ thì từ gt cho $u \in \mathbb{N}$; $v \in \mathbb{Z}$

Thay vào (2) cho : $f(n + 1) = f(n) + v$; mọi n.

Ta cm: $f(n) = v(n - 1) + u$; mọi n (3) bằng quy nạp.

Ta có: $f(2) = u + v = v(2 - 1) + u$ nên (3) đúng khi n = 2.

Giả sử : $f(n) = v(n - 1) + u$; ta có:

$$f(n + 1) = f(n) + v = v(n - 1) + u + v = v.n + u$$

Vậy: (3) đúng với mọi n .

Ta có: $f[f(m) + f(n)] = f[v(m - 1) + u + v(n - 1) + u]$

$= f[v(m + n) + 2(u - v)] = v[v(m + n) + 2(u - v) - 1] + u$

$= v^2(m + n) + (2v + 1)(u - v)$

Ta lại có: $f[f(m) + f(n)] = m + n$ nên có:

$v^2(m + n) + (2v + 1)(u - v) = m + n$; với mọi m + n tự nhiên

Đồng nhất thức c trên cho

$a^2 = 1$ và $(2v + 1)(u - v) = 0$; do đó a = 1 hoặc a = – 1 .

Nếu a = – 1 thì $f(n) = -n + u - 1$

Lúc đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = -\infty$ bởi vậy khi n đủ lớn thì $f(n) \notin \mathbb{N}$

(mâu thuẫn với $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$)

Do đó: $a = 1$;đồng thời $3(b-1) = 0$ hay $b = 1$ cho nên $f(n) = n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Kiểm tra hàm số $f(n) = n$; $\forall n \in \mathbb{N}$ thỏa đề bài .

Kết luận : có duy nhất 1 hàm là $f(n) = n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Câu 5

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau: Nếu: p, q, r là những số hữu tỉ không âm và $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ là một số hữu tỉ thì $\sqrt{p}$; $\sqrt{q}$; $\sqrt{r}$ cũng là những số hữu tỉ.

Chứng minh bổ đề : Đặt $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r} = s$.

Nếu $s = 0$ thì $\sqrt{p}$; $\sqrt{q}$; $\sqrt{r}$ đồng thời bằng 0 và bổ đề đúng .

Nếu $s \neq 0$ ta có $\sqrt{p}+\sqrt{q} = s - \sqrt{r} \Leftrightarrow p+q+2\sqrt{pq} = s^2+r-2s\sqrt{r}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{pq} = s^2+r-p-q-2s\sqrt{r} \quad (1);$$

đặt $T = s^2+r-p-q \Rightarrow T > 0$; bình phương 2 vế (1) ta có :

$$4pq = T^2+4rs^2-4Ts\sqrt{r} \Rightarrow \sqrt{r} = \frac{T^2+4rs-4pq}{4Ts} \in \mathbb{Q},$$

chứng minh tương tự thì $\sqrt{p}$; $\sqrt{q}$ cũng là những số hữu tỉ

$\Rightarrow$ bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán : Theo yêu cầu bài toán ta có :

$\sqrt{\frac{2012}{x+y}}+\sqrt{\frac{2012}{y+z}}+\sqrt{\frac{2012}{z+x}} = 2m$ (1) , với m là một số nguyên dương nào đó

.Ta biến đổi (1) về dạng :

$$\sqrt{\frac{4.503}{x+y}}+\sqrt{\frac{4.503}{y+z}}+\sqrt{\frac{4.503}{z+x}} = 2m \Leftrightarrow \sqrt{\frac{503}{x+y}}+\sqrt{\frac{503}{y+z}}+\sqrt{\frac{503}{z+x}} = m$$

và theo bổ đề thì : $\sqrt{\frac{503}{x+y}};\sqrt{\frac{503}{y+z}};\sqrt{\frac{503}{z+x}}$ là 3 số hữu tỉ .

Giả sử $\sqrt{\frac{503}{x+y}} = \frac{a}{b}$ với a , b là 2 số nguyên dương thỏa $(a,b) = 1$

$\Rightarrow 503.b^2 = (x+y).a^2 \Rightarrow a^2$ là ước của 503, để ý 503 là số nguyên tố

$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{503}{x+y}} = \frac{1}{b}$;

Lập luận tương tự ta thấy : tồn tại các số nguyên dương c,d sao cho :

$$\sqrt{\frac{503}{y+z}}=\frac{1}{c};\sqrt{\frac{503}{z+x}}=\frac{1}{d}\Rightarrow\sqrt{\frac{503}{x+y}}+\sqrt{\frac{503}{y+z}}+\sqrt{\frac{503}{z+x}}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=m\ (2)$$

Để ý : b,c,d nguyên dương nên $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\le 3$ và do m nguyên dương nên từ (2)

có : $1\le\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\le 3$; Xảy ra 3 khả năng sau :

Khả năng 1 : $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=3\Leftrightarrow b=c=d=1$ khi đó từ (2) có :

$$\frac{503}{x+y}=\frac{503}{y+z}=\frac{503}{z+x}=1\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=503\\y+z=503\\z+x=503\end{cases}$$ cộng theo vế

$\Rightarrow$ 2(x + y + z) = 1509: PT này vô nghiệm vì:
VT chẵn VP lẻ $\Rightarrow$ khả năng 1 không xảy ra

Khả năng 2 : $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=2$

$\Rightarrow$ một trong 3 số b,c,d bằng 1 , 2 số còn lại bằng 2 ;
lập luận tương tự như khả năng 1 $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm .

Khả năng 3 : $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$, không giảm tính tổng quát ta giả sử rằng :

$b\ge c\ge d>1\ \Rightarrow\ \frac{3}{d}\ge 1\ \Rightarrow$ d = 3 hoặc d = 2 ;

Nếu d = 3 $\Rightarrow$ b = c = 3 , từ (2) có

$$\frac{503}{x+y}=\frac{503}{y+z}=\frac{503}{z+x}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=9.503\\y+z=9.503\\z+x=9.503\end{cases}$$

theo vế $\Rightarrow$ 2(x + y + z) = 27.2011 : pt này vô nghiệm vì: VT chẵn VP lẻ;

Nếu d = 2 $\Rightarrow\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}b=4\\c=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}b=6\\c=3\end{cases}$ (để ý b $\ge$ c $\ge$ d) ,

ứng $\begin{cases}b=4\\c=4\\d=2\end{cases}$ thay vào (2) có $\begin{cases}x+y=16.503\\y+z=16.503\\z+x=4.503\end{cases}$

$\Rightarrow$ x + y + z = 17.503 $\Rightarrow$ z = 503 ; y = 13.503 ; x = 503.

ứng $\begin{cases} b=6 \\ c=3 \\ d=2 \end{cases}$ thay vào (2) có $\begin{cases} x+y=36.503 \\ y+z=9.503 \\ z+x=4.503 \end{cases}$

$\Rightarrow 2(x+y+z)=49.503 \Rightarrow$ vô nghiệm

Câu 6:

Đặt $A=\{a_1;a_2;....;a_{200}\}(a_1<a_2<....<a_{200});a_i \in Z^+;i=1;2;....;200$

Ta biết rằng $a_i;a_j;a_k(1\le i<j<k\le 200)$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác không tù khi và chỉ khi $a_i^2+a_j^2\ge a_k^2$.

Điều đó tương đương với $a_1^2+a_2^2\ge a_{200}^2$.

Do đó,

$$a_1^2\ge a_{200}^2-a_2^2\ge(a_2+198)^2-a_2^2=396a_2+198^2\ge 396(a_1+1)+198^2$$

$$\Rightarrow a_1^2-396a_1-39600\ge 0$$

$$\Rightarrow a_1\ge 198+\sqrt{198^2+39600}\ge 478,7\Rightarrow a_1\ge 479$$

$$\Rightarrow a_i\ge 478+i(i=1;2;....;200)$$

Đặt $A_0=\{479;480;.....;678\}$ thì khi

$A=\{a_1;a_2;....;a_{200}\}(a_1<a_2<....<a_{200});a_i\in Z^+;i=1;2;....;200$ thỏa điều kiện của bài toán , ta cần $a_i\ge 478+i(i=1;2;...;200)$

Khi đó $S(A)\ge S(A_0)$. Mặt khác hiển nhiên rằng A_0 thỏa mãn điều kiện của bài toán (bởi vì với bất kì 3 số $a_i;a_j;a_k\left(a_i<a_j<a_k\right)\in A_0$; ta có

$$a_i^2+a_j^2\ge 479^2+480^2>678^2>a_k^2.$$

Cho nên GTNN của S(A) bằng: $S(A_0)=\sum\limits_{\substack{a,b,c\in A_0;\\ a\ne b;b\ne c;c\ne a}}(a+b+c)$

Với bất kỳ $a\in A_0$; số cách chọn b,c là C_{199}^2. Như vậy a được đếm C_{199}^2 lần trong $S(A_0)$. Vì a là số bất kì trong A_0, nên mỗi số trong A_0 được đếm C_{199}^2 lần trong $S(A_0)$.

Do đó, $S(A_0)=C_{199}^2\sum\limits_{a\in A_0}a=\frac{1}{2}\times 199\times 198\times\sum\limits_{i=479}^{678}i=2279405700$.

TRƯỜNG THPT PLEIKU – GIALAI

Câu 1

$$(1) \Leftrightarrow \sin^{2010} x + \cos^{2010} x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x(\sin^{2008} x - 1) = \cos^2 x(1 - \cos^{2008} x) \ (2)$$

Ta thấy $\begin{cases} \sin^2 x \geq 0 \\ \sin^{2008} x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x(\sin^{2008} x - 1) \leq 0, \forall x$

Mà $\begin{cases} \cos^2 x \geq 0 \\ 1 - \cos^{2008} x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \cos^2 x(1 - \cos^{2008} x) \geq 0, \forall x$

Do đó (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x(\sin^{2008} x - 1) = 0 \\ \cos^2 x(1 - \cos^{2008} x) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = m\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + m\pi \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \\ x = n\pi \end{array}\right. \end{cases} (m, n \in \mathbb{C})$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = k\dfrac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

Câu 2

Xét $(x + 1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + ... + C_n^{n-1} x + C_n^n$ (*)

$(x - 1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - .... - C_n^{n-1} x + C_n^n$ (**) (do n chẵn)

Cộng (*) và (**) theo vế ta được :

$(x + 1)^n + (x - 1)^n = 2(C_n^0 x^n + C_n^2 x^{n-2} + ... + C_n^n)$ (***)

Trong (***) cho x = 2 ta được

$$3^n + 1 = 2(2^n C_n^0 + 2^{n-2} C_n^2 + ... + 2^2 C_n^{n-2} + C_n^n)$$

Từ đó ta được $2^n C_n^0 + 2^{n-2} C_n^2 + 2^{n-4} C_n^4 + ... + 2^2 C_n^{n-2} + C_n^n = \dfrac{3^n + 1}{2}$

Câu 3

Qua I, vẽ đường thẳng song song với AC, cắt AB tại D, và vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AC tại E.

Dễ thấy ADIE là hình thoi.

Đặt AD = DI = IE = EA = k (với k không đổi).

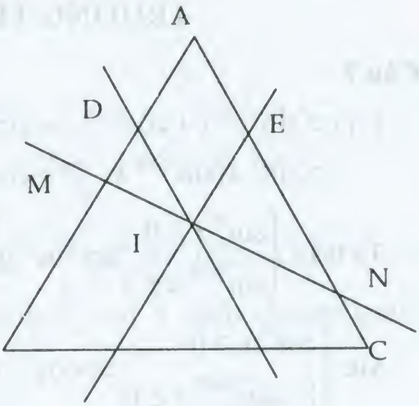
Ta có: EI // AM $\Rightarrow \dfrac{NI}{NM} = \dfrac{EI}{AM} = \dfrac{k}{AM}$ (1)

DI // AN $\Rightarrow \dfrac{MI}{NM} = \dfrac{DI}{AN} = \dfrac{k}{AN}$ (2)

Vì $\dfrac{MI}{NM} + \dfrac{IN}{NM} = \dfrac{MN}{MN} = 1$ nên từ (1) và (2)

Ta có : $\dfrac{k}{AM} + \dfrac{k}{AN} = 1$,

Hay $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN} = \dfrac{1}{k}$ (không đổi)



Câu 4

Với a, b, c > 0 , ta có $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow (a + b + c)^3 \geq 27abc$. (1)

Giả thiết bài toán cho : $a + b + c \geq 3abc$ (2)

Từ (1) và (2), ta có : $(a + b + c)^4 \geq 81a^2b^2c^2$.

Hay $(a + b + c)^2 \geq 9.abc$. (3)

Ta lại có

$$a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)$$

$$= \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}.\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] \geq 0$$

Suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{1}{3}(a+b+c)^2 \geq \dfrac{1}{3}\ 9abc \geq 3abc$

Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3abc$

Câu 5

Rõ ràng $x_n \geq 4, \forall n \geq 1$.

Ta có :

$$x_{n+1}^2 - 4 = (x_n^2 - 2)^2 - 4 = x_n^4 - 4x_n^2 + 4 - 4$$

$$= x_n^2(x_n^2 - 4)$$

$$= x_n^2\left[(x_{n-1}^2 - 2)^2 - 4\right] = x_n^2\left[x_{n-1}^4 - 4x_{n-1}^2 + 4 - 4\right]$$

$$= x_n^2\left[x_{n-1}^2(x_{n-1}^2 - 4)\right]$$

....

$$= x_n^2 x_{n-1}^2 \ldots x_1^2(x_1^2 - 4)$$

$$\Rightarrow x_{n+1}^2 - 4 = x_1^2 x_2^2 \ldots\ldots x_n^2 (x_1^2 - 4) \qquad (1)$$

Thay $x_1 = 4$ vào (1) ta có :

$$x_{n+1}^2 - 4 = x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2 .12 \Rightarrow \frac{x_{n+1}^2 - 4}{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2} = 12 \Rightarrow \frac{x_{n+1}^2}{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2} - \frac{4}{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2} = 12$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \ldots x_n}\right)^2 = 12 + \frac{4}{x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2} \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \ldots x_n} = \sqrt{12 + \frac{4}{(x_1 x_2 \ldots x_n)^2}}.$$

Nhận xét : $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n - 2 = (x_n + 1)(x_n - 2) > 0, \forall n \geq 1.$

$\Rightarrow 4 = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \ldots x_n} = 2\sqrt{3}.$

Câu 6

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Cho $x = y = 1$ ta có $2f(1) = 2(f(1))^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(1) = 1 \end{array}\right.$

a) Xét trường hợp f(1) = 0

Cho y = 1 vào (1). Ta có $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) Xét trường hợp f(1) = 1

Cho y = 1 ta có $x + f(x) = (x+1)f(x) \Rightarrow x(f(x) - 1) = 0$

Do đó: Với mọi $x \neq 0$ thì $f(x) = 1$

Kết hợp cả hai trường hợp ta có

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(x) = \begin{cases} 1 & khi\ \ x \neq 0 \\ a & khi\ \ x = 0 \end{cases} \text{ a là số tùy ý}$$

Thử lại : Với $xy \neq 0$ hoặc $x = y = 0$ thì (1) thỏa mãn.

Với $\begin{cases} x \neq 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(y) = a \end{cases}$

Khi đó $xf(y) + yf(x) = ax$ và $(x+y)f(x)f(y) = (x+0)a = ax$

Vậy các hàm số trên thỏa mãn (1)

TRƯỜNG THPT CHUYÊN VỊ THANH – HẬU GIANG

Câu 1

Đk: $x, y \in \mathbb{R}$

Từ (1) ta biến đổi thành :

$$(8x^3)^3 + 3.8x^3 = (6x+1)^3 + 3(6x+1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t, t\in\mathbb{R}$, ta có $f'(t)=3t^2+3>0\ \forall t\in\mathbb{R}$

Suy ra *f(t)* đồng biến nên ta có:

$$8x^3=6x+1\Leftrightarrow 4x^3-3x=\frac{1}{2} \text{ đặt } t=\cos\alpha,\quad \alpha\in[0;\pi]$$

Ta được: $4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow\cos 3\alpha=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\alpha=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy ta có các nghiệm $\cos\frac{\pi}{9},\cos\frac{5\pi}{9},\cos\frac{7\pi}{9}$

Ta có đẳng thức: $2\left(x^4-x^2y+y^2\right)^2=x^8+y^4+(y-x^2)^4$

$$\Rightarrow VT(2)=x^4-x^2y+y^2\ge\sqrt{\frac{x^8+y^4}{2}}=VP(2)$$

dấu "=" xảy ra khi $y=x^2$. Vậy $S=\left\{(x_1;x_1^2);(x_2;x_2^2);(x_3;x_3^2)\right\}$.

Với $x_1=\cos\frac{\pi}{9},x_2=\cos\frac{5\pi}{9},x_3=\cos\frac{7\pi}{9}$

Câu 2

Đặt $x_1=\sqrt{2}=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}$ suy ra $x_2=\sqrt{\dfrac{2.\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}}{1+\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}}}=\sqrt{\dfrac{2}{1+\cos\frac{\pi}{4}}}=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{8}},\ldots$

Chứng minh bằng quy nạp ta được $x_n=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$ (1)

Khi đó : $\prod\limits_{i=1}^{n}x_n=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}.\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{8}}.\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{16}}....\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\dfrac{1}{A}$

$$\Rightarrow\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.A=\cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{16}....\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{16}...\cos\frac{\pi}{2^n}.\sin\frac{\pi}{2^n}$$

$$=\frac{1}{2^2}\cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{8}.\cos\frac{\pi}{16}...\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}.\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}...=\frac{1}{2^n}\sin\frac{\pi}{2}$$

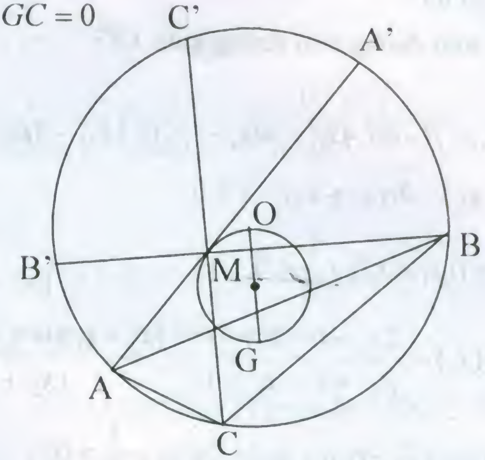
$$A=\frac{1}{2^n}.\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2^n}.\frac{2^{n+1}}{\pi}.\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

Suy ra $\lim A=\frac{2}{\pi}\Rightarrow \lim\prod_{i=1}^{n}x_n=\frac{\pi}{2}$

Câu 3

Trong tam giác ABC, gọi a,b,c lần lượt là độ dài cạnh BC,CA,AB tương ứng và m_a,m_b,m_c lần lượt là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A,B,C tương ứng.

Ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$



$$\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2$$

$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$$

$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

$$=3MG^2+\frac{4}{9}(m_a{}^2+m_b{}^2+m_c{}^2)=3MG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) \qquad (1)$$

Như vậy khi ta thay M bởi điểm O thì:

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} OA^2+OB^2+OC^2=3OG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=9(R^2-OG^2) \qquad (2)$$

Mà: $MA.MA'=MB.MB'=MC.MC'=R^2-OM^2$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MA'}=\frac{MA^2}{MA.MA'}=\frac{MA^2}{R^2-OM^2}$$

Tương tự ta có: $\dfrac{MB}{MB'}=\dfrac{MB^2}{R^2-OM^2}$ và $\dfrac{MC}{MC'}=\dfrac{MC^2}{R^2-OM^2}$

Giả thiết có:

$$\frac{MA}{MA'}+\frac{MB}{MB'}+\frac{MC}{MC'}=3\Rightarrow\frac{MA^2+MB^2+MC^2}{R^2-OM^2}=3$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow}3MG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)=3R^2-3OM^2$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow}3MG^2+3(R^2-OG^2)=3R^2-3OM^2$$

$$\Rightarrow MG^2+OM^2=OG^2$$

Hay điểm M nằm trên dường tròn đường kính OG

Câu 4

1. Lấy $\alpha\le x_1<x_2\le\beta$, thì $4x_1^{\ 2}-4tx_1-1\le 0, 4x_2^{\ 2}-4tx_2-1\le 0$

Do đó: $4(x_1^2+x_2^2)-4t(x_1+x_2)-2\le 0$

$$2x_1x_2-t(x_1+x_2)-\frac{1}{2}<0$$

Nhưng $f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{2x_2-t}{x_2^{\ 2}+1}-\dfrac{2x_1-t}{x_1^{\ 2}+1}=\dfrac{(x_2-x_1)[t(x_1+x_2)-2x_1x_2+2]}{(x_2^2+1)(x_1^2+1)}$

Và $t(x_1+x_2)-2x_1x_2+2>t(x_1+x_2)-2x_1x_2+\dfrac{1}{2}>0$

Vì thế $f(x_2)-f(x_1)>0$

Vậy, $f(x)$ là hàm tăng trên đoạn $\left[\alpha;\beta\right]$.

Vì $\alpha+\beta=t$ và $\alpha\beta=-\dfrac{1}{4}$, nên

$$g(t)=\max f(x)-\min f(x)=f\left(\beta\right)-f\left(\alpha\right)$$

$$=\frac{\sqrt{t^2+1}\left(t^2+\dfrac{5}{2}\right)}{t^2+\dfrac{25}{16}}=\frac{8\sqrt{t^2+1}\left(2t^2+5\right)}{16t^2+25}$$

2. Ta có: $g(\tan u_i)=\dfrac{\dfrac{8}{\cos u_i}\left(\dfrac{2}{\cos^2 u_i}+3\right)}{\dfrac{16}{\cos^2 u_i}+9}$

$$= \frac{\dfrac{16}{\cos u_i} + 24\cos u_i}{16+9\cos^2 u_i} \ge \frac{2\sqrt{16\times 24}}{16+9\cos^2 u_i} = \frac{16\sqrt{6}}{16+9\cos^2 u_i} \quad (i=1,2,3)$$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{g(\tan u_i)} \le \frac{1}{16\sqrt{6}} \sum_{i=1}^{3}\left(16+9\cos^2 u_i\right) = \frac{1}{16\sqrt{6}}\left(16.3+9.3-9\sum_{i=1}^{3}\sin^2 u_i\right)$$

Vì $\sum_{i=1}^{3}\sin u_i = 1$, và $u_i \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right), i=1,2,3,$

ta có: $3\sum_{i=1}^{3}\sin^2 u_i > \left(\sum_{i=1}^{3}\sin u_i\right)^2 = 1$

Nên $\frac{1}{g(\tan u_1)} + \frac{1}{g(\tan u_2)} + \frac{1}{g(\tan u_3)} < \frac{1}{16\sqrt{6}}\left(75-9\times\frac{1}{3}\right) = \frac{3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 5

Đặt $x = y + z$, $z \in \mathbb{Z}$

Phương trình trở thành $\left(3z+9\right)y^2 + \left(3z^2+9z\right)y + \left(z^3+127\right) = 0$

Phương trình trên là phương trình bậc hai theo y.

Ta có :

$$\Delta = (3z+9)^2.z^2 - 4(3z+9)(z^3+127) = -(3z+9)(z^3-9z^2+508)$$

Và $z^3 - 9z^2 + 508 = z^2(z-9)+508$ không âm khi và chỉ khi $z \neq -5$

$\Delta \ge 0 \Leftrightarrow z = -5; -4; -3$ mà $z^3+127 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ do đó ta chỉ nhận $z=-4$

Cho ta các nghiệm của phương trình là $\left(x;y\right) = (3;7); (x;y) = (-7;-3)$

Câu 6

Giả sử N là số ABCDE và 2N là FGHIJ trong đó A, B, C, D, E, F, G, H, I, J là các chữ số khác nhau lấy từ các chữ số 0, 1, 2, 3, …,9

Số nhỏ nhất mà A có thể nhận được là 1.

Xét A = 1. Khi đó F = 2. Số nhỏ nhất mà B có thể nhận được là 3 (B không thể bằng 0 vì hoặc sẽ bị trùng 2 lần số 0, hoặc bị trùng 2 lần số 1), lúc đó số nhỏ nhất mà C có thể nhận là 4, tương ứng ta được G = 6.

Bây giờ, số nhỏ nhất mà D có thể nhận là 5. Suy ra H = 9, vì H = 2C + 1.

Tiếp theo, số duy nhất mà E sẽ nhận là 8 (vì nếu E = 0, 7 thì bị trùng số), nhưng khi E = 8 thì I = 1 (vô lí vì A = 1).

Như thế D không thể bằng 5. Giả sử D nhận số bé nhất tiếp theo là 7 (do đã có G = 6). Khi đó H = 9 (= 2C + 1) nên E = 8 như trên.

Nhưng bây giờ ta lại gặp mâu thuẫn vì J = 6 (trùng số).

Giả sử D = 8, suy ra H = 9. Lúc này, số nhỏ nhất mà E có thể nhận là 5.

Ta có 2E = 10 nên J = 0, từ đó I = 7 vì 2D + 1 = 17.

Tóm lại, ta được số N thỏa mãn đề bài là N = 13485, 2N = 26970.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN QUANG TRUNG BÌNH PHƯỚC

Câu 1

+ Nhận xét: $x = 0$ không là thỏa mãn hệ phương trình, chia hai vế của phương trình (2) cho $4x^2 > 0$, ta được pt: $15\left[\dfrac{(1-3x)^2}{2x}\right]^2 + 2\dfrac{(1-3x)^2}{2x}y = 9(3)$

+ Đặt $t = \dfrac{(1-3x)^2}{2x}$, thay vào (3) ta có pt: $15t^2 + 2at = 9(4)$

+ Từ (1) và (4) có: $(x-t)(15x+15t+2y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = t \\ 15x+15t+2y = 0 \end{array}\right.$

+ Với $x = t \Leftrightarrow 7x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3-\sqrt{2}}{7} \Rightarrow y = \dfrac{188+45\sqrt{2}}{7(3-\sqrt{2})} \\ x = \dfrac{3+\sqrt{2}}{7} \Rightarrow y = \dfrac{188-45\sqrt{2}}{7(3+\sqrt{2})} \end{array}\right.$

+ Từ $15x + 15t + 2y = 0 \Leftrightarrow 2y = -15x - 15t$, thay vào pt (1):

$$15x^2 - 15x\left(x + \frac{9x^2-6x+1}{2x}\right) = 9 \Leftrightarrow 45x^2 - 30x + 11 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

+ Vậy hệ có nghiệm: $\left(\dfrac{3-\sqrt{2}}{7}; \dfrac{188+45\sqrt{2}}{7(3-\sqrt{2})}\right), \left(\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}; \dfrac{188-45\sqrt{2}}{7(3+\sqrt{2})}\right)$

Câu 2

Ta chứng minh $\left(2+\sqrt{5}\right)^{2k} = a_k + b_k\sqrt{5}$ bằng quy nạp.

k = 1 mệnh đề đúng.

Giả sử mệnh đề đúng với k.

Ta có: $\left(2+\sqrt{5}\right)^{2(k+1)} = \left(2+\sqrt{5}\right)^{2k}\left(2+\sqrt{5}\right)^2$

$$= \left(a_k + b_k\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right) = (9a_k + 20b_k) + (4a_k + 9b_k)\sqrt{5}$$

Do $\sqrt{5}$ là số vô tỉ nên suy ra: $a_{k+1} = 9a_k + 20b_k$ (1); $b_{k+1} = 4a_k + 9b_k$ (2)

Từ (1) và (2) có: $a_{k+2} = 9a_{k+1} + 20b_{k+1} = 9a_{k+1} + 20(4a_k + 9b_k)$

$$= 9a_{k+1} + 20\left(4a_k + 9\frac{a_{k+1} - 9a_k}{20}\right)$$

$$= 18a_{k+1} - a_k \text{ với } a_1 = 9, a_2 = 161.$$

Tương tự có $b_{k+2} = 18b_{k+1} - b_k$ với $b_1 = 4, b_2 = 72$.

Đây là các hệ thức truy hồi xác định $\{a_k\}, \{b_k\}$.

Từ (1) và (2) ta có: $a_{k-1} = 5a_k - 12b_k$.

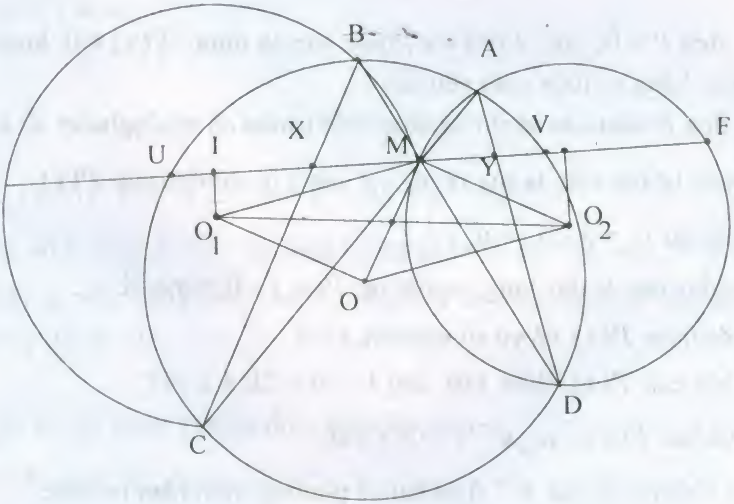
Vậy: $a_{k-1}a_{k+1} - 5b_k^2 = (9a_k - 20b_k)(9a_k + 20b_k) - 5b_k^2$

$$= 81(a_k^2 - 5b_k^2) = 81\left(a_k + \sqrt{5}b_k\right)\left(a_k - \sqrt{5}b_k\right)$$

$$= 81\left(2+\sqrt{5}\right)^{2k}\left(2-\sqrt{5}\right)^{2k} = 81.(-1)^{2k} = 81$$

Thành thử: $a_{k-1}a_{k+1} - 5b_k^2 = 81$ với mọi $k \geq 2$.

Câu 3



Xét phép nghịch đảo tâm M tỉ số $k = MA.MC$

$I_M^k : A \to C, B \to D, U \to V$ nên $BC \to (AMD)$, $AD \to (BMC)$

và $UV \to UV$ ((AMD) ký hiệu là đường tròn ngoại tiếp tam giác AMD).

Do X là giao điểm của BC với UV nên $X \to F$ (với F là giao điểm của UV với đường tròn (AMD), tương tự $Y \to E$ (với E là giao điểm của UV với đường tròn (BMC)).

Theo tính chất phép nghịch đảo thì

$$\frac{1}{MX} = MF, \frac{1}{MV} = MU, \frac{1}{MY} = ME, \frac{1}{MU} = MV.$$

Vậy bài toán cần chứng minh tương đương với chứng minh:

$MF + MU = MV + ME$, tức là cần chứng minh $EU = VF$.

Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn (BMC) và (AMD).

BC là dây cung của cả hai đường tròn (O) và (O_1) nên $OO_1 \perp BC$ (1).

Mặt khác theo tính chất phép nghịch đảo thì:

Góc giữa O_2M với BC bằng với góc giữa O_2M với đường tròn (AMD)(vì O_2M bất động qua phép nghịch đảo này) và bằng 90^0, vậy $O_2M \perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $O_2M \,//\, O_1O$ tương tự ta chứng minh được $OO_2 \,//\, MO_1$.

Vậy MO_2OO_1 là hình bình hành có tâm là N.

Gọi I và J lần lượt là hình chiếu của O_1 và O_2 xuống UV.

Tứ giác O_1O_2JI là hình thang vuông, N là trung điểm của O_1O_2 nên ta có $NI = NJ$. Hai tam giác EMO và FMO có IN và JN tương ứng là đường trung bình nên từ NI = NJ dẫn đến $OE = OF$. Kết hợp với $OU = OV$ suy ra $EU = FV$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 4

Nếu $\deg P = 0$, tức $P(x) \equiv c$, thay vào ta được $P(x) \equiv 0$ hoặc $P(x) \equiv 1$ là hai đa thức hằng số thỏa mãn yêu cầu

Nếu $\deg P = m$, m lẻ thì đa thức $P(x)$ luôn có một nghiệm $x_0 \in \mathbb{R}$.

Từ quan hệ bài toán ta suy ra $x_0^2 + 2$ cũng là nghiệm của $P(x)$.

Xét dãy số $u_1 = x_0, u_n = u_{n-1}^2 + 2$.

Ta có dãy này là dãy tăng, ngoài ra: $P(u_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Vậy đa thức $P(x)$ có vô số nghiệm, vô lí.

Vậy bậc của $P(x)$ chẵn. Đặt $\deg P = n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$.

Ta viết lại: $P(x) = a_{2n}x^{2n} + \cdots a_1x + a_0$.

Đồng nhất hệ số của x^{4n} ở cả hai vế phương trình hàm ta được

$a_{2n}^2 = a_{2n} \Rightarrow a_{2n} = 1$.

Đặt $P(x) = (x^2 - x + 2)^n + G(x), \deg G < 2n$.

Dựa vào hằng đẳng thức $(x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2) = (x^2 + 2)^2 - (x^2 + 2) + 2$

ta có $P(x).P(x+1) = P(x^2 + 2)$

$$\Leftrightarrow \left[G(x) + (x^2 - x + 2)^n\right]\left[G(x+1) + (x^2 + x + 2)^n\right]$$

$$= G(x^2 + 2) + [(x^2 + 2) - (x^2 + 2) + 2]^n$$

$$\Leftrightarrow G(x).G(x+1) + G(x).(x^2 + x + 2)^n + G(x+1).(x^2 - x + 1)^n = G(x^2 + 2).$$

Vì $\deg G = k < 2n$ nên ta nhận thấy bậc của vế trái của đẳng thức trên $2n + k$, trong khi bậc của vế phải là $2k$, nhưng $2n + k > 2k$.

Do đó phải có $G(x) \equiv 0$.

Từ đó ta tìm được $P(x) = (x^2 - x + 2)^n$.

Vậy ta có $P(x) \equiv 0$ hoặc $P(x) = (x^2 - x + 2)^n$.

Câu 5

Điều nhận xét đầu tiên là $a \geq 0$ vì với $a < 0$ thì khi $n \to +\infty$ thì $2^n a + b \to -\infty$ và không thể là số chính phương.

Xét $a > 0$, do $2^n a + b$ là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên số $2^{n+2} a + b$ cũng là số chính phương, tức là

$$2^{n+2} a + b = x^2, \quad x \in \mathbb{Z}^+ \ (1)$$

Mặt khác do $2^n a + b$ là số chính phương nên $4(2^n a + b)$ cũng là số chính phương, tức là

$$2^{n+2} a + 4b = y^2, \quad y \in \mathbb{Z}^+ \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$3b = y^2 - x^2 \Rightarrow y^2 = x^2 + 3b.$$

Nếu $b > 0$, vì $a > 0$ và n tương đối lớn thì từ (1) ta nhận được $x > \frac{3}{2} b$.

Do vậy: $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 > x^2 + 3b = y^2 > x^2$.

Điều này vô lí. Nếu $b < 0$, lập luận tương tự ta có $(x-1)^2 < y^2 < x^2$, vô lí. Vậy $b = 0$, bằng việc cho $n = 0, n = 1$ ta nhận được a và $2a$ đều là số chính phương thì $a = 0$.

Câu 6

Gọi S_n là số các hoán vị thỏa điều kiện bài toán.

i) Số các hoán vị mà $a_n = n$ là S_{n-1}.

ii) Số các hoán vị mà $a_i = n$ $(1 \leq i \leq n-1)$ là C_{n-1}^{i-1}

Cho i chạy từ 1 đến $n-1$ ta có

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^{i-1} = S_{n-1} + 2^{n-1} - 1.$$

Dễ thấy $S_2 = 1$.

Từ đó ta có $S_n = 2^n - n - 1$.

TRƯỜNG THPT HÙNG VƯƠNG – BÌNH PHƯỚC

Câu 1

Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt[4]{32-x} - y^2 = -3 & (1) \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt{32-x} + 6y = 24 & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $0 \le x \le 32$

Cộng hai phương trình của hệ lại ta được:

$$\sqrt{x} + \sqrt{32-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} = y^2 - 6y + 21 = (y-3)^2 + 12 \ (3).$$

Ta có: Vế phải của phương trình (3): VP(3) ≥ 12 (4)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacovski ta có:

$$\sqrt{x} + \sqrt{32-x} \le \sqrt{2(x+32-x)} = 8$$

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{32-x} \le \sqrt{2(\sqrt{x} + \sqrt{32-x})} \le 4$$

Suy ra vế trái của phương trình (3): VT(3) ≤ 12 (5)

Từ (4) và (5) suy ra (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{32-x} \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ y = 3 \end{cases}$

Thay vào hệ thỏa mãn. Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $(x;y) = (16;3)$

Câu 2

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $a = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. Khi đó theo công thức xác định dãy, ta có : $u_1 = a + \cos a = \dfrac{\pi}{2} + k\pi + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \forall n = 0;1;2...$

Do đó, $\lim u_n = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Trường hợp 2: $a \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Xét hàm số: $f(x) = x + \cos x$

Ta có $f'(x) = 1 - \sin x \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số *f(x)* đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Dãy số được viết lại như sau:

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{với n=0; 1; 2; ...} \end{cases}$$

– Nếu $-\frac{\pi}{2}+k2\pi < a < \frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, $\cos a > 0$.

Ta có $u_0 = a$;

$$u_1 = a + \cos a > a = u_0 \Rightarrow u_1 > u_0 \Rightarrow f(u_1) > f(u_0) \Rightarrow u_2 > u_1 \ldots$$

Tiếp tục quá trình trên ta có: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 \ldots$ suy ra dãy $\{u_n\}$ tăng.

Ta chứng minh bằng quy nạp: $-\frac{\pi}{2}+k2\pi < u_n < \frac{\pi}{2}+k2\pi$, $\forall n = 0;1;2\ldots$ (1)

Ta có: $-\frac{\pi}{2}+k2\pi < u_0 = a < \frac{\pi}{2}+k2\pi$.

Giả sử (1) đúng với n = m tức là ta có: $-\frac{\pi}{2}+k2\pi < u_m < \frac{\pi}{2}+k2\pi$.

$$\Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right) < f(u_m) < f\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2}+k2\pi+\cos\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right) < u_{m+1} < \frac{\pi}{2}+k2\pi+\cos\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2}+k2\pi < u_{m+1} < \frac{\pi}{2}+k2\pi .$$

Vậy (1) được chứng minh. Do $\{u_n\}$ tăng và bị chặn trên nên tồn tại giới hạn.

Đặt $\lim u_n = l$. Khi đó $-\frac{\pi}{2}+k2\pi < l \le \frac{\pi}{2}+k2\pi$.

Từ cách cho dãy số suy ra: $l = l + \cos l \Rightarrow l = 0 \Rightarrow l = \frac{\pi}{2}+k2\pi$

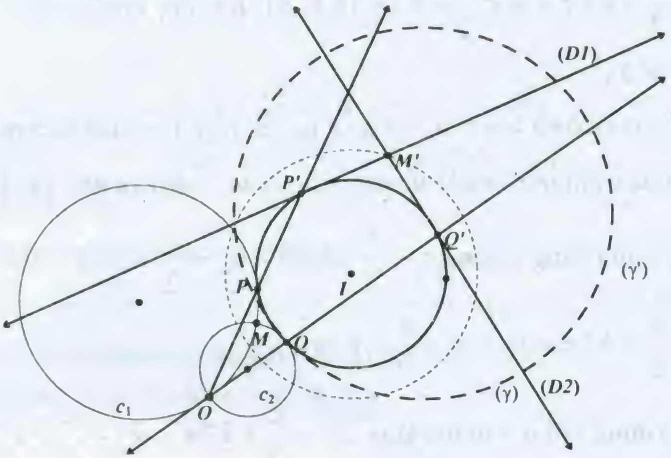
– Nếu $\frac{-3\pi}{2}+k2\pi < a < \frac{-\pi}{2}+k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Khi đó, $\cos a < 0$. Tương tự trường hợp trên ta chứng minh được dãy giảm và bị chặn. Do đó tồn tại giới hạn $\lim u_n = l$.

Lập luận tương tự ta có $l = \frac{-3\pi}{2}+k2\pi$.

Vậy ta có: $$\lim u_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ nếu } a = \frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ \frac{\pi}{2}+k2\pi \text{ nếu } -\frac{\pi}{2}+k2\pi < a < \frac{\pi}{2}+k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \\ \frac{-3\pi}{2}+k2\pi \text{ nếu } \frac{-3\pi}{2}+k2\pi < a < \frac{-\pi}{2}+k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Câu 3



Xét phép nghịch đảo f cực O phương tích k= $P_{O/(C)} = OI^2 - R^2 = 3R^2$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C).

Gọi P, Q là điểm tiếp xúc của (C_1), (C_2) với (C). Khi đó ta có:

Phép nghịch đảo f cực O phương tích k biến P, Q thành P', Q'.

Phép nghịch đảo f cực O phương tích k biến đường tròn (C_1), (C_2) lần lượt thành hai đường thẳng (d_1), (d_2) theo thứ tự là hai tiếp tuyến của(C) tại P', Q'.

Vì (C_1), (C_2) trực giao với nhau nên (d_1), (d_2) cũng trực giao với nhau tại M' (M' là ảnh của M qua f).

Ta có: $IP'M'Q'$ là hình vuông cạnh R nên $IM' = R\sqrt{2}$, do đó ta có M' thuộc đường tròn (γ) tâm I, bán kính $R\sqrt{2}$.

Lại có M là ảnh của M' qua f và (γ) không đi qua O nên ta có M thuộc đường tròn (γ') là ảnh của (γ) qua f.

Xác định tâm và bán kính đường tròn (γ'):

Gọi N là giao điểm của O M' và (γ) ta có:

$$P_{O/(\gamma)} = \overline{ON}.\overline{OM'} = OI^2 - \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$$

Ta lại có: $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 3R^2$

Do đó ta có: $\overrightarrow{OM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{ON}$.

Từ đó ta có (γ') là ảnh của (γ) qua phép vị thự tâm O tỉ số 3/2.

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm J, bán kính $\dfrac{3R}{\sqrt{2}}$ với $\overrightarrow{OJ} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{OI}$.

Câu 4

Cho $y = 0$ ta được $f(x) = f(x) + f(0)$, suy ra $f(0) = 0$.

Viết lại hệ thức dưới dạng:

$$f(x + y) - (x + y)^2 - 2(x+ y) = f(x) - x^2 - 2x + f(y) - y^2 - 2y.$$

Đặt $g(x) = f(x) - x^2 - 2x$, suy ra $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g(1) = f(1) - 3 = -4$ và $g(x + y) = g(x) + g(y)$, với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Do $g(x)$ cộng tính nên có dạng $g(x) = kx$.

Mà $g(1) = -4$ nên $k = -4$. Suy ra $g(x) = -4x$

Suy ra: $f(x) = x^2 - 2x$, với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Thử lại thấy thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5

Đặt $2n^2 = dk$. Giả sử có số nguyên m sao cho $m^2 = n^2 + d$, suy ra $m^2k^2 = n^2k^2 + 2n^2k = n^2(k^2 + 2k)$.

Do đó $(mk/n)^2 = k^2 + 2k$ là số nguyên.

Vậy mk/n là số nguyên. Suy ra $k^2 + 2k$ là số chính phương.

Điều này không thể xảy ra, vì $k^2 + 2k$ nằm giữa hai số k^2 và $(k + 1)^{2.}$

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 6

Gọi số tự nhiên có 10 chữ số là $\overline{a_1a_2...a_{10}}$ (a_i khác 0)

Theo yêu cầu bài toán thì các chữ số 1, 2, 3, 4 và 6 phải đứng trước số 5 nên chữ chữ số 5 chỉ có thể ở các vị trí a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}. Ta xét vị trí của chữ số 5, rồi đến vị trí của chữ số 6, rồi đến vị trí của bộ (1, 2, 3, 4) và cuối cùng là vị trí các chữ còn lại.

Trường hợp $a_{10} = 5$

Chữ số 6 có 9 vị trí, bộ (1, 2, 3, 4) có C_8^4 vị trí và bốn chữ số 0, 7, 8, 9 có 4! Vị trí, như vậy tất cả có 9.4! cách sắp xếp kể cả khi $a_1 = 0$.

Ta sẽ bỏ đi các trường hợp $a_1 = 0$ (có $8.C_7^4.3!$ cách sắp xếp)

Như vậy, trong trường hợp này có $9.\ C_8^4 .\ 4! - 8.C_7^4.3!$ số.

Trường hợp $a_9 = 5$ ta có $8.\ C_7^4 .\ 4! - 7.C_6^4.3!$ số.

Trường hợp $a_8 = 5$ ta có $7.\ C_6^4 .\ 4! - 6.C_5^4.3!$ số.

Trường hợp $a_7 = 5$ ta có $6.\ C_5^4 .\ 4! - 5.C_4^4.3!$ số.

Trường hợp $a_6 = 5$ ta có $5.\ C_4^4 .\ 4!$ số.

Cộng các kết quả trên ta có đáp số là 22680 số.

TRƯỜNG PHỔ THÔNG THỰC HÀNH SƯ PHẠM AN GIANG

Câu 1

A. Trường hợp 1 trong ba ẩn x, y, z bằng 0:

1. Nếu x = 0: Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 0 = y^2z^2 \\ y^2z^2 = 0 \\ z^2y^2 = 0 \end{cases}$$

Suy ra: y = 0, z = t $\in \mathbb{R}$ hay z = 0 , y = t $\in \mathbb{R}$, trong trường hợp này hệ có nghiệm $(x,y,z)\in\{(0;0;t),(0;t;0),t\in\mathbb{R}\}$

2. Nếu y = 0: tương tự ta có nghiệm $(x,y,z)\in\{(t;0;0),(0;0;t),t\in\mathbb{R}\}$

3. Nếu z = 0: ta có nghiệm: $(x,y,z)\in\{(t;0;0),(0;t;0),t\in\mathbb{R}\}$

B. Trường hợp $xyz\neq 0$: chia mỗi phương trình trong hệ cho $(xyz)^2$ ta có:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}\right)^2 = 3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2} \\ \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}\right)^2 = 4+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y^2} \\ \left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)^2 = 5+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2} \end{cases}$$

Đặt $x_0=\dfrac{1}{x};y_0=\dfrac{1}{y};z_0=\dfrac{1}{z}$, ta có hệ sau:

$$\begin{cases} (z_0+y_0)^2 = 3+x_0+x_0^2 & (1) \\ (x_0+z_0)^2 = 4+y_0+y_0^2 & (2) \\ (y_0+x_0)^2 = 5+z_0+z_0^2 & (3) \end{cases}$$

Cộng 3 phương trình của hệ này ta có:

$$(x_0+y_0+z_0)^2 = 12+(x_0+y_0+z_0)$$

$\Rightarrow x_0+y_0+z_0=4$ (4) *hay* $x_0+y_0+z_0=-3$ (5)

– Từ (1) và (4) ta có : $x_0=\dfrac{13}{9}$, từ (2) và (4) ta có $y_0=\dfrac{4}{3}$, từ (3) và (4) ta có $z_0=\dfrac{11}{9}$

– Tương tự, kết hợp (5) với (1), (2), (3) ta có: $x_0 = \frac{-6}{5}; y_0 = -1; z_0 = \frac{-4}{5}$

Kết luận:

$$(x, y, z) \in \left\{ \left(\frac{9}{13}, \frac{3}{4}, \frac{9}{11} \right), \left(\frac{-5}{6}, -1, \frac{-5}{4} \right), (t, 0, 0), (0, t, 0), (0, 0, t), t \in \mathbb{R} \right\}$$

Câu 2

– Ta chứng minh quy nạp: $x_{n+1} > \sum_{k=1}^{n} k.x_k$; $\forall n \geq 1$ (1)

– Khi n = 1, ta có $x_2 \geq 3.x_1 > x_1 = a$

– Giả sử (1) đúng với n, ta có:

$$x_{n+2} \geq (n+3).x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} k.x_k$$

$$= (n+1).x_{n+1} + 2x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} k.x_k > (n+1).x_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} k.x_k - \sum_{k=1}^{n} k.x_k = \sum_{k=1}^{n+1} k.x_k$$

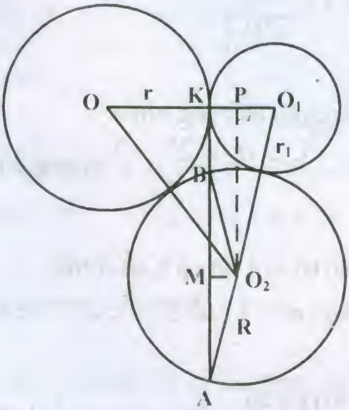
Theo nguyên lý quy nạp, ta được: $x_{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n} k.x_k$

Do $x_1 > 0$ nên từ đó $x_n > 0$, $\forall n$

Giả sử: $x_{n+1} > a.n!$, ta có: $x_{n+2} > (n+1).x_{n+1} > (n+1).a.n! = (n+1)!.a$

Vậy: $x_{n+1} > a.n!\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$; và $\lim a.n! = +\infty$ nên $\lim x_n = +\infty$

Câu 3



Gọi K là tiếp điểm của hai đường tròn có bán kính r và r_1 và tâm O, O_1 .

Gọi P là chân đường vuông góc hạ từ tâm O_2 của đường tròn thứ ba xuống OO_1.

Đặt KP = x. Từ tam giác vuông O_2MB ta có:

$$BM^2 = \frac{AB^2}{4} = O_2B^2 - O_2M^2 = R^2 - x^2 \Rightarrow AB^2 = 4(R^2 - x^2)\ (1)$$

Tính O_2P từ hai tam giác vuông O_2PO và O_2PO_1 ta được:

$$O_2P^2 = O_2O^2 - OP^2 = O_2O_1{}^2 - O_1P^2 \text{ hay } (R + r)^2 - (r + x)^2 = (R + r_1)^2 - (r_1 - x)^2$$

Rút gọn đẳng thức trên ta được $x = \dfrac{r - r_1}{r + r_1} R$.

Thay giá trị này của x vào (1) ta được: $AB^2 = \dfrac{16rr_1R^2}{(r + r_1)^2}$ *hay* $AB = \dfrac{4\sqrt{rr_1}}{r + r_1} R$

Câu 4

Thay y = 1, ta có: $f(x).f(1) = f(x) + \dfrac{1}{x} + 1$ (*)

Trong (*) *thay* $x = 1$, *suy ra* $f^2(1) - f(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = -1 \\ f(1) = 2 \end{array}\right.$

Do f(x) > 0 nên f(1) = 2

Thay f(1) = 2 vào (*), ta được: $2f(x) = f(x) + \dfrac{1}{x} + 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x} + 1$

Thử lại: $f(x).f(y) = \left(\dfrac{1}{x} + 1\right).\left(\dfrac{1}{y} + 1\right) = \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + 1$

$$= f(x.y) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \text{ (Đúng)}$$

Vậy $f(2012) = \dfrac{1}{2012} + 1 = \dfrac{2013}{2012}$.

Câu 5

Giả sử có k số đôi một nguyên tố cùng nhau:

$a_1 = 2^{n_1} - 3, a_2 = 2^{n_2} - 3, \ldots, a_k = 2^{n_k} - 3$ trong đó $2 = n_1 < n_2 < .. < n_k$.

Ta tìm được số

$a_{k+1} = 2^{n_{k+1}} - 3$ nguyên tố với tất cả k số ở trên.

Đặt $m = a_1.a_2..a_k \Rightarrow$ trong (m + 1) số $2^0, 2^1, \ldots, 2^m$ có hai số 2^r và 2^s mà hiệu chia hết cho m.

$2^r - 2^s = 2^s(2^{r-s} - 1) \vdots m$ (r > s)

$(2, m) = 1 \Rightarrow 2^{r-s} - 1 \vdots m$ hay $2^{r-s} - 1 = mt$.

Ta lấy $a_{k+1} = 2^{r-s+2} - 3 (= 4mt + 1 > a_k)$

$\Rightarrow (a_{k+1}, m) = 1 \Rightarrow a_{k+1}$ nguyên tố với $a_1, a_2, .., a_k$

Tiếp tục quá trình trên đây, ta có vô số các số có dạng $2^n - 3$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

Câu 6

Kí hiệu *M* là mặt có số cạnh lớn nhất của khối đa diện. Giả sử mặt *M* có *k* cạnh. Khi đó vì có *k* mặt có cạnh chung với *M*, nên đa diện có ít nhất $k + 1$ mặt. Vì *M* là mặt có số cạnh lớn nhất bằng *k* , nên mọi mặt của đa diện có số cạnh nhận một trong các giá trị $\{3,4,..., k\}$. Đa diện có ít nhất $k + 1$ mặt số cạnh của nó nhận một trong $k - 2$ giá trị. Vì thế theo nguyên lí Dirichlet suy ra có ít nhất hai mặt của đa diện có cùng số cạnh.

NĂM 2013

TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM - TP. HỒ CHÍ MINH

Câu 1.

Giải phương trình: $\left(8x^3 + 1\right)^3 - 162x + 27 = 0$

Câu 2.

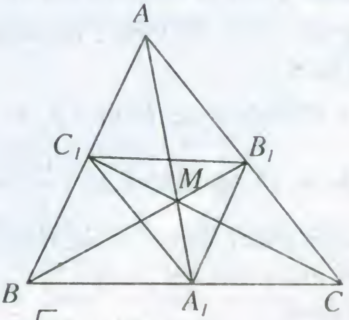
Cho dãy số (u_n) thoả mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ u_{n+1}.(1 - u_n) > \dfrac{1}{4} \end{cases} \text{với mọi } n = 1, 2, ...$$

Tính $\lim u_n$.

Câu 3.

Cho tam giác ABC và M là điểm bất kì thuộc miền trong của tam giác đó. Các đường thẳng AM, BM, CM theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Hãy xác định vị trí của điểm M để diện tích tam giác $A_1B_1C_1$ lớn nhất.



Câu 4.

Cho hàm số f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa: $f(x + 1) + f(x - 1) = \sqrt{2}f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Chứng minh rằng: $f(x + 2013) = -f(x + 1), \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 5.

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Câu 6.

Một bảng hình chữ nhật kẻ ô vuông có 2012 hàng và 2013 cột. Kí hiệu ô vuông nằm ở giao của hàng thứ m (kể từ trên xuống dưới) và cột thứ n (kể từ trái sang phải) là (m;n). Tô màu các ô vuông của bảng theo cách sau: lần thứ nhất tô 3 ô $(r;s), (r + 1;s + 1), (r + 1;s + 2)$, với r, s là hai số tự nhiên cho trước thỏa mãn $1 \le r \le 2010$ và $1 \le s \le 2012$; từ lần thứ hai mỗi lần tô đúng 3 ô chưa có màu nằm cạnh nhau hoặc trong cùng một hàng hoặc trong cùng một cột. Hỏi bằng cách đó có thể tô màu được tất cả các ô vuông của bảng đã cho hay không?

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH - KON TUM

Câu 1.

Giải phương trình: $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$.

Câu 2.

Cho hai dãy số (a_n) và (b_n) xác định bởi $a_0=2, b_0=3, a_1=3, b_1=5$

và $a_n=a_{n-2}+b_{n-2}, b_n=a_{n-1}+b_{n-1}; \forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

Đặt $u_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k.\dfrac{1}{a_kb_k}, n\in\mathbb{N}$.

Chứng minh dãy (u_n) có giới hạn và tính giới hạn đó.

Câu 3.

Cho tam giác ABC. Gọi E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) với các cạnh AC, AB và M là trung điểm của BC. Gọi N là giao điểm của AM và EF, X là giao điểm của BI và EF, Y là giao điểm của CI và EF. Chứng minh rằng $NX.AB=NY.AC$.

Câu 4.

Chứng minh rằng, nếu đa thức với những hệ số nguyên

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

nhận giá trị là luỹ thừa của một số nguyên với vô hạn giá trị nguyên của biến *x*, thì $P(x)=(x+c)^n$, với c là hằng số nguyên.

Câu 5.

Cho đa thức $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ với hệ số $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ là các số nguyên và $\alpha=\dfrac{u}{v}$ là số hữu tỉ, (u, v là các số nguyên và u, v nguyên tố cùng nhau). Chứng minh rằng, nếu α là một nghiệm của P(x) thì với mọi số nguyên m, P(m) chia hết cho $u-mv$.

Câu 6.

Có hai đống đá có n hòn và đống kia có k hòn. Cứ mỗi phút một máy tự động lại chọn một đống có số hòn đá là chẵn và chuyển một nửa số hòn đá của đống đá được chọn sang đống kia. Nếu cả hai đống đều có số hòn đá là chẵn thì máy sẽ chọn ngẫu nhiên một đống. Nếu trong hai đống số hòn đá đều là lẻ thì máy sẽ ngừng làm việc. Hỏi tồn tại bao nhiêu cặp sắp thứ tự (*n*, *k*), với *n* và *k* là các số tự nhiên không vượt quá 2013, để máy tự động sau một khoảng thời gian hữu hạn sẽ dừng?

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - BÌNH ĐỊNH

Câu 1.

Cho tam thức bậc hai f(x) thỏa mãn $\left|f(x)\right|<1$ với mọi $x\in[-1;1]$.

a) Chứng minh rằng phương trình $f(x)=3x^2-x-1$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Chứng minh rằng $f\left(\frac{4}{3}\right) < 3$.

Câu 2.

Cho a là một số thực dương và dãy (x_n) được xác định:

$$x_1 = \frac{1}{2a}, x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + ax_n + \sqrt{a^2x_n^2 + 4ax_n}} \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Tìm $\lim S_n$.

Câu 3.

Trên nửa đường tròn (O) lấy các điểm M, N, P, Q phân biệt. Gọi m, n, p, q lần lượt là các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M, N, P, Q. Giả sử A, B, C, D lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng (q, m), (m, n), (n, p), (p, q). Chứng minh rằng AC, BD, MP, NQ đồng quy (tại điểm I).

Câu 4.

Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = f(x^4 - y) + 8yf(x)\left((f(x))^2 + y^2\right), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 5.

Cho đa thức: $P(x) = x^{2017} + ax^2 + bx + c$, với các hệ số nguyên a, b, c và có ba nghiệm nguyên là x_1, x_2, x_3.

Chứng minh rằng:

$(a + b + c + 1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ chia hết cho 2017.

Câu 6.

Cho hai đống đá, một đống có a hòn đá, đống kia có b hòn đá. Hai người chơi, mỗi người đến lượt mình được lấy một hòn đá từ một trong hai đống, hoặc lấy phần nguyên của một nửa số hòn đá từ đống thứ nhất, hoặc lấy phần nguyên một nửa số hòn đá từ đống thứ hai, hoặc lấy từ hai đống số hòn đá như nhau. Người lấy được hòn đá cuối cùng là người chiến thắng.

Hãy tìm tất cả các cặp (a, b) trong đó $a \le 8, b \le 13$ sao cho người đi sau có chiến thuật thắng.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - NINH THUẬN

Câu 1.

Giải phương trình sau trong khoảng $(0; 1)$: $32x(x^2 - 1)(2x^2 - 1)^2 = 1 - \frac{1}{x}$.

Câu 2.

Cho dãy số $\{x_n\}$, xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1, \forall n \ge 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $1-\frac{1}{2^{2^{n-1}}}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}<1-\frac{1}{2^{2^n}},\forall n\geq 1$

Câu 3.

Hai đường tròn $(O),(O')$ cắt nhau tại hai điểm A, B.

Trên tia đối Ax của tia AB lấy điểm M. Từ M kẻ tới đường tròn (O') hai tiếp tuyến MC và MD $(C, D$ là các tiếp điểm và D nằm trong $(O))$.

Đường thẳng AC cắt (O) lần thứ hai tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên tia Ax.

Câu 4.

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ sao cho $f(x+f(y))=f(x+y)+f(y)$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}^+$.

Câu 5.

Tìm tất cả các số nguyên dương *n* sao cho phương trình

$x+y+z+t=n\sqrt{xyzt}$ có nghiệm nguyên dương (x, y, z, t).

Câu 6.

Cho tập hợp *A*, kí hiệu $|A|$ và $s(A)$ lần lượt là số các phần tử và tổng tất cả các phần tử của *A* (nếu $A=\varnothing$ thì $|A|=s(A)=0$). Cho *S* là tập hợp con của $\mathbb{N}^*$ thoả mãn hai điều kiện sau:

i) Tồn tại hai số $x,y\in S$ sao cho ước chung lớn nhất bằng 1.

ii) Nếu $u,v\in S$ thì $u+v\in S$.

Gọi *T* là phần bù của *S* trong $\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng *T* hữu hạn và $s(T)\leq|T|^2$.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LONG AN - LONG AN

Câu 1.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x\left(x-2\sqrt{y-1}-1\right)=(1-x)y-1\\x^2\left(x+3\sqrt{y-1}-6\right)=16-\sqrt{(y-1)^3}\end{cases}$ (I)

Câu 2.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1>0\\u_{n+1}.u_n-3=\sqrt{3u_n^2+8u_n+9},\forall n\geq 1\end{cases}$

Chứng minh ràng (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3.

Trên đường tròn tâm O, bán kính R lấy sáu điểm D, E, F, G, H, K theo thứ tự đó sao cho DE = FG = HK = R. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của EF, GH và KD.

Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác đều.

Câu 4.

Tìm tất cả các hàm số liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = f(xy) + (x-y)^2, \ \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Câu 5.

Tồn tại hay không số nguyên n để $n.2^{2^{2013}} - 78 - n$ là số chính phương?

Câu 6.

Một hoàng tử đi cứu công chúa và gặp một con rắn có 100 cái đầu. Hoàng tử có hai thanh kiếm:

Thanh kiếm 1 cho phép chặt đúng 21 cái đầu;

Thanh kiếm 2 cho phép chặt đúng 4 cái đầu nhưng khi đó con rắn lại mọc thêm 2013 cái đầu khác.

Biết rằng hoàng tử cứu được công chúa nếu như con rắn bị chặt hết đầu.

a) Hỏi hoàng tử có cứu được công chúa không?

b) Nếu từ 100 cái đầu thì con rắn sau mỗi lần bị chặt có thể có bao nhiêu cái đầu?

ĐÁP ÁN

TRƯỜNG THPT HOÀNG HOA THÁM - TP. HỒ CHÍ MINH

Câu 1.

Đặt $u = 2x$

Phương trình trở thành: $\left(u^3+1\right)^3 = 27\left(3u-1\right) \Leftrightarrow u^3 + 1 = 3\sqrt[3]{3u-1}$

Đặt $v = \sqrt[3]{3u-1} \Leftrightarrow v^3 + 1 = 3u$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^3+1=3v \\ v^3+1=3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=3v \\ u^3-v^3=3\left(v-u\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=3v \\ \left(u-v\right)\left(u^2+uv+v^2+3\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=3v \\ u=v \end{cases} \left(\text{do } u^2+uv+v^2+3>0;\forall u,v\right) \Leftrightarrow u^3+1=3u.$$

Hay $8x^3 - 6x + 1 = 0$ (*)

Ta có: $8x^3 - 6x + 1 = 2x^3 + 6x(x^2-1) + 1 > 0, \forall x \geq 1$.

Mặt khác: $8x^3 - 6x + 1 = 2(x+1)(2x-1)^2 - 1 < 0, \forall x \leq -1$.

Xét phương trình (*) trên khoảng $(-1;1)$

Do $x \in (-1;1)$ nên ta có thể đặt $x = \cos t\,(0 < t < \pi)$, khi đó (*) trở thành:

$$2\left(4\cos^3 t - 3\cos t\right) = -1 \Leftrightarrow \cos 3t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho có nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x = \cos\frac{2\pi}{9} \\ x = \cos\frac{8\pi}{9} \\ x = \cos\frac{14\pi}{9} \end{array}\right.$

Câu 2.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương u_{n+1} và $(1 - u_n)$:

$$u_{n+1} + (1 - u_n) \geq 2\sqrt{u_{n+1}.(1 - u_n)} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n = 1,2,...$$

$\Rightarrow (u_n)$ là dãy tăng.

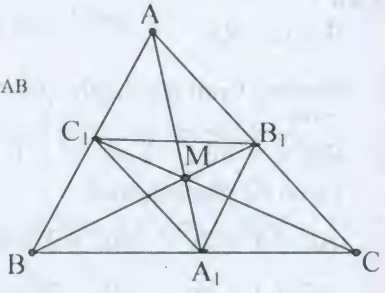
Mặt khác, theo giả thiết thì (u_n) bị chặn trên bởi 1, do đó tồn tại giới hạn của dãy số (u_n). Đặt $u_0 = \lim u_n$.

Do $u_{n+1}.(1 - u_n) > \frac{1}{4} \Rightarrow \lim\left(u_{n+1}.(1 - u_n)\right) \geq \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow u_0.(1 - u_0) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(2u_0 - 1\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow u_0 = \frac{1}{2}$$

Vậy $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Câu 3.



Đặt $S = S_{ABC}, S_1 = S_{MBC}, S_2 = S_{MAC}, S_3 = S_{MAB}$

Ta có: $\frac{S_1}{S} = \frac{MA_1}{AA_1} \Rightarrow \frac{S_1}{S - S_1} = \frac{MA_1}{MA}$.

Tương tự: $\frac{S_2}{S - S_2} = \frac{MB_1}{MB}, \frac{S_3}{S - S_3} = \frac{MC_1}{MC}$

Mặt khác: $\frac{S_{MA_1B_1}}{S_3} = \frac{MA_1}{MA}.\frac{MB_1}{MB} \Leftrightarrow S_{MA_1B_1} = \frac{S_1}{S - S_1}.\frac{S_2}{S - S_2}.S_3$

Tương tự: $S_{MA_1C_1} = \frac{S_1}{S - S_1}.\frac{S_3}{S - S_3}.S_2, S_{MB_1C_1} = \frac{S_2}{S - S_2}.\frac{S_3}{S - S_3}.S_1$

Suy ra:

$$S_{A_1B_1C_1} = S_1.S_2.S_3.\left(\frac{1}{(S - S_1)(S - S_2)} + \frac{1}{(S - S_2)(S - S_3)} + \frac{1}{(S - S_3)(S - S_1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow S_{A_1B_1C_1} = \frac{S_1.S_2.S_3}{(S_1 + S_2)(S_2 + S_3)(S_3 + S_1)}.2S.$$

Như vậy: $S_{A_1B_1C_1}$ lớn nhất khi $\dfrac{S_1.S_2.S_3}{(S_1 + S_2)(S_2 + S_3)(S_3 + S_1)}$ lớn nhất.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{S_1.S_2.S_3}{(S_1 + S_2)(S_2 + S_3)(S_3 + S_1)} \le \frac{S_1S_2S_3}{2\sqrt{S_1S_2}.2\sqrt{S_2S_3}.2\sqrt{S_3S_1}} = \frac{1}{8}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$S_2 = S_3 = S_3 = \dfrac{S}{3}$, khi M trùng với trọng tâm tam giác ABC.

Câu 4.

Ta có: $f(x + 1) + f(x - 1) = \sqrt{2}f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[f(x + 1) + f(x - 1)\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(f(x + 2) + f(x)\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(f(x) + f(x - 2)\right)\right]$$

$\Leftrightarrow f(x + 2) = -f(x - 2)$ (1)

Thay x bởi $x + 2$ vào (1) ta được $f(x + 4) = -f(x)$ (2)

Từ (2) ta có

$$f(x + 2013) = f\left(\left(x + 1\right) + 53.4\right) = (-1)^{53}.f(x + 1) = -f(x + 1) \text{ (dpcm)}$$

Câu 5.

Ta tìm n thỏa mãn $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ n^4 + n^3 + 1 = m^2 \quad (m \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$ (1)

Ta có $m^2 = n^4 + n^3 + 1 > n^4 \Rightarrow m > n^2$

$\Rightarrow m = n^2 + k\ (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n^4 + n^3 + 1 = (n^2 + k)^2 \Rightarrow n^2(n - 2k) = k^2 - 1 \ge 0$

Nếu $k^2 - 1 > 0$ thì $n - 2k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k^2 - 1 \ge n^2 \Rightarrow k^2 > n^2$

$\Rightarrow n < k$ mâu thuẫn với $n - 2k \in \mathbb{N}^*$

Vậy phải có $k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$ và $n^2(n - 2) = 0 \Rightarrow n = 2$ (khi đó $m = 5$)

Vậy có duy nhất một số nguyên dương n thỏa mãn $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương, đó là $n = 2$.

Câu 6.

Ta ghi vào mỗi ô vuông của bảng một số tự nhiên theo quy tắc sau: ở mỗi cột, lần lượt từ trên xuống dưới, ghi các số tự nhiên từ 1 đến 2012.

Như vậy ba số được ghi vào ba ô cạnh nhau trong cùng một hàng là ba số tự nhiên bằng nhau, trong cùng một cột là ba số tự nhiên liên tiếp.

Suy ra, kể từ lần thứ hai, mỗi lần tô màu ta sẽ xóa đi ba số có tổng chia hết cho 3. Còn ba số được ghi vào ba ô $(r;s),(r+1;s+1),(r+1;s+2)$ là $r,r+1,r+1$ mà tổng của chúng là một số chia cho 3 dư 2. Vậy nếu tô màu được hết các ô vuông của bảng đã cho thì tổng S của tất cả các số đã được ghi vào bảng phải là một số chia cho 3 dư 2.

Nhưng $S = 2013.(1+2+3+\ldots+2012)$ là một số chia hết cho 3 (2013 chia hết cho 3). Mâu thuẫn. Do đó không thể tô màu được tất cả ô vuông của bảng đã cho theo cách trên.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH - KON TUM

Câu 1.

Điều kiện: $x \geq 5$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{5x^2+14x+9} = 5\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x-20}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-5x+2 = 5\sqrt{(x^2-x-20)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-4x-5\right)+3\left(x+4\right) = 5\sqrt{(x^2-4x-5)(x+4)}$$

$$\Leftrightarrow 2.\frac{x^2-4x-5}{x+4} - 5\sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x+4}} + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}} = 1 \\ \sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}} = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

i) $\sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}} = 1 \Leftrightarrow x^2-4x-5 = x+4$

$$\Leftrightarrow x^2-5x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5+\sqrt{61}}{2} \\ x = \dfrac{5-\sqrt{61}}{2} \end{array}\right.$$

ii) $\sqrt{\dfrac{x^2-4x-5}{x+4}} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 4\left(x^2-4x-5\right) = 9\left(x+4\right)$

$$\Leftrightarrow 4x^2-25x-56=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = -\dfrac{7}{4} \end{array}\right..$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{5+\sqrt{61}}{2}$, $x = 8$.

Câu 2.

Từ giả thiết ta có $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $b_n = a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

+ Ta chứng minh đẳng thức sau bằng quy nạp

$$a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^n,\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad (*).$$

Với n = 0; n = 1 thì (*) đúng. Giả sử (*) đúng tới n ($n \in \mathbb{N}^*$), ta có

$$a_{n+1}a_{n+3} - a_{n+2}^2 = \left(a_{n-1} + a_n\right)\left(a_{n+1} + a_{n+2}\right) - \left(a_n + a_{n+1}\right)^2$$

$$= a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 + a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1} + a_{n-1}a_{n+2} - 2a_n a_{n+1}$$

$$= (-1)^{n-1} + (-1)^n + a_{n-1}a_{n+2} - a_n a_{n+1} = a_{n-1}\left(a_n + a_{n+1}\right) - a_n\left(a_n + a_{n-1}\right)$$

$$= a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2 = (-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}.$$

Suy ra (*) đúng với n + 1. Vậy (*) được chứng minh.

+ Áp dụng (*) ta có $(-1)^k \dfrac{1}{a_k b_k} = \dfrac{a_k a_{k+2} - a_{k+1}^2}{a_k a_{k+1}} = \dfrac{a_{k+2}}{a_{k+1}} - \dfrac{a_{k+1}}{a_k}; \forall k \in \mathbb{N}$.

Suy ra $u_n = \left(\dfrac{a_2}{a_1} - \dfrac{a_1}{a_0}\right) + \left(\dfrac{a_3}{a_2} - \dfrac{a_2}{a_1}\right) + \dots + \left(\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \dfrac{3}{2}$.

Đặt $v_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ thì $v_{n+1} = \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$; $v_0 = \dfrac{3}{2}$.

Ta có (v_n) là dãy số dương và $v_n \le 2; \forall n \in \mathbb{N}$.

Xét hai dãy $x_n = v_{2n}, y_n = v_{2n+1}$.

Ta có $x_0 = \dfrac{3}{2}, x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x_n}}$; $y_0 = \dfrac{5}{3}, y_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{y_n}}$.

Vì hàm số $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ là hàm số giảm trên $(0; +\infty)$.

và $v_0 = \dfrac{3}{2}, v_1 = \dfrac{5}{3}, v_2 = \dfrac{8}{5}, v_3 = \dfrac{13}{8}$ tức là $v_0 < v_2, v_1 > v_3$.

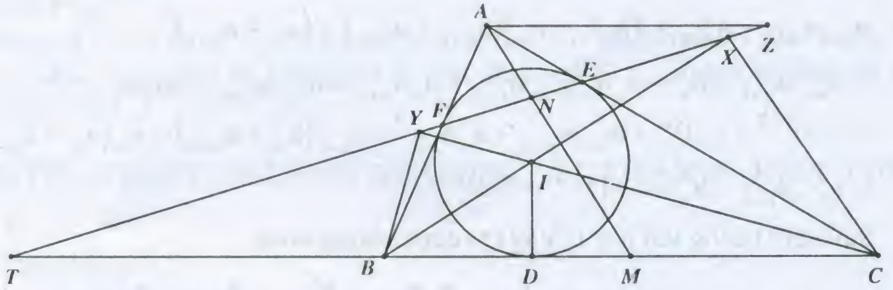
Suy ra dãy số (x_n) tăng và bị chặn trên bởi 2 nên tồn tại $\lim x_n = L$ với $L \le 2$ và dãy số (y_n) giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại $\lim y_n = K$ với $L, K \ge 0$ và L, K đều là nghiệm của phương trình:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \text{ nên } L = K = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Suy ra $\lim v_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, do đó dãy số (u_n) tồn tại giới hạn và

$$\lim u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}-2}{2}.$$

Câu 3.



* Gọi D là tiếp điểm của đường tròn (I) với BC, ta chứng minh D, I, N thẳng hàng. Thật vậy:

Gọi d là đường thẳng qua A và song song với BC, Z là giao điểm của d và EF.

Vì M là trung điểm của BC nên hàng điểm (Z, N, E, F) là hàng điểm điều hòa.

Xét cực và đối cực đối với đường tròn (I):

Ta có Z thuộc đối cực của N.

Mà N thuộc EF là đối cực của A nên A thuộc đối cực của N.

Từ đó AZ là đối cực của N, suy ra $IN \perp AZ$ hay $IN \perp BC$.

Mặt khác $DI \perp BC$ nên D, I, N thẳng hàng.

* Gọi T là giao điểm của EF và BC vì AD, BE, CF đồng quy (theo định lí Cêva) nên ta có (T, D, B, C) là hàng điểm điều hòa.

Mà $\Delta BFX = \Delta BDX$ (c-g-c) nên $\widehat{TXB} = \widehat{DXB}$ do đó $BX \perp CX$.

Tương tự ta chứng minh được $BY \perp CY$.

Từ đó suy ra X, Y cùng thuộc đường tròn (ω) đường kính BC.

+ Xét cực đối với đường tròn (ω):

Do (T, D, B, C) là hàng điểm điều hòa nên D thuộc đối cực của T.

$DN \perp BC$ nên DN là đối cực của T, suy ra (T, N, Y, X) là hàng điểm điều hòa.

Do đó D(T, N, Y, X) là chùm điều hòa, mà $DT \perp DN$ nên DN là phân giác góc XDY.

Suy ra $\dfrac{NX}{NY} = \dfrac{DX}{DY} = \dfrac{\sin\widehat{DYX}}{\sin\widehat{DXY}}$.

+ Mặt khác, ta có BDIY và CDIX là các tứ giác nội tiếp nên

$$\frac{1}{2}\widehat{ABC} = \widehat{DBI} = \widehat{DYI} = \frac{1}{2}\widehat{DYX}$$

(hai tam giác CDY và CEY bằng nhau), do đó $\widehat{ABC} = \widehat{DYX}$.

Suy ra $\frac{NX}{NY} = \frac{DX}{DY} = \frac{\sin\widehat{DXY}}{\sin\widehat{DXY}} = \frac{\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow NX.AB = NY.AC$.

Câu 4.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả thiết *P*(*x*) là luỹ thừa bậc *n* của số nguyên *y* cho vô hạn số nguyên dương *x*.

Cho $x > 0$ và đủ lớn, ta có $P(x) = y^n > 0$, với $y > 0$.

Xét hiệu $y^n - x^n$, ta có $\left|y^n - x^n\right| = \left|y - x\right|\left|y^{n-1} + y^{n-2}x + ... + x^{n-1}\right| \geq \left|y - x\right|x^{n-1}$,

từ đó $\left|y - x\right| \leq \left|\frac{y^n - x^n}{x^{n-1}}\right|$.

Đặt $b = \left|y - x\right|$, ta được $\left|b\right| \leq \left|\frac{P(x) - x^n}{x^{n-1}}\right| = \left|a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{x} + ... + \frac{a_0}{x^{n-1}}\right|$

$$\leq \left|a_{n-1}\right| + \left|a_{n-2}\right| + ... + \left|a_0\right|.$$

Suy ra, các số nguyên $b = y - x$ bị chặn, do đó tồn tại số nguyên *c* sao cho đẳng thức $P(x) = (x + c)^n$ đúng với vô hạn những giá trị của *x*.

Vậy $P(x) = (x + c)^n$, với *c* là hằng số nguyên.

Câu 5.

Vì $\alpha = \frac{u}{v}$ là nghiệm của P(x) nên

$$P\left(\frac{u}{v}\right) = a_n\left(\frac{u}{v}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{u}{v}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{u}{v}\right) + a_0 = 0,$$

hay $P\left(\frac{u}{v}\right) = a_n\frac{u^n}{v^n} + a_{n-1}\frac{u^{n-1}}{v^{n-1}} + ... + a_1\frac{u}{v} + a_0 = 0$.

Khi đó, với mọi $m \in \mathbb{Z}$, ta có

$$P(m) = P(m) - P\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$= a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + ... + a_1 m + a_0 - \left(a_n\frac{u^n}{v^n} + a_{n-1}\frac{u^{n-1}}{v^{n-1}} + ... + a_1\frac{u}{v} + a_0\right)$$

$$= a_n\left(m^n - \frac{u^n}{v^n}\right) + a_{n-1}\left(m^{n-1} - \frac{u^{n-1}}{v^{n-1}}\right) + ... + a_1\left(m - \frac{u}{v}\right),$$

Suy ra

$$v^n P(m) = a_n\left(m^n v^n - u^n\right) + a_{n-1}v\left(m^{n-1}v^{n-1} - u^{n-1}\right) + ... + a_1 v^{n-1}(mv - u).$$

Từ $m^k v^k - u^k = (mv - u)(m^{k-1}v^{n-1} + \ldots + u^{k-1})$, suy ra

$$a_k v^{n-k}(m^k v^k - u^k) \vdots mv - u,$$ hay $v^n P(m)$ chia hết cho $u - mv$.

Mặt khác $(u, v) = 1$, suy ra $(v^k, u - mv) = 1$, suy ra $P(m)$ chia hết cho $u - mv$.

Câu 6.

Giả sử $n = 2^a u$ và $k = 2^b v$, với u, v là các số lẻ. Chúng ta sẽ chứng minh rằng máy tự động sau một khoảng thời gian hữu hạn sẽ dừng đối với các cặp số và chỉ các cặp số (n, k) với a = b.

- Nếu a = b thì từ cặp (n, k) máy tự động có thể nhận được cặp

$$\left(2^{a-1}u, 2^{a-1}(u + 2v)\right) \text{ hoặc } \left(2^{a-1}(2u + v), 2^{a-1}v\right).$$

Vì các số $(u + 2v)$ và $(2u + v)$ lại là số lẻ, nên máy tự động làm giảm số mũ của 2 xuống 1 đơn vị. Qua a bước thì số này trở nên bằng 0 và máy tự động sẽ dừng.

- Bây giờ giả sử $a < b$ (tương tự $a > b$ xét tương tự). Nếu $a \le b - 2$, thì từ cặp (n, k) máy tự động có thể nhận được cặp $\left(2^a(u + 2^{b-1-a}v), 2^{b-1}v\right)$ với các số mũ trong luỹ thừa của 2 khác nhau. Nếu $a = b - 1$, thì từ cặp (n, k) máy tự động có thể nhận được cặp $\left(2^a(u + v), 2^a v\right) = \left(2^{a+1}\dfrac{u + v}{2}, 2^a v\right)$ lại các số mũ trong luỹ thừa của 2 khác nhau. Dễ dàng thấy rằng trong trường hợp này máy tự động làm việc mãi mãi không dừng.

- Chỉ còn việc đếm các cặp số $(n, k) = (2^a.u, 2^a.v)$, với $2^a.u \le 2013$, $2^a.v \le 2013$.

+ Có 1007 số lẻ không vượt quá 2013, bởi vậy số cặp (n, k) với a = b = 0 bằng 1007^2;

+ 503 số không vượt quá 2013 chia hết cho 2 và không chia hết cho 4, bởi vậy số lượng cặp với a = b = 1 bằng 503^2; …

+ Cứ tiếp tục như vậy, ta nhận được đáp số của bài toán

$$1007^2 + 503^2 + 252^2 + 126^2 + 63^2 + 31^2 + 16^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 = 1351709.$$

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - BÌNH ĐỊNH

Câu 1.

a) Giả sử $f(x) = ax^2 + bx + c$ trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \ne 0)$.

Khi đó: $$\begin{cases} f(0) = c \\ f(1) = a + b + c \\ f(-1) = a - b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = f(0) \\ b = \dfrac{f(1) - f(-1)}{2} \\ a = \dfrac{f(1) + f(-1) - 2f(0)}{2} \end{cases}.$$

Suy ra $|2a| \le |f(1)| + |f(-1)| + 2|f(0)| < 4 \Rightarrow |a| < 2$ và $a \ne 0$.

Hàm số $g(x) = 3x^2 - x - 1 - f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$g(0) = -1 - f(0) < 0; g(1) = 1 - f(1) > 0; g(-1) = 3 - f(-1) > 0.$$

Suy ra $g(-1)g(0) < 0$ và $g(1)g(0) < 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1; 1)$.

b) Vì $|a| < 2$ nên $g(x) = 3x^2 - x - 1 - f(x)$ là hàm số bậc hai có hệ số bậc hai dương.

Hơn nữa, theo câu a) $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $(-1; 1)$.

Do đó hàm số $g(x) = 3x^2 - x - 1 - f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

Suy ra: $g(x) > 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow f(x) < 3x^2 - x - 1, \forall x \ge 1$.

Vậy: $f\left(\frac{4}{3}\right) < 3\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} - 1 = 3.$

Câu 2.

Từ giả thiết ta có: $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt $\frac{1}{x_n} = y_n$.

Từ công thức xác định dãy (x_n), ta có:

$$y_1 = 2a \text{ và } y_{n+1} = y_n + a + \sqrt{a^2 + 4ay_n} \ \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{1}$$

Nhân hai vế của (1) với 4a và cộng hai vế với a^2, ta được:

$$a^2 + 4ay_{n+1} = a^2 + 4ay_n + 4a^2 + 4a\sqrt{a^2 + 4ay_n} \ \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{2}$$

Đặt $u_n = \sqrt{a^2 + 4ay_n}$, $u_n > 0$.

Từ (2) suy ra: $u_{n+1}^2 = (u_n + 2a)^2 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$. (3)

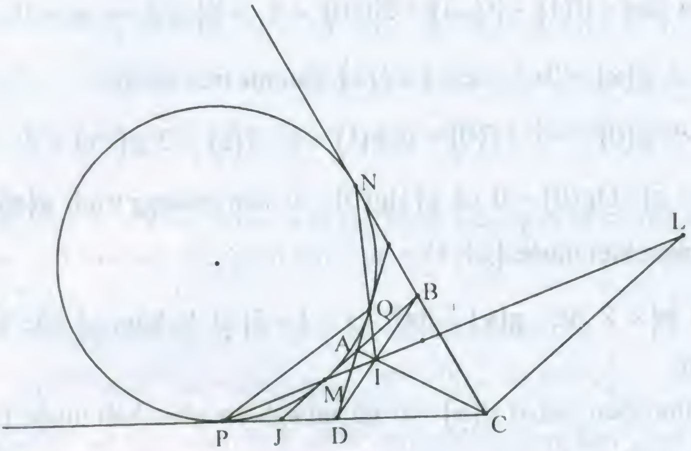
Do $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$, ta có (3) $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + 2a, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là một cấp số cộng có công sai $d = 2a$ và $u_1 = 3a$.

Vậy $u_n = 2an + a \Rightarrow y_n = a(n^2 + n), \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{an(n+1)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow \lim S_n = \frac{1}{a}.$$

Câu 3:



Dựng đường thẳng qua *C* song song với *AB* cắt PM tại *L*, *AB* cắt *CD* tại *J*.

Dễ thấy ΔCPL cân tại *C* ($\widehat{LPC} = \widehat{JMP} = \widehat{AML} = \widehat{PLC}$).

Giả sử *PM* cắt *AC* tại *I*. Ta có: $\dfrac{AM}{CP} = \dfrac{AM}{CL} = \dfrac{IA}{IC}$ (1)

Tương tự, ta cũng giả sử: *NQ* cắt *AC* tại *I'*. Ta cũng có: $\dfrac{AQ}{CN} = \dfrac{I'A}{I'C}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{I'A}{I'C} \Rightarrow I \equiv I'$ (chia trong đoạn *AC* cùng tỉ số)

$\Rightarrow AC, MP, NQ$ đồng quy.

Tương tự ta cũng có: BD, MP, NQ đồng quy.
Vậy AC, BD, MP, NQ đồng quy tại I.

Câu 4.

Từ giả thiết: $f(f(x)+y) = f(x^4 - y) + 8yf(x)\left((f(x))^2 + y^2\right), \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1)

Thay $y = x^4$ vào (1): $f\left(f(x) + x^4\right) = f(0) + 8x^4 f(x)\left(f^2(x) + x^8\right), \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Thay $y = -f(x)$ vào (1): $f\left(0\right) = f\left(x^4 + f(x)\right) - 8f^2(x)\left(f^2(x) + f^2(x)\right), \forall x \in \mathbb{R}$ (3)

Từ (2) và (3), ta có: $16f^4(x) = 8x^4 f(x)\left(f^2(x) + x^8\right), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left(f(x) - x^4\right)f(x)\left(f^2(x) + \frac{3}{4}x^8 + \left(f(x) + \frac{1}{2}x^4\right)^2\right) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Thay x = 0 vào (4) suy ra $f(0) = 0$.
Giả sử tồn tại $a \neq 0$ sao cho $f(a) = 0$. Ta chứng minh $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$
Thay x = 0 và y tùy ý vào (1), ta được $f(y) = f(-y)$.

Thay x = a và y tùy ý vào (1), ta được $f(y) = f(a^4 - y)$.

Suy ra: $f(y) = f(-y) = f\left(a^4 - y\right) = f(y - a^4), \forall y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f\big(f(x)\big) = f\big(-f(x)\big) = f\big(a^4 + f(x)\big), \forall x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

và $f(y^4) = f(y^4 - a^4), \forall y \in \mathbb{R}$ (6)

Thay y = 0 và x tùy ý vào (1), ta được $f\big(f(x)\big) = f(x^4)$. (7)

Thay $y = a^4$ vào (1), ta được

$$f(f(x) + a^4) = f(x^4 - a^4) + 8a^4 f(x)\left(\big(f(x)\big)^2 + a^8\right), \forall x \in \mathbb{R} \tag{8}$$

Từ (5), (6) và (8) suy ra

$$f(f(x)) = f(x^4) + 8a^4 f(x)\left(\big(f(x)\big)^2 + a^8\right), \forall x \in \mathbb{R} \tag{9}$$

Từ (7) và (9): $8a^4 f(x)\left(\big(f(x)\big)^2 + a^8\right) = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

và từ (4), nếu $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) \neq 0 \Rightarrow f(x) = x^4, \forall x \in \mathbb{R}$

Thử lại, ta thấy $f(x) = 0$ và $f(x) = x^4$ là nghiệm của phương trình.

Câu 5.

Đa thức đã cho được viết lại: $P(x) = \left(x^{2017} - x\right) + \left[ax^2 + (b+1)x + c\right]$

Đặt $f(x) = ax^2 + (b+1)x + c$.

Theo định lí Fermat nhỏ: $x_i^{2017} - x_i \vdots 2017, \forall i = 1, 2, 3$

nên $f(x_i) \vdots 2017, \forall i = 1, 2, 3$

Nếu $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \vdots 2017$ thì bài toán được chứng minh.

Nếu $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$ không chia hết cho 2017 thì theo trên ta được:

$$\begin{cases} f(x_1) - f(x_2) \vdots 2017 \\ f(x_2) - f(x_3) \vdots 2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)\left[a(x_1 + x_2) + b + 1\right] \vdots 2017 \\ (x_2 - x_3)\left[a(x_2 + x_3) + b + 1\right] \vdots 2017 \end{cases}$$

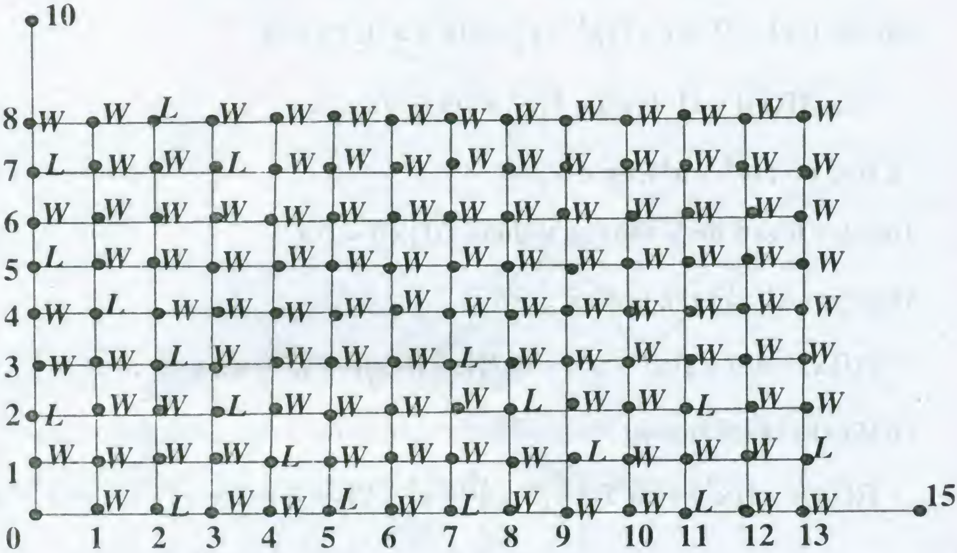
$$\Rightarrow \begin{cases} a(x_1 + x_2) + b + 1 \vdots 2017 \\ a(x_2 + x_3) + b + 1 \vdots 2017 \end{cases} \Rightarrow a(x_1 - x_3) \vdots 2017 \Rightarrow a \vdots 2017$$

Từ đó suy ra, $b + 1 \vdots 2017$ mà $f(x_i) = ax_i^2 + (b+1)x_i + c \vdots 2017$ nên $c \vdots 2017$.

Từ đó, $a + b + c + 1 \vdots 2017$.

Vậy $(a + b + c + 1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \vdots 2017$

Câu 6.



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
8	W	W	L	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W
7	L	W	W	L	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W
6	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W
5	L	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W
4	W	L	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W
3	W	W	L	W	W	W	W	L	W	W	W	W	W	W
2	L	W	W	L	W	W	W	W	L	W	W	L	W	W
1	W	W	W	W	L	W	W	W	W	L	W	W	W	L
0		W	L	W	W	L	W	L	W	W	W	L	W	W

Ở trạng thái một đống có a hòn đá, đống kia có b hòn đá ta đặt tương ứng với một điểm trên mặt phẳng tọa độ (a, b).

Theo giả thiết bài toán, đến lượt một người chơi nào đó thì chuyển một điểm (a, b) thành một điểm $(a-i, b-i)$ trong đó $1 \le i \le \min\{a, b\}$, hoặc điểm $(a-1, b)$, hoặc điểm $(a, b-1)$, hoặc điểm $\left(\left[\frac{a}{2}\right], b\right)$, hoặc điểm $\left(a, \left[\frac{b}{2}\right]\right)$.

Nếu người chơi nào chuyển về điểm $(0,0)$ trước thì người đó chiến thắng.

Một điểm (a,b) được gọi điểm "thua" nếu người nào phải chuyển điểm này, luôn luôn tạo ra điểm mà người chơi tiếp theo có chiến thuật chuyển về điểm $(0,0)$. Điểm như vậy kí hiệu là L.

Một điểm (a,b) được gọi điểm "thắng" nếu đến lượt người nào phải chuyển điểm này, luôn tồn tại ít nhất một khả năng để chuyển điểm đó về điểm "thua". Điểm như vậy được kí hiệu là W.

Như vậy, nếu (a,b) là điểm "thua" thì người đi sau luôn có chiến thuật thắng.

Bài toán trở thành tìm tất cả các điểm "thua". Bây giờ biểu diễn tất cả các điểm (a,b) trong đó $a \le 13, b \le 8$ thành các điểm W hay L trên mặt phẳng tọa độ và tìm tất cả điểm tương ứng với L.

Dựa vào hình vẽ ta thấy các điểm thỏa mãn bài toán là:

$(2,0); (5,0); (7,0); (11,0); (4,1); (9,1); (13,1); (0,2);$

$(3,2); (8,2); (11,2); (2,3); (7,3); (1,4); (0,5); (0,7); (3,7); (2,8).$

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN - NINH THUẬN

Câu 1.

Đặt $x = \cos\alpha,\ 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$32\cos\alpha\left(\cos^2\alpha - 1\right)\left(2\cos^2\alpha - 1\right)^2 = 1 - \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 32\cos^2\alpha.\sin^2\alpha\left(2\cos^2\alpha - 1\right)^2 = 1 - \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2 2\alpha.\cos^2 2\alpha = 1 - \cos\alpha \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 4\alpha = \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos 8\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow 8\alpha = \pm\alpha + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = k\dfrac{2\pi}{9} \\ \alpha = k\dfrac{2\pi}{7} \end{array}\right.\left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \cos\left(k\dfrac{2\pi}{9}\right)$ hoặc $x = \cos\left(k\dfrac{2\pi}{7}\right)$, $\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Câu 2.

Ta có $x_{n+1} - 1 = x_n\left(x_n - 1\right)$ và $x_1 = 2$ nên $\left\{x_n\right\}$ là dãy tăng.

Mà $x_n - 1 \neq 0$ nên $\dfrac{1}{x_{n+1} - 1} = \dfrac{1}{x_n - 1} - \dfrac{1}{x_n}$.

Hay $\dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{x_n - 1} - \dfrac{1}{x_{n+1} - 1} \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} = 1 - \dfrac{1}{x_{n+1} - 1}$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$1 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}} < 1 - \frac{1}{x_{n+1} - 1} < 1 - \frac{1}{2^{2^n}} \Leftrightarrow 2^{2^{n-1}} < x_{n+1} - 1 < 2^{2^n} \qquad (*)$$

Ta chứng minh (*) bằng quy nạp.

Với $n = 1$: (*) đúng. Giả sử $2^{2^{k-1}} < x_{k+1} - 1 < 2^{2^k}$.

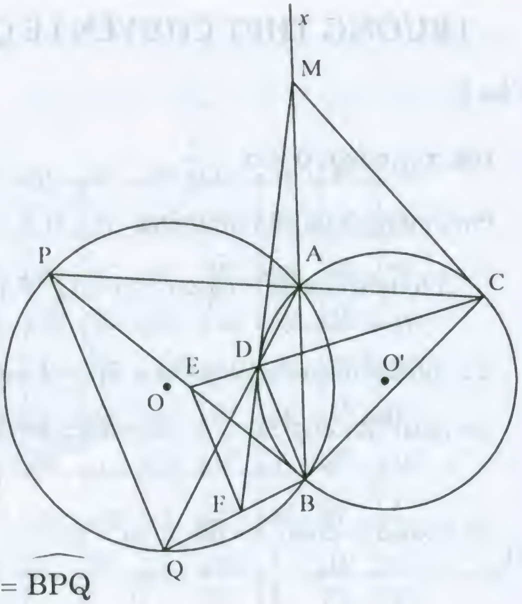
Ta có $x_{k+2} - 1 = x_{k+1}\left(x_{k+1} - 1\right) > 2^{2^{k-1}}.2^{2^{k-1}} = 2^{2^k}$.

Hơn nữa $x_{k+1} \leq 2^{2^k} \Rightarrow x_{k+1} - 1 \leq 2^{2^k} - 1$

$$\Rightarrow x_{k+2} - 1 = x_{k+1}\left(x_{k+1} - 1\right) \leq 2^{2^k}\left(2^{2^k} - 1\right) < 2^{2^{k+1}}.$$

Suy ra $2^{2^k} < x_{k+2} - 1 < 2^{2^{k+1}}$ $\quad\Rightarrow$ đpcm.

Câu 3.



Từ $\widehat{PBQ} = \widehat{PAQ}$

và $\widehat{CBD} = \widehat{PAQ}$.

Suy ra: $\widehat{PBQ} = \widehat{CBD}$.

Hơn nữa

$$\widehat{BCD} = \widehat{BAQ} = \widehat{BPQ}$$

Nên ΔBPQ ÿ ΔBCD

với tỉ số $k = \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{R}{R'}$

Gọi $E = CD \cap BP, F = MD \cap BQ$

Ta thấy tứ giác BDEF nội tiếp nên

$$\widehat{BDF} = \widehat{BEF} \text{ và } \widehat{BEF} = \widehat{BCD} = \widehat{BPQ}$$

Suy ra *EF // PQ*

Do BDEF nội tiếp nên phép quay $Q_{(B,\widehat{CBP})}$ biến đường thẳng CD thành đường thẳng C'D' // EF.

Phép vị tự $V_{(B,k)}$ (với $k = \dfrac{BP}{BC} = \dfrac{R}{R'}$) biến đường thẳng $C'D'$ thành đường thẳng PQ

Các tiếp tuyến tại C và D của (O') cắt nhau trên AB, các tiếp tuyến tại A, B của (O') cắt nhau tại điểm cố định I và I nằm trên CD.

Do đó $V_{(B,k)}\ Q_{(B,\widehat{CBP})}(I) = J$ cố định nằm trên PQ.

Câu 4.

Chú ý rằng $f(x) > x, \forall x$.

Thật vậy, nếu $f(y) < y$ với giá trị *y* nào đó, đặt $x = y - f(y) > 0$.

Phương trình hàm đã cho trở thành $f(2y - f(y)) = 0$ (vô lí).

Nếu có $y = f(y)$, phương trình hàm đã cho trở thành $f(y) = 0$ (vô lí).

Ta sẽ chứng minh $f(x) - x$ là đơn ánh.

Thật vậy giả sử $f(x) - x = f(y) - y$ với $x \neq y$

$\Leftrightarrow x + f(y) = y + f(x) \Rightarrow f(x+y) + f(y) = f(x+y) + f(x)$

$\Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow x = y$ (vô lí).

Từ phương trình đã cho thay $x = f(x)$, ta được

$$f(f(x)+f(y)) = f(f(x)+y)+f(y).$$

Hoán đổi *x*, *y* ta được

$$f(y+f(x)) = f(x+y)+f(x) \Rightarrow f(f(x)+f(y)) - (f(x)+f(y)) = f(x+y).$$

Lấy $x+y = x'+y'$

$$\Rightarrow f(f(x)+f(y)) - (f(x)+f(y)) = f(f(x')+f(y')) - (f(x')+f(y')).$$

Mà $f(x)-x$ đơn ánh nên $f(x)+f(y) = f(x')+f(y')$.

Chọn $x' = y' = \dfrac{x+y}{2}$, ta có $f(x)+f(y) = 2f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

Bây giờ ta chứng minh f đơn ánh.

Nếu $f(x) = f(x+h)$ với $h > 0 \Rightarrow f(x)+f(x+2h) = 2f(x+h) = 2f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = f(x+2h).$$

Bằng quy nạp ta có $f(x+nh) = f(x), \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 0 < f(x+nh) - (x+nh) = f(x) - x - nh, \forall n \in \mathbb{N}$ (vô lí)

$\Rightarrow f(x)$ đơn ánh.

Ta lại có $f(f(x)+f(y)) = f(f(x)+y)+f(y) = 2f\left(\dfrac{f(x)}{2}+y\right)$.

Và do tính đối xứng nên $f(f(x)+f(y)) = 2f\left(\dfrac{f(y)}{2}+x\right)$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{2}+y = \dfrac{f(y)}{2}+x \Rightarrow \dfrac{f(x)}{2}-x = c$ (hằng số) $\Rightarrow f(x) = 2x+2c$.

Thay vào phương trình đã cho ta được $c = 0$.

Vậy $f(x) = 2x$.

Câu 5.

$$x+y+z+t = n\sqrt{xyzt} \Leftrightarrow (x+y+z+t)^2 = n^2xyzt$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x(y+z+t) + (y+z+t)^2 = n^2xyzt$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left[2(y+z+t) - n^2yzt\right]x + (y+z+t)^2 = 0 \ (*)$$

- Điều kiện cần

Giả sử $(*)$ có nghiệm. Gọi (x_0,y_0,z_0,t_0) là nghiệm có tổng nhỏ nhất.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_0 \ge y_0 \ge z_0 \ge t_0$.

Ta có $x_0^2 + \left[2(y_0+z_0+t_0) - n^2y_0z_0t_0\right]x_0 + (y_0+z_0+t_0)^2 = 0$.

Do đó $f(x) = x^2 + \left[2(y_0+z_0+t_0) - n^2y_0z_0t_0\right]x + (y_0+z_0+t_0)^2 = 0$

có nghiệm $x = x_0$, suy ra có nghiệm $x = x_1$, do đó

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = -2(y_0+z_0+t_0) + n^2y_0z_0t_0 \\ x_0x_1 = (y_0+z_0+t_0)^2 \end{cases}$$

Do x_0,y_0,z_0,t_0 là các số nguyên dương nên x_1 nguyên dương.

Suy ra (x_1,y_0,z_0,t_0) là nghiệm nguyên dương của $(*)$

$\Rightarrow x_1 \ge x_0 \Rightarrow x_1 \ge x_0 \ge y_0 \ge z_0 \ge t_0$

$\Rightarrow f(y_0) \ge 0$

$\Leftrightarrow y_0^2 + 2(y_0+z_0+t_0)y_0 - n^2y_0^2z_0t_0 + (y_0+z_0+t_0)^2 \ge 0$

$\Rightarrow n^2y_0^2z_0t_0 \le y_0^2 + 2(y_0+z_0+t_0)y_0 + (y_0+z_0+t_0)^2 \le 16y_0^2$

$\Rightarrow n^2z_0t_0 \le 16 \Rightarrow n^2 \le n^2z_0t_0 \le 16.$

Vậy $n \in \{1; 2; 3; 4\}$.

- Điều kiện đủ:

Với $n = 1$ phương trình $x + y + z + t = \sqrt{xyzt}$ có nghiệm $(4;4;4;4)$.

Với $n = 2$ phương trình $x + y + z + t = 2\sqrt{xyzt}$ có nghiệm $(2;2;2;2)$.

Với $n = 3$ phương trình $x + y + z + t = 3\sqrt{xyzt}$ có nghiệm $(2;2;1;1)$.

Với $n = 4$ phương trình $x + y + z + t = 4\sqrt{xyzt}$ có nghiệm $(1;1;1;1)$.

Câu 6.

- Với mỗi $n \ge xy$.

Vì $(x,y) = 1$ nên $\exists b, 0 \le b < x$ sao cho $by \equiv n \pmod{x}$.

Đặt $a = \dfrac{n - by}{x} \in \mathbb{N} \Rightarrow n = ax + by$ với $a,b \in \mathbb{N}$.

Theo điều kiện của S, $n \in S, \forall n \ge xy \Rightarrow T \subset \{0,1,...,xy\} \Rightarrow T$ hữu hạn.

- Giả sử $T = \{t_1, t_2, ..., t_{|T|}\}$ với $t_1 < t_2 < ... < t_{|T|}$.

Vì $t_i \notin S$ nên hai số *m* và $t_1 - m$ có ít nhất một số không thuộc *S* với

$$1 \le m \le \left[\frac{t_i}{2}\right]$$

Mà chỉ có $i - 1$ số nguyên dương nhỏ hơn t_i không thuộc *S* (đó là $t_1, t_2, ..., t_{i-1}$)

nên $\left[\frac{t_i}{2}\right] \le i - 1 \Rightarrow t_i \le 2i - 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{|T|} t_i \le \sum_{i=1}^{|T|}(2i-1) = |T|^2 \Rightarrow s(T) \le |T|^2$.

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LONG AN - LONG AN

Câu 1.

Đặt $t = \sqrt{y-1}\ (t \ge 0)$.

Khi đó hệ phương trình (I) trở thành: $\begin{cases} x^2 + xt^2 - t^2 - 2xt = 0 & (1) \\ x^3 + 3x^2t - 6x^2 + t^3 - 16 = 0 & (2) \end{cases}$

Nhân hai vế phương trình (1) với 3 rồi cộng với phương trình (2), ta được phương trình:

$$(x+t)^3 - 3(x+t)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x + t = 4 \Leftrightarrow t = 4 - x.$$

Thay vào phương trình (1), ta được:

$x^3 - 6x^2 + 16x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Suy ra t = 2 (nhận) $\Rightarrow y = 5$.

Vậy hệ phương trình có nhiệm duy nhất $(x, y) = (2, 5)$.

Câu 2.

Ta có: $u_{n+1} = \dfrac{3 + \sqrt{3u_n^2 + 8u_n + 9}}{u_n}$ là dãy số dương và

$$u_{n+1} = \frac{3}{u_n} + \sqrt{3 + \frac{8}{u_n} + \frac{9}{u_n^2}} > \sqrt{3}, \forall n \ge 1.$$

Mặt khác: $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n} + \sqrt{3 + \dfrac{8}{u_n} + \dfrac{9}{u_n^2}} < \dfrac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{3 + \dfrac{8}{\sqrt{3}} + \dfrac{9}{3}} = A, \forall n \ge 1$.

Như vậy (u_n) là dãy số dương và bị chặn.

Xét hàm số: $f(x) = \dfrac{3}{x} + \sqrt{3 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{9}{x^2}}, x > 0$;

$$f'(x)=\frac{-3}{x^2}-\left(\frac{8}{x^2}+\frac{18}{x^3}\right).\frac{1}{2\sqrt{3+\frac{8}{x}+\frac{9}{x^2}}}<0.$$

Suy ra hàm f(x) nghịch biến trên $(0;+\infty)$ hay hàm f(f(x)) là hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $u_{n+2}=f(u_{n+1})=f(f(u_n)),\forall n\ge 1$.

Từ đó suy ra hai dãy $(u_{2k}),(u_{2k+1})$ có giới hạn hữu hạn. Gọi hai giới hạn đó lần lượt là a và b thì $\sqrt{3}\le a,b\le A$. Ta có:

$$u_{2k+1}=\frac{3}{u_{2k}}+\sqrt{3+\frac{8}{u_{2k}}+\frac{9}{u_{2k}^2}};u_{2k+2}=\frac{3}{u_{2k+1}}+\sqrt{3+\frac{8}{u_{2k+1}}+\frac{9}{u_{2k+1}^2}}$$

Qua giới hạn, ta được hệ phương trình sau: $\begin{cases}a=\frac{3}{b}+\sqrt{3+\frac{8}{b}+\frac{9}{b^2}}=f(b)\\ b=\frac{3}{a}+\sqrt{3+\frac{8}{a}+\frac{9}{a^2}}=f(a)\end{cases}$

Do f(x) là hàm nghịch biến trên $(0;+\infty)$ nên a = b.

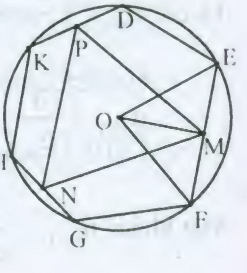
Như vậy: $a=\frac{3}{a}+\sqrt{3+\frac{8}{a}+\frac{9}{a^2}}\Rightarrow a^2-3=\sqrt{3a^2+8a+9}$

$$\Leftrightarrow a(a+1)(a^2-a-8)=0$$

$$\Leftrightarrow a=0\vee a=-1\vee a=\frac{1+\sqrt{33}}{2}\vee a=\frac{1-\sqrt{33}}{2}.$$

Do $\sqrt{3}\le a,b\le A$ nên (u_n) có giới hạn và giới hạn đó là $a=\frac{1+\sqrt{33}}{2}$.

Câu 3.



Đặt: $\angle EOF=2\alpha,\angle GOH=2\beta,\angle KOD=2\gamma$ thì:

$OM=R.\cos\alpha, ON=R.\cos\beta, OP=R.\cos\gamma$.

Do $\angle DOE=\angle FOG=\angle HOK=60^0$,
nên điểm O thuộc miền trong của lục giác DEFGHK.

Từ đó suy ra: $\alpha+\beta+\gamma=90^0$.

Áp dụng định lí Côsin, ta được:

$$PM^2=R^2\cos^2\alpha+R^2\cos^2\gamma-2R^2\cos\alpha.\cos\gamma.\cos(\alpha+\gamma+60^0)$$

$$=R^2\cos^2\alpha+R^2\cos^2\gamma-2R^2\cos\alpha.\sin(\alpha+\beta).\cos(150^0-\beta);$$

$$NP^2 = R^2\cos^2\beta + R^2\cos^2\gamma - 2R^2\cos\beta.\cos\gamma.\cos\left(\beta + \gamma + 60^0\right)$$
$$= R^2\cos^2\beta + R^2\cos^2\gamma - 2R^2\cos\beta.\sin(\alpha + \beta).\cos\left(150^0 - \alpha\right).$$

Suy ra:

$$PM^2 - NP^2$$
$$= R^2\left[\cos^2\alpha - \cos^2\beta - 2\sin(\alpha + \beta).\left(\cos\alpha.\cos(150^0 - \beta) - \cos\beta.\cos(150^0 - \alpha)\right)\right]$$
$$= R^2\left[\cos^2\alpha - \cos^2\beta + \sin(\alpha + \beta).\sin(\alpha - \beta)\right] = 0.$$

Do đó PM = NP và chứng minh tương tự ta được NP = MN.

Vì vậy tam giác MNP là tam giác đều.

Câu 4.

Cho y = 1 thì: $f\left(\dfrac{x^2 + 1}{2}\right) = f(x) + (x - 1)^2$

$$\Leftrightarrow f(x) - 2x = f\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right) - 2\left(\frac{x^2 + 1}{2}\right)$$

Đặt: $g(x) = f(x) - 2x$ thì $g(x) = g\left(\dfrac{x^2 + 1}{2}\right)$ (1) thì g liên tục.

Do g là hàm số chẵn nên ta xét trên $\left[0; +\infty\right)$.

Với $a \geq 0$, ta xét hai trường hợp:

i) $0 \leq a \leq 1$

Xét dãy số (x_n) như sau: $x_0 = a$; $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 1}{2}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$

Vì $0 \leq x_0 \leq 1$, bằng quy nạp ta được $0 \leq x_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ta lại có: $x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow x_n \leq \dfrac{x_n^2 + 1}{2} \Leftrightarrow (x_n - 1)^2 \geq 0$.

Từ đó suy ra (x_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn

Gọi $\lim x_n = l$ thì $l = \dfrac{l^2 + 1}{2} \Leftrightarrow l = 1$

Vậy $\lim x_n = 1$.

Từ đó thế x bởi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vào phương trình (1) ta được

$$g(a) = g(x_0) = g\left(\frac{x_0^2 + 1}{2}\right) = g(x_1) = g\left(\frac{x_1^2 + 1}{2}\right) = g(x_2) = \cdots = g(x_n)$$

$$\Rightarrow g(a) = \lim_{x \to \infty} g(x_n) = g(1)$$

ii) $a > 1$

Xét dãy số (x_n) xác định như sau: $x_0 = a, x_{n+1} = \sqrt{2x_n - 1}$.

Sử dụng phương pháp của dãy truy hồi ta được $\lim x_n = 1$.

Do $x_n = \dfrac{x_{n+1}^2 + 1}{2}$, nên thế x bởi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vào phương trình (1) ta được:

$$g(a) = g(x_0) = g\left(\frac{x_1^2 + 1}{2}\right) = g(x_1) = g\left(\frac{x_2^2 + 1}{2}\right) = g(x_2) = \cdots = g(x_n)$$

$$\Rightarrow g(a) = \lim_{x \to \infty} g(x_n) = g(1).$$

Từ đó suy ra $g(x) = C, \forall x \in \left[0; +\infty\right)$ và do g hàm số chẵn nên

$$g(x) = C, \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra $f(x) = 2x + C$.

Thử lại ta thấy hàm số $f(x) = 2x + C$ thoả mãn bài toán.

Câu 5.

$$\forall k \in N^*, A = 2^{2^k} - 1 = \left(2^{2^{k-1}} - 1\right)\left(2^{2^{k-1}} + 1\right) = \left(2^{2^{k-1}} + 1\right)\left(2^{2^{k-2}} + 1\right)\ldots\left(2^{2^0} + 1\right)$$

$$A = 2^{2^k} - 1 = 3\prod_{l=1}^{k-1}\left(2^{2^l} + 1\right)$$

$$A = \left(2^{2^{k-1}} + 1\right) - 2$$

Gọi $d = \left(2^{2^l} + 1, 2^{2^m} + 1\right) \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d = 1; d = 2$

Mà $2^{2^l} + 1, 2^{2^m} + 1$ lẻ nên $d = 1$

Do đó các số $2^{2^l} + 1\left(l = \overline{1; k - 1}\right)$ nguyên tố cùng nhau nên theo định lí số dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên c sao cho:

$$c \equiv 2^{2^{l-1}}\left(\bmod 2^{2^l} + 1\right), \forall l = \overline{1; k - 1}$$

$$\Rightarrow c^2 + 1 \equiv \left(2^{2^l} + 1\right)\left(\bmod 2^{2^l} + 1\right) \Rightarrow c^2 + 1 \vdots 2^{2^l} + 1, \forall l = \overline{1; k - 1}$$

Do đó: $3(c^2 + 1) \vdots A \Rightarrow 81c^2 + 81 \vdots A \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : (9c)^2 + 81 = n\left(2^{2^k} - 1\right)$

$$\Rightarrow (9c)^2 + 3 = n2^{2^k} - n - 78.$$

Vậy không thể tồn tại số nguyên n nào để $n.2^{2^{2013}} - 78 - n$ là số chính phương.

Câu 6.

Dành cho bạn đọc

Mục lục

PHẦN 1. CÁC ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Năm 1998 .... 5 16
Năm 1999 .... 5 19
Năm 2000 .... 6 22
Năm 2001 .... 7 25
Năm 2002 .... 8 28
Năm 2003 .... 8 31
Năm 2004 .... 9 34
Năm 2005 .... 10 38
Năm 2007 .... 11 41
Năm 2008 .... 11 44
Năm 2009 .... 12 47
Năm 2010 .... 13 50
Năm 2011 .... 13 53
Năm 2012 .... 14 58
Năm 2013 .... 15 61

PHẦN 2. CÁC ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ THEO CHUYÊN ĐỀ

§1. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH 66
§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH 83
§3. PHƯƠNG TRÌNH HÀM 95
§4. BẤT ĐẲNG THỨC 115
§5. ĐA THỨC 132
§6. DÃY SỐ 146
§7. HÌNH KHÔNG GIAN 172

PHẦN 3. CÁC ĐỀ THI ĐỀ NGHỊ

Năm 2007 .... 224 227
Năm 2008 .... 268 276
Năm 2009 .... 320 330
Năm 2010 .... 407 389
Năm 2011 .... 419 427
Năm 2012 .... 475 481
Năm 2013 .... 519 523

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: Biên tập-Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39715011
Fax: (04) 39714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Giám đốc - Tổng biên tập: TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: TRẦN HẢI
Sửa bài: NHÀ SÁCH HỒNG ÂN

Chế bản: NGUYỄN KHỞI MINH
Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

Đối tác liên kết xuất bản:
Nhà sách HỒNG ÂN

SÁCH LIÊN KẾT

TUYỂN TẬP 20 NĂM ĐỀ THI OLIMPIC 30 THÁNG 4 - TOÁN 11

Mã số: 1L- 39ĐH2014
In 800 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty Cổ phần Văn hóa Văn Lang.
Giấy phép xuất bản số: 116-2014/CXB/15-25 ĐHQGHN, ngày 16/1/2014
Quyết định xuất bản số: 38LK-TN/QĐ-NXB ĐHQGHN.
In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2014.

NS. HỒNG ÂN
www.nhasachhongan.com.vn
Email: baolongco_ha@vnn.vn
20C Nguyễn Thị Minh Khai - Q.1 - TP.HCM
ĐT: 38246706 - 08083021 - 39107095 ◆ Fax: 08083017
Điểm đến của tri thức

Lời nhà sách

Quý thầy cô kính mến!
Các em học sinh yêu quý!

Lại một kì thi Olympic sắp đến. Có lẽ các bạn học sinh cũng đang hi vọng mình sẽ là người đạt danh hiệu cao nhất trong kì thi quan trọng này. Để góp một phần nhỏ trong thành tích ấy, Nhà sách Hồng Ân với phương châm xuất bản những ấn phẩm thật sự bổ ích cho việc dạy và học đã mạnh dạn liên kết xuất bản bộ sách "*Tuyển tập 20 năm đề thi Olympic 30 tháng 4*". Với mong muốn gửi đến Quý thầy cô và các em những kiến thức quý giá, đồng thời cũng lưu giữ lại các tư liệu mà Ban tổ chức kì thi đã tốn rất nhiều công sức, tâm huyết theo đuổi và duy trì đến hôm nay.

Bán tại

- NS MINH TÂM, 245 Trần Nguyên Hãn - HP * ĐT: (0313) 858699
- 29&31 Phan Bội Châu - Hải Phòng *ĐT: (0313) 839599
- 04 Lý Thái Tổ - TP. Đà Nẵng *ĐT: 0511.3823421
- 259 Lê Duẩn - TP. Vinh - ĐT: 0383.554777
- 94 Xô Viết Nghệ Tĩnh - Cần Thơ - ĐT: (0710) 3818891
- 158 Tỉnh lộ 8 - TT.Củ Chi - TP.HCM .*ĐT: (08) 37924216
- 51 Lý Thường Kiệt - TP Đồng Hới - QB * ĐT: (0523) 857868

ISBN: 978-604-939-028

Giá: 125.000đ